Yu. A. Kordyukov, On asymptotic expansions of generalized Bergman kernels on symplectic manifolds,
Algebra i Analiz, 2018, Volume 30, Issue 2, 163–187

Алгебра и анализ
Том 30 (2018), №2

Владимиру Ивановичу Смирнову к его 130-летию

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯХ ОБОБЩЕННЫХ ЯДЕР БЕРГМАНА НА СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

© Ю. А. КОРДЮКОВ

Мы доказываем полное внедиагональное асимптотическое разложение обобщенных ядер Бергмана ренормализованных лапласианов Бохнера, ассоциированных с большими тензорными степенями положительного линейного расслоения над компактным симплектическим многообразием. В качестве приложения мы строим алгебру операторов Теплица на симплектическом многообразии, ассоциированную с ренормализованным лапласианом Бохнера.

§1. Введение

В настоящей работе мы изучаем асимптотическое поведение обобщенного ядра Бергмана ренормализованного лапласиана Бохнера, ассоциированных с большими тензорными степенями положительного линейного расслоения над компактным симплектическим многообразием. Таким образом, мы рассматриваем компактное симплектическое многообразие (X,ω) размерности $2n$. Пусть (L,h^L) — эрмитово линейное расслоение на X с эрмитовой связностью $\nabla^L : C^\infty(X,L) \to C^\infty(X,T^*X\otimes L)$. Кривизна этой связности задается по формуле $R^L = (\nabla^L)^2$. Мы будем предполагать, что L удовлетворяет условию предквантования:

$$\frac{i}{2\pi}R^L = \omega.$$

Тем самым, $[\omega]\in H^2(X,\mathbb{Z})$. Пусть (E,h^E) — эрмитово векторное расслоение на X с эрмитовой связностью ∇^E и R^E — кривизна связности ∇^E.

Ключевые слова: симплектическое многообразие, лапласиан Бохнера, ядро Бергмана, асимптотики, операторы Теплица, квантование.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01004).

Пусть g — риманова метрика на X. Пусть $J_0 : TX \to TX$ — такой кососимметрический оператор, что

$$\omega(u,v) = g(J_0 u, v), \quad u, v \in TX.$$

Рассмотрим оператор $J : TX \to TX$, задаваемый формулой

$$J = J_0(-J_0^2)^{-1/2}.$$

Тогда J является почти комплексной структурой, согласованной с ω и g, то есть, $g(Ju,Jv) = g(u,v), \omega(Ju,Jv) = \omega(u,v)$ и $\omega(u,Ju) \geqslant 0$ для любых $u, v \in TX$.

Пусть ∇^{TX} — связность Леви–Чивита римановой метрики g. Для любого $p \in \mathbb{N}$ обозначим через L^p p-ю тензорную степень расслоения L. Пусть $\nabla^{L^p\otimes E} : C^\infty(X, L^p \otimes E) \to C^\infty(X, L^p \otimes E \otimes T^*X)$ — связность на $L^p \otimes E$, индуцированная связностями ∇^L и ∇^E. Обозначим через $\Delta^{L^p\otimes E}$ индуцированный лапласиан Бохнера, действующий на $C^\infty(X, L^p \otimes E)$ по формуле

$$\Delta^{L^p\otimes E} = \left(\nabla^{L^p\otimes E}\right)^* \nabla^{L^p\otimes E},$$

где $\left(\nabla^{L^p\otimes E}\right)^* : C^\infty(X, L^p \otimes E \otimes T^*X) \to C^\infty(X, L^p \otimes E)$ обозначает оператор, формально сопряженный к оператору $\nabla^{L^p\otimes E}$, и через Δ_p ренормализованный лапласиан Бохнера, действующий на $C^\infty(X, L^p\otimes E)$ по формуле

$$\Delta_p = \Delta^{L^p\otimes E} - p\tau,$$

где $\tau \in C^\infty(X)$ задается формулой

$$\tau(x) = -\pi \operatorname{Tr}[J_0(x)J(x)], \quad x \in X.$$

Ренормализованный лапласиан Бохнера Δ_p был введен В. Гийеминым и А. Урибе в работе [7]. Если (X, ω) является кэлеровым многообразием, он равен удвоенному соответствующему лапласиану Кодаиры на функциях $\square^{L^p} = \bar\partial^{L^p *}\bar\partial^{L^p}$. Асимптотика его спектра при $p \to \infty$ исследовалась в работах [4, 5, 7, 12, 14].

Обозначим через $\sigma(\Delta_p)$ спектр оператора Δ_p в пространстве

$$L^2(X, L^p \otimes E).$$

Согласно [14, следствие 1.2] (см. также [3, 4, 5, 7]), существует такая постоянная $C_L > 0$, что для любого p

$$\sigma(\Delta_p) \subset [-C_L, C_L] \cap [2p\mu_0 - C_L, +\infty),$$

где $\mu_0 > 0$ задается формулой

$$\mu_0 = \inf_{u\in T_xX, x\in X} \frac{iR^L_x(u, J(x)u)}{|u|^2_g}.$$

Рассмотрим линейное подпространство $\mathcal{H}_p \subset L^2(X, L^p \otimes E)$, порожденное собственными сечениями оператора Δ_p, соответствующими собственным значениям в интервале $[-C_L, C_L]$. Пусть $P_{\mathcal{H}_p}$ — ортогональный проектор в пространстве $L^2(X, L^p \otimes E)$ на $\mathcal{H}_p$. Гладкое ядро $P_{q,p}(x, x')$, $x, x' \in X$, оператора $(\Delta_p)^q P_{\mathcal{H}_p}$ по отношению к римановой форме объема dv_X называется обобщенным ядром Бергмана оператора Δ_p.

Мы интересуемся асимптотическим поведением обобщенного ядра Бергмана $P_{q,p}(x, x')$ при $p \to \infty$. Прежде всего, мы напомним, что согласно [14], для любых $m \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$,

$$|P_{q,p}(x, x')|_{C^m} = \mathcal{O}(p^{-\infty}),$$

если $d(x, x') > \varepsilon$. Чтобы описать асимптотическое разложение ядра $P_{q,p}(x, x')$ вблизи диагонали, мы введем нормальные координаты около произвольной точки $x_0 \in X$.

Пусть a^X — радиус инъективности риманова многообразия (X, g). Обозначим через $B^X(x_0, r)$ и $B^{T_{x_0}X}(0, r)$ соответственно открытые шары в X и $T_{x_0}X$ с центром в x_0 и радиусом r. Отождествим $B^{T_{x_0}X}(0, a^X)$ с $B^X(x_0, a^X)$ при помощи экспоненциального отображения $\exp^X_{x_0}$. Более того, выберем тривиализации расслоений L и E над $B^X(x_0, a^X)$, отождествляя их слои L_Z и E_Z в точке $Z \in B^{T_{x_0}X}(0, a^X) \cong B^X(x_0, a^X)$ с пространствами L_{x_0} и E_{x_0} при помощи параллельного переноса по отношению к связностям ∇^L и ∇^E вдоль кривой $\gamma_Z : [0, 1] \ni u \to \exp^X_{x_0}(uZ)$. Обозначим через $\nabla^{L^p \otimes E}$ и $h^{L^p \otimes E}$ связность и эрмитову метрику на тривиальном расслоении со слоем $(L^p \otimes E)_{x_0}$, индуцированные этими тривиализациями.

Пусть dv_{TX} обозначает риманову форму объема евклидова пространства $(T_{x_0}X, g_{x_0})$. Определим гладкую функцию κ на

$$B^{T_{x_0}X}(0, a^X) \cong B^X(x_0, a^X)$$

при помощи уравнения

$$dv_X(Z) = \kappa(Z)\, dv_{TX}(Z), \quad Z \in B^{T_{x_0}X}(0, a^X).$$

Почти комплексная структура J_{x_0} индуцирует разложение

$$T_{x_0}X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T^{(1,0)}_{x_0}X \oplus T^{(0,1)}_{x_0}X,$$

где $T^{(1,0)}_{x_0}X$ и $T^{(0,1)}_{x_0}X$ — собственные подпространства оператора J_{x_0}, соответствующие собственным значениям i и $-i$ соответственно. Обозначим через $\det_{\mathbb{C}}$ функцию детерминанта на комплексном пространстве $T^{(1,0)}_{x_0}X$. Положим

$$\mathcal{J}_{x_0} = -2\pi i J_0.$$

Тогда оператор $\mathcal{J}_{x_0} : T^{(1,0)}_{x_0}X \to T^{(1,0)}_{x_0}X$ положителен, а оператор $\mathcal{J}_{x_0} : T_{x_0}X \to T_{x_0}X$ кососимметричен. Определим функцию

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_{x_0} \in C^\infty(T_{x_0}X \times T_{x_0}X)$$

по формуле

$$\mathcal{P}(Z,Z') = \frac{\det_{\mathbb{C}} \mathcal{J}_{x_0}}{(2\pi)^n} \exp\Big(-\frac{1}{4}\big\langle (\mathcal{J}^2_{x_0})^{1/2}(Z-Z'),(Z-Z')\big\rangle + \frac{1}{2}\big\langle \mathcal{J}_{x_0}Z,Z'\big\rangle\Big). \quad (1)$$

Она является ядром Бергмана дифференциального оператора второго порядка $\mathcal{L}_0$ на $C^\infty(T_{x_0}X, E_{x_0})$, задаваемого формулой

$$\mathcal{L}_0 = -\sum_{j=1}^{2n}\Big(\nabla_{e_j} + \frac{1}{2}R^L_{x_0}(Z,e_j)\Big)^2 - \tau(x_0), \quad (2)$$

где $\{e_j\}_{j=1,\dots,2n}$ — ортонормированный базис в $T_{x_0}X$. Здесь для $U \in T_{x_0}X$ мы обозначаем через ∇_U обычный оператор дифференцирования в направлении вектора U на пространстве $C^\infty(T_{x_0}X, E_{x_0})$. Таким образом, $\mathcal{P}$ является гладким ядром (по отношению к dv_{TX}) ортогонального проектора в пространстве $L^2(T_{x_0}X, E_{x_0})$ на ядро N оператора $\mathcal{L}_0$.

Рассмотрим послойное произведение

$$TX \times_X TX = \{(Z,Z') \in T_{x_0}X \times T_{x_0}X : x_0 \in X\}.$$

Пусть $\pi : TX \times_X TX \to X$ — естественная проекция, задваемая формулой $\pi(Z,Z') = x_0$. Ядро $P_{q,p}(x,x')$ индуцирует гладкое сечение $P_{q,p,x_0}(Z,Z')$ расслоения $\pi^*(\mathrm{End}(E))$ на $TX \times_X TX$, определенное для всех $x_0 \in X$ и $Z, Z' \in T_{x_0}X$ с $|Z|, |Z'| < a_X$.

Основным результатом работы является следующая теорема, которая утверждает существование полного внедиагонального асимптотического разложения обобщенного ядра Бергмана $P_{q,p}$ при $p \to \infty$.

Теорема 1. *Существует такое $\varepsilon \in (0, a^X)$, что для любых $j, m, m' \in \mathbb{N}$, $j \geqslant 2q$ существуют такие положительные постоянные C, c и M, что для любых $p \geqslant 1$, $x_0 \in X$ и $Z, Z' \in T_{x_0}X$, $|Z|, |Z'| < \varepsilon$,*

$$\begin{aligned}\sup_{|\alpha|+|\alpha'|\leqslant m} \Bigg| \frac{\partial^{|\alpha|+|\alpha'|}}{\partial Z^\alpha \partial Z'^{\alpha'}} \Bigg(\frac{1}{p^n} P_{q,p,x_0}(Z,Z') \\ - \sum_{r=2q}^{j} F_{q,r,x_0}(\sqrt{p}Z, \sqrt{p}Z')\kappa^{-\frac12}(Z)\kappa^{-\frac12}(Z')p^{-\frac{r}{2}+q}\Bigg)\Bigg|_{\mathcal{C}^{m'}(X)} \\ \leqslant Cp^{-\frac{j-m+1}{2}+q}(1+\sqrt{p}|Z|+\sqrt{p}|Z'|)^M \exp(-c\sqrt{\mu_0 p}|Z-Z'|) + \mathcal{O}(p^{-\infty}), \quad (3)\end{aligned}$$

где

$$F_{q,r,x_0}(Z,Z') = J_{q,r,x_0}(Z,Z')\mathcal{P}_{x_0}(Z,Z'),$$

$J_{q,r,x_0}(Z,Z')$ *являются полиномами по* Z, Z', *гладко зависящими от* x_0, *той же четности, что* r *и* $\deg J_{q,r,x_0} \leqslant 3r$.

Здесь $\mathcal{C}^{m'}(X)$ обозначает $\mathcal{C}^{m'}$-норму по параметру $x_0 \in X$. Скажем. что $G_p = \mathcal{O}(p^{-\infty})$, если для любых $l, l_1 \in \mathbb{N}$ существует такая постоянная $C_{l,l_1} > 0$, что $\mathcal{C}^{l_1}$-норма G_p оценивается сверху через $C_{l,l_1}p^{-l}$.

Полное внедиагональное асимптотическое разложение ядра Бергмана spin^c оператора Дирака, ассоциированного с положительным линейным расслоением на компактном симплектическом многообразии, доказано Кс. Даем, К. Лью и Ш. Ма [6, теорема 4.18'] (см. также [13, теорема 4.2.1]). Их подход был разработан под влиянием идей локальной теории индекса, особенно аналитических методов Бисмута и Лебо. В этом случае очень важно, что собственные значения ассоциированного лапласиана либо равны 0, либо стремятся к $+\infty$.

В настоящей ситуации ренормализованный лапласиан Бохнера, возможно, имеет другие ограниченные собственные значения. Тем не менее, в работе [14] Ш. Ма и Дж. Маринеску разработали метод, позволивший им получить более слабый результат, асимптотическое разложение вблизи диагонали обобщенных ядер Бергмана ренормализованного лапласиана Бохнера [14, теорема 1.19] (см. также [13, теорема 4.1.24]), что оказалось достаточным для многих приложений. Работа [14] также содержит вычисления некоторых коэффициентов F_{q,r,x_0}.

В этой работе мы модифицируем методы Ма и Маринеску так, чтобы доказать полное внедиагональное асимптотическое разложение обобщенных ядер Бергмана ренормализованного лапласиана Бергмана. Мы следуем стратегии работы [6, 14]. Таким образом, первый шаг состоит в локализации задачи в некоторой окрестности диагонали. Затем мы перемасштабируем оператор в введенных выше нормальных координатах и получаем его формальное асимптотическое разложение при $p \to \infty$. Наконец, мы используем формулу Рисса, технику формальных степенных рядов, оценки по норме в пространствах Соболева и теоремы вложения Соболева. Наиболее существенное усовершенствование, позволяющее нам расширить область пригодности асимптотических разложений, состоит в использовании весовых пространств Соболева и весовых оценок. Здесь мы применяем методы, которые ранее были использованы в работах [1, 2, 9, 10] для доказательства поточечных оценок ядер функций от эллиптических дифференциальных операторов на некомпактных многообразиях.

В качестве непосредственного приложения теоремы 1 мы строим алгебру операторов Теплица на симплектическом многообразии X, ассоциированную с ренормализованным лапласианом Бохнера. На самом деле, как только доказано полное внедиагональное асимптотическое разложение для обобщенных ядер Бергмана, следуя рассуждениям, приведенным в работе [15], можно легко получить характеризацию операторов Теплица и доказать, что эти операторы образуют алгебру. В процессе подготовки данной работы Ш. Ма и Дж. Маринеску сообщили нам о препринте [8], в котором они построили алгебру операторов Теплица, ассоциированную с ренормализованным лапласианом Бохнера, используя асимптотические разложения обобщенных ядер Бергманна в двух дополнительных областях, покрывающих многообразие [8, (2.5) и теорема 2.1] (см. также [11]). Эти разложения сильнее, чем разложения вблизи диагонали, доказанные в работе [14], но слабее, чем полные внедиагональные разложения, установленные в настоящей работе.

Работа организована следующим образом. В §2 мы напоминаем результаты [14, разделы 1.1 и 1.2] о локализации и изменении масштаба задачи, которые позволяют нам получить формальное асимптотическое разложение ренормализованного лапласиана Бохнера при $p \to \infty$. В §3 мы выводим оценки весовых норм для резольвенты ренормализованного лапласиана Бохнера $\mathcal{L}_t$. В §4 мы выводим оценки весовых норм для обобщенного проектора Бергмана $\mathcal{P}_{q,t}$, ассоциированного с оператором $\mathcal{L}_t$, и его производных произвольного порядка по t. В §5 мы сначала используем оценки §4, чтобы доказать оценки весовых норм для остатков в асимптотической формуле для обобщенного проектора Бергмана $\mathcal{P}_{q,t}$. Затем теорема вложения Соболева позволяет нам получить поточечные оценки остатков в асимптотической формуле для обобщенного проектора Бергмана. Наконец, выписывая эти поточечные оценки в первоначальных координатах, мы завершаем доказательство основной теоремы. §6 посвящен операторам Теплица.

Автор благодарен Ш. Ма и Дж. Маринеску за полезные обсуждения.

§2. Локализация и изменение масштаба задачи

В этом параграфе мы напоминаем результаты [14, разделы 1.1 и 1.2] о локализации и изменении масштаба задачи, позволяющие нам получить формальное асимптотическое разложение ренормализованного лапласиана Бохнера при $p \to \infty$.

Мы будем придерживаться обозначений, введенных в §1. Зафиксируем $x_0 \in X$. Пусть $\{e_j\}$ — ориентированный ортонормированный базис пространства $T_{x_0}X$. Он определяет изоморфизм $X_0 := \mathbb{R}^{2n} \cong T_{x_0}X$. Рассмотрим тривиальные расслоения L_0 и E_0 со слоями L_{x_0} и E_{x_0} на X_0. Напомним, что у нас имеется риманова метрика g на $B^{T_{x_0}X}(0, a^X)$, а также связности ∇^L, ∇^E и эрмитовы метрики h^L, h^E на ограничениях расслоений L_0 и E_0 на $B^{T_{x_0}X}(0, a^X)$, индуцированные отождествлением $B^{T_{x_0}X}(0, a^X) \cong B^X(x_0, a^X)$. В частности, h^L, h^E — постоянные метрики $h^{L_0} = h^{L_{x_0}}$, $h^{E_0} = h^{E_{x_0}}$. При $\varepsilon \in (0, a^X/4)$ эти геометрические объекты можно продолжить с $B^{T_{x_0}X}(0, \varepsilon)$ на $\mathbb{R}^{2n} \cong T_{x_0}X$ следующим образом.

Пусть $\rho : \mathbb{R} \to [0, 1]$ — такая гладкая четная функция, что $\rho(v) = 1$ при $|v| < 2$ и $\rho(v) = 0$ при $|v| > 4$. Пусть $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ — отображение, определяемое формулой $\varphi_\varepsilon(Z) = \rho(|Z|/\varepsilon)Z$. Мы наделим X_0 метрикой $g_0(Z) = g(\varphi_\varepsilon(Z))$. Положим $\nabla^{E_0} = \varphi_\varepsilon^* \nabla^E$. Определим эрмитову связность ∇^{L_0} на (L_0, h^{L_0}) по формуле

$$\nabla^{L_0}(Z) = \varphi_\varepsilon^* \nabla^L + \frac{1}{2}(1 - \rho^2(|Z|/\varepsilon)) R^L_{x_0}(\mathcal{R}, \cdot),$$

где $\mathcal{R}(Z) = \sum_j Z_j e_j \in \mathbb{R}^{2n} \cong T_Z X_0$.

Можно показать, что при достаточно малом ε кривизна R^{L_0} положительна и удовлетворяет следующей оценке для любого $x_0 \in X$,

$$\inf_{u \in TX} \frac{i R^{L_0}(u, J^{L_0}u)}{|u|_g^2} \geqslant (1 - \alpha)\mu_0.$$

Начиная с этого места, мы зафиксируем такое $\varepsilon > 0$.

Мы также продолжим функцию κ с $B^{T_{x_0}X}(0, \varepsilon)$ на X_0. Пусть dv_{X_0} — риманова форма объема риманова многообразия (X_0, g_0). Тогда κ — гладкая положительная функция на X_0, определяемая уравнением

$$dv_{X_0}(Z) = \kappa(Z)\, dv_{TX}(Z), \quad Z \in X_0.$$

Пусть $\Delta_p^{X_0} = \Delta^{L_0^p \otimes E_0} - p\tau_0$ — ассоциированный ренормализованный лапласиан Бохнера, действующий на $C^\infty(X_0, L_0^p \otimes E_0)$. Тогда (см. [14, (1.23)]) существует такая постоянная $C_{L_0} > 0$, что для любого p

$$\sigma(\Delta_p^{X_0}) \subset [-C_{L_0}, C_{L_0}] \cap [2(1 - \alpha)p\mu_0 - C_{L_0}, +\infty). \tag{4}$$

Рассмотрим подпространство $\mathcal{H}_p^0$ в $C^\infty(X_0, L_0^p \otimes E_0) \cong C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, E_{x_0})$, порожденное собственными сечениями оператора $\Delta_p^{X_0}$, соответствующими собственным значениям в интервале $[-C_{L_0}, C_{L_0}]$. Пусть $P_{\mathcal{H}_p^0}$ — ортогональный проектор на $\mathcal{H}_p^0$. Гладкое ядро оператора $(\Delta_p^{X_0})^q P_{\mathcal{H}_p^0}$ по отношению к римановой форме объема dv_{X_0} обозначим через $P^0_{q,p}(Z, Z')$. Ядра $P_{q,p,x_0}(Z, Z')$ и $P^0_{q,p}(Z, Z')$ асимптотически близки на $B^{T_{x_0}X}(0, \varepsilon)$ в $\mathcal{C}^\infty$-топологии при $p \to \infty$.

Предложение 1 ([14, предложение 1.3]). *Для любых $l, m \in \mathbb{N}$ существует такая постоянная $C_{l,m} > 0$, что для любых $x_0 \in X$ и $x, x' \in B^{T_{x_0}X}(0, \varepsilon)$,*

$$|P_{q,p,x_0}(Z, Z') - P^0_{q,p}(Z, Z')|_{\mathcal{C}^m} \leqslant C_{l,m} p^{-l}.$$

В качестве следующего шага мы используем преобразование изменения масштаба, введенное в [14, раздел 1.2]. Обозначим $t = \frac{1}{\sqrt{p}}$. Для $s \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, E_{x_0})$ положим

$$S_t s(Z) = s(Z/t), \quad Z \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Перемасштабированная связность ∇_t определяется формулой

$$\nabla_t = t S_t^{-1} \kappa^{\frac{1}{2}} \nabla^{L_0^p} \kappa^{-\frac{1}{2}} S_t.$$

Пусть Γ^L, Γ^E — формы связностей ∇^L, ∇^E по отношению к некоторым фиксированным реперам в L и E, параллельным вдоль кривых $\gamma_Z : [0,1] \ni u \to \exp^X_{x_0}(uZ)$ для выбранных нами тривиализаций на $B^{T_{x_0}X}(0, \varepsilon)$. Тогда на $B^{T_{x_0}X}(0, \varepsilon/t)$

$$\begin{aligned}\nabla_{t,e_i} &= \kappa^{\frac{1}{2}}(tZ) \left(\nabla_{e_i} + \frac{1}{t}\Gamma^L(e_i)(tZ) + t\Gamma^E(e_i)(tZ) \right) \kappa^{-\frac{1}{2}}(tZ) \\ &= \nabla_{e_i} + \frac{1}{t}\Gamma^L(e_i)(tZ) + t\Gamma^E(e_i)(tZ) - t\left(\kappa^{-1}(e_i\kappa)\right)(tZ).\end{aligned}$$

Напомним, что

$$\sum_{|\alpha|=r} (\partial^\alpha \Gamma^L)_{x_0}(e_j) \frac{Z^\alpha}{\alpha!} = \frac{1}{r+1} \sum_{|\alpha|=r-1} (\partial^\alpha R^L)_{x_0}(\mathcal{R}, e_j) \frac{Z^\alpha}{\alpha!}.$$

В частности,

$$\Gamma^L(e_j)(Z) = \frac{1}{2} R^L_{x_0}(\mathcal{R}, e_j) + O(|Z|^2).$$

Подобные тождества имеют место для Γ^E.

Перемасштабированный оператор $\mathcal{L}_t$ определяется по формуле

$$\mathcal{L}_t = t^2 S_t^{-1} \kappa^{\frac{1}{2}} \Delta_p^{X_0} \kappa^{-\frac{1}{2}} S_t. \tag{5}$$

Мы имеем

$$\mathcal{L}_t = -g^{jk}(tZ) \left[\nabla_{t,e_j} \nabla_{t,e_k} - t\Gamma^\ell_{jk}(tZ) \nabla_{t,e_\ell} \right] - \tau(tZ).$$

Из (4) следует, что для любого достаточно малого t,

$$\sigma(\mathcal{L}_t) \subset [-C_{L_0} t^2, C_{L_0} t^2] \cap [2(1-2\alpha)\mu_0 - C_{L_0}, +\infty).$$

Отметим, что операторы ∇_{t,e_i} и $\mathcal{L}_t$ зависят гладко от t вплоть до $t=0$. Их пределами при $t\to 0$ являются операторы

$$\nabla_{0,e_i}=\nabla_{e_i}+\frac{1}{2}R^L_{x_0}(\mathcal{R},e_i)$$

и $\mathcal{L}_0$, задаваемый формулой (2). Спектр оператора $\mathcal{L}_0$ состоит из дискретного множества собственных значений бесконечной кратности (см., например, [14, теорема 1.15]). В частности,

$$\sigma(\mathcal{L}_0)\subset\{0\}\cap[2(1-2\alpha)\mu_0-C_{L_0},+\infty).$$

Можно разложить перемасштабированный оператор $\mathcal{L}_t$ в ряд Тейлора по t. По поводу получающегося асимптотического разложения мы отсылаем читателя к [14, теорема 1.4].

§3. Оценки резольвенты по норме

Следующим шагом являются оценки по норме. В этом параграфе мы выводим оценки весовых норм резольвенты оператора $\mathcal{L}_t$. Сначала мы напомним и немного модифицируем результаты [14, раздел 1.3].

Обозначим через $C^\infty_b(\mathbb{R}^{2n},E_{x_0})$ пространство гладких функций на $\mathbb{R}^{2n}$ со значениями в E_{x_0}, производные любого порядка которых равномерно ограничены в $\mathbb{R}^{2n}$. Таким образом, $a\in C^\infty_b(\mathbb{R}^{2n},E_{x_0})$, если для любого $\alpha\in\mathbb{Z}^{2n}_+$ мы имеем

$$\sup_{Z\in\mathbb{R}^{2n}}|\nabla^{\alpha_1}_{e_1}\dots\nabla^{\alpha_{2n}}_{e_{2n}}a(Z)|<\infty.$$

Для $m\in\mathbb{N}$ и $t>0$ пусть $\mathcal{Q}^m_t$ — множество линейных комбинаций операторов вида $\nabla_{t,e_{i_1}}\dots\nabla_{t,e_{i_j}}$, $j\leqslant m$, с коэффициентами из $C^\infty_b(\mathbb{R}^{2n},E_{x_0})$. Легко видеть, что $\mathcal{Q}^m_t$ не зависит от t, поэтому мы будем опускать t в обозначениях: $\mathcal{Q}^m_t=\mathcal{Q}^m$. Заметим, что если Q принадлежит $\mathcal{Q}^m$, то сопряженный оператор Q^* принадлежит $\mathcal{Q}^m$.

Для $s\in C^\infty_c(\mathbb{R}^{2n},E_{x_0})$ положим

$$\|s\|^2_{t,0}=\|s\|^2_0=\int\limits_{\mathbb{R}^{2n}}|s(Z)|^2\,dv_{TX}(Z),$$

и для любых $m\in\mathbb{N}$ и $t>0$,

$$\|s\|^2_{t,m}=\sum_{\ell=0}^{m}\sum_{j_1,\dots,j_\ell=1}^{2n}\|\nabla_{t,e_{j_1}}\cdots\nabla_{t,e_{j_\ell}}s\|^2_{t,0}$$

Пусть $\langle\cdot,\cdot\rangle_{t,m}$ обозначает скалярное произведение на $C^\infty(\mathbb{R}^{2n},E_{x_0})$, соответствующее норме $\|\cdot\|_{t,m}$. Пусть H^m_t — пространство Соболева порядка m с нормой $\|\cdot\|_{t,m}$. Для любого целого $m<0$ мы определим пространство Соболева H^m_t, используя двойственность. Легко видеть, что для различных t_1 и t_2 нормы $\|\cdot\|_{t_1,m}$ и $\|\cdot\|_{t_2,m}$ эквивалентны, равномерно по $t_1,t_2\in[0,1]$. Для любого ограниченного линейного оператора $A: H^m_t\to H^{m'}_t$ с $m,m'\in\mathbb{Z}$ мы обозначим через $\|A\|^{m,m'}_t$ его норму по отношению к нормам $\|\cdot\|_{t,m}$ и $\|\cdot\|_{t,m'}$.

Пусть δ — ориентированная против часовой стрелки окружность в $\mathbb{C}$ с центром в 0 радиуса $c\mu_0$. Следующая теорема является небольшой модификацией [14, теорема 1.7].

Теорема 2. *Существует такое $t_0>0$, что резольвента $(\lambda-\mathcal{L}_t)^{-1}$ существует для любых $\lambda\in\delta$, $t\in[0,t_0]$. Более того, существует такое $C>0$, что для любых $\lambda\in\delta$, $t\in[0,t_0]$ и $x_0\in X$*

$$\|(\lambda-\mathcal{L}_t)^{-1}\|^{0,0}_t\leqslant C/\mu_0,\quad \|(\lambda-\mathcal{L}_t)^{-1}\|^{0,1}_t\leqslant C/\sqrt{\mu_0},\quad \|(\lambda-\mathcal{L}_t)^{-1}\|^{-1,1}_t\leqslant C.$$

Доказательство. Первое неравенство следует из спектральной теоремы. Далее мы имеем

$$\begin{aligned}\|(\lambda-\mathcal{L}_t)^{-1}s\|^2_{t,1}&\leqslant\frac{1}{C_1}\Big(\big\langle\mathcal{L}_t(\lambda-\mathcal{L}_t)^{-1}s,(\lambda-\mathcal{L}_t)^{-1}s\big\rangle_{t,0}+C_2\|(\lambda-\mathcal{L}_t)^{-1}s\|^2_{t,0}\Big)\\&\leqslant\frac{C_2}{\mu_0}\|s\|^2_{t,0}.\end{aligned}$$

По поводу третьего неравенства мы отсылаем читателя к доказательству [14, теорема 1.7]. □

Теперь мы введем весовые пространства. Рассмотрим функцию $f\in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, задаваемую формулой

$$f(Z)=(1+|Z|^2)^{1/2},\quad Z\in\mathbb{R}^{2n}.$$

Важным моментом является то, что функция f удовлетворяет оценкам

$$C_1|Z|\leqslant f(Z)\leqslant C_2|Z|,\quad |Z|\geqslant 1,$$

с некоторыми $C_1,C_2>0$, и для любого $\alpha\in\mathbb{Z}^{2n}_+$ с $|\alpha|>0$,

$$\sup_{Z\in\mathbb{R}^{2n}}|\nabla^{\alpha_1}_{e_1}\dots\nabla^{\alpha_{2n}}_{e_{2n}}f(Z)|<\infty. \tag{6}$$

Для любого $a\in\mathbb{R}$ пусть L^2_a — весовое L^2-пространство в $\mathbb{R}^{2n}$ с весом e^{af}:

$$L^2_a=\{s: e^{af}s\in L^2(\mathbb{R}^{2n},E_{x_0})\}.$$

Семейство $\{\|\cdot\|_{L^2_{a,W}} : W\in\mathbb{R}^{2n}\}$ эквивалентных норм в пространстве L^2_a определяется по формуле

$$\|s\|^2_{L^2_{a,W}} = \|e^{af_W}s\|^2_0 = \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} e^{2af_W(Z)}|s(Z)|^2\,dv_{TX}(Z),$$

где для любого $W\in\mathbb{R}^{2n}$ функция $f_W\in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ задается формулой

$$f_W(Z) = f(Z-W) = (1+|Z-W|^2)^{1/2},\quad Z\in\mathbb{R}^{2n}.$$

Мы будем обозначать через $L^2_{a,W}$ пространство L^2_a с нормой $\|\cdot\|_{L^2_{a,W}}$. Аналогично определяются весовые пространства Соболева.

Поскольку оператор умножения на функцию e^{af_W} определяет унитарный оператор $e^{af_W} : L^2_{a,W}\to L^2$, любой ограниченный оператор A в пространстве $L^2_{a,W}$ унитарно эквивалентен оператору $A_{a,W} = e^{af_W}Ae^{-af_W}$ в пространстве L^2. В дальнейшем вместо того, чтобы работать непосредственно с весовыми пространствами $L^2_{a,W}$, мы будем рассматривать семейства операторов вида $\{e^{af_W}Ae^{-af_W} : W\in\mathbb{R}^{2n}\}$ и только в самом конце переключимся на весовые оценки.

Прежде всего, мы отметим, что

$$\nabla_{t,a,W;e_j} := e^{af_W}\nabla_{t,e_j}e^{-af_W} = \nabla_{t,e_j} - a\nabla_{e_j}f_W.$$

В частности, отсюда немедленно следует, что если оператор Q принадлежит $\mathcal{Q}^m$, то оператор $e^{af_W}Qe^{-af_W}$ принадлежит $\mathcal{Q}^m$. Более того, семейство $\{e^{af_W}Qe^{-af_W} : W\in\mathbb{R}^{2n}\}$ является ограниченным семейством операторов из $\mathcal{Q}^m$.

Затем для оператора $\mathcal{L}_{t,a,W} := e^{af_W}\mathcal{L}_te^{-af_W}$ мы получаем, что

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{t,a,W} =& -g^{jk}(tZ)\left[\nabla_{t,a,W;e_j}\nabla_{t,a,W;e_k} - t\Gamma^\ell_{jk}(tZ)\nabla_{t,a,e_\ell;W}\right] - \tau(tZ) && (7)\\ =&\mathcal{L}_t + aA_W + a^2B_W, && (8)\end{aligned}$$

где

$$A_W = -\sum_{j,k=1}^{2n} g^{jk}(tZ)(\nabla_{e_j}f_W\nabla_{t,e_k} + \nabla_{e_k}f_W\nabla_{t,e_j} + \nabla_{e_j}\nabla_{e_k}f_W),$$

$$B_W = -\sum_{j,k=1}^{2n} g^{jk}(tZ)\nabla_{e_j}f_W\nabla_{e_k}f_W.$$

В частности,

$$\operatorname{Re}\mathcal{L}_{t,a,W} = \mathcal{L}_t - a^2 \sum_{j,k=1}^{2n} g^{jk}(tZ)\nabla_{e_j} f_W \nabla_{e_k} f_W = \mathcal{L}_t - a^2 \|df_W\|^2_{g^{-1}(tZ)}. \quad (9)$$

Имеет место следующее обобщение [14, теорема 1.6].

Теорема 3. *Существуют такие постоянные* $C_1, C_2, C_3 > 0$, *что для любых* $t \in [0,1]$, $a \in \mathbb{R}$, $W \in \mathbb{R}^{2n}$ *и* $s, s' \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2n})$

$$\operatorname{Re}\langle \mathcal{L}_{t,a,W} s, s\rangle_{t,0} \geqslant C_1 \|s\|^2_{t,1} - (C_2 + C_2' a^2)\|s\|^2_{t,0},$$
$$\big|\langle \mathcal{L}_{t,a,W} s, s'\rangle_{t,0}\big| \leqslant C_3\big(\|s\|_{t,1}\|s'\|_{t,1} + a^2\|s\|_{t,0}\|s'\|_{t,0}\big).$$

Доказательство. Используя (6), (8), (9) и [14, теорема 1.6], мы получаем

$$\operatorname{Re}\langle \mathcal{L}_{t,a,W} s, s\rangle_{t,0} \geqslant \langle \mathcal{L}_t s, s\rangle_{t,0} - C_2' a^2 \|s\|^2_{t,0} \geqslant C_1\|s\|^2_{t,1} - (C_2 + C_2'a^2)\|s\|^2_{t,0}$$

и

$$\begin{aligned}\big|\langle \mathcal{L}_{t,a,W} s, s'\rangle_{t,0}\big| &\leqslant \big|\langle \mathcal{L}_t s, s'\rangle_{t,0}\big| + |a|\,\big|\langle A_W s, s'\rangle_{t,0}\big| + a^2\,\big|\langle B_W s, s'\rangle_{t,0}\big| \\ &\leqslant C_3\big(\|s\|_{t,1}\|s'\|_{t,1} + a^2\|s\|_{t,0}\|s'\|_{t,0}\big).\end{aligned}$$

□

Теперь мы распространим теорему 2 на операторы $\mathcal{L}_{t,a,W}$.

Теорема 4. *Существуют такие постоянные* $c > 0$ *и* $C > 0$, *что для всех* $\lambda \in \delta$, $t \in [0, t_0]$, $|a| < c\sqrt{\mu_0}$, $W \in \mathbb{R}^{2n}$ *и* $x_0 \in X$ *существует обратный оператор* $(\lambda - \mathcal{L}_{t,a,W})^{-1}$, *причем*

$$\|(\lambda - \mathcal{L}_{t,a,W})^{-1}\|_t^{0,0} \leqslant C/\mu_0, \quad \|(\lambda - \mathcal{L}_{t,a,W})^{-1}\|_t^{-1,1} \leqslant C.$$

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что для всех $\lambda \in \delta$, $t \in [0, t_0]$, $a \in \mathbb{R}$, $W \in \mathbb{R}^{2n}$ и $x_0 \in X$

$$\begin{aligned}\|(\mathcal{L}_{t,a,W} - \mathcal{L}_t)(\lambda - \mathcal{L}_t)^{-1}\|_t^{0,0} &= \|(aA_W + a^2 B_W)(\lambda - \mathcal{L}_t)^{-1}\|_t^{0,0} \\ &\leqslant C\big(a\|(\lambda - \mathcal{L}_t)^{-1}\|_t^{0,1} + a^2\|(\lambda - \mathcal{L}_t)^{-1}\|_t^{0,0}\big) \leqslant C\left(\frac{a}{\sqrt{\mu_0}} + \frac{a^2}{\mu_0}\right).\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}&\|(\mathcal{L}_{t,a,W} - \mathcal{L}_t)(\lambda - \mathcal{L}_t)^{-1}\|_t^{-1,0} \\ &\qquad \leqslant C\big(a\|(\lambda - \mathcal{L}_t)^{-1}\|_t^{-1,1} + a^2\|(\lambda - \mathcal{L}_t)^{-1}\|_t^{-1,0}\big) \leqslant C\left(a + \frac{a^2}{\sqrt{\mu_0}}\right).\end{aligned}$$

Выберем $c > 0$ таким образом, чтобы $C(c + c^2) < \frac{1}{2}$. Тогда, если $|a| < c\sqrt{\mu_0}$, то оператор $\lambda - \mathcal{L}_{t,a,W}$ обратим в L^2. Используя резольвентное тождество

$$(\lambda - \mathcal{L}_{t,a,W})^{-1} = (\lambda - \mathcal{L}_t)^{-1} + (\lambda - \mathcal{L}_{t,a,W})^{-1}(\mathcal{L}_{t,a,W} - \mathcal{L}_t)(\lambda - \mathcal{L}_t)^{-1},$$

мы заключаем, что

$$\begin{aligned}
&\|(\lambda-\mathcal{L}_{t,a,W})^{-1}\|_t^{0,0}\\
&\qquad\leqslant \|(\lambda-\mathcal{L}_t)^{-1}\|_t^{0,0}+\|(\lambda-\mathcal{L}_{t,a,W})^{-1}\|_t^{0,0}\|(\mathcal{L}_{t,a,W}-\mathcal{L}_t)(\lambda-\mathcal{L}_t)^{-1}\|_t^{0,0}\\
&\qquad\leqslant \|(\lambda-\mathcal{L}_t)^{-1}\|_t^{0,0}+\frac{1}{2}\|(\lambda-\mathcal{L}_{t,a,W})^{-1}\|_t^{0,0}.
\end{aligned}$$

Поэтому,

$$\|(\lambda-\mathcal{L}_{t,a,W})^{-1}\|_t^{0,0}\leqslant 2\|(\lambda-\mathcal{L}_t)^{-1}\|_t^{0,0}\leqslant C/\mu_0.$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
&\|(\lambda-\mathcal{L}_{t,a,W})^{-1}\|_t^{0,1}\\
&\qquad\leqslant \|(\lambda-\mathcal{L}_t)^{-1}\|_t^{0,1}+\|(\lambda-\mathcal{L}_{t,a,W})^{-1}\|_t^{0,1}\|(\mathcal{L}_{t,a}-\mathcal{L}_t)(\lambda-\mathcal{L}_t)^{-1}\|_t^{0,0}\\
&\qquad\leqslant \|(\lambda-\mathcal{L}_t)^{-1}\|_t^{0,1}+\frac{1}{2}\|(\lambda-\mathcal{L}_{t,a,W})^{-1}\|_t^{0,1}.
\end{aligned}$$

Поэтому, мы получаем

$$\|(\lambda-\mathcal{L}_{t,a,W})^{-1}\|_t^{0,1}\leqslant 2\|(\lambda-\mathcal{L}_t)^{-1}\|_t^{0,1}\leqslant C/\sqrt{\mu_0}.$$

Наконец,

$$\begin{aligned}
\|(\lambda-\mathcal{L}_{t,a,W})^{-1}\|_t^{-1,1}&\leqslant \|(\lambda-\mathcal{L}_t)^{-1}\|_t^{-1,1}\\
&\quad+\|(\lambda-\mathcal{L}_{t,a,W})^{-1}\|_t^{0,1}\|(\mathcal{L}_{t,a,W}-\mathcal{L}_t)(\lambda-\mathcal{L}_t)^{-1}\|_t^{-1,0}\leqslant C. \quad\square
\end{aligned}$$

В дальнейшем мы сохраним обозначение c для постоянной, задаваемой теоремой 4, которая обычно будет связана с интервалом $(-c\sqrt{\mu_0}, c\sqrt{\mu_0})$ допустимых значений параметра a.

Заметим, что для любых $\lambda\in\delta$, $t\in[0,t_0]$, $|a|<c\sqrt{\mu_0}$, $W\in\mathbb{R}^{2n}$ и $x_0\in X$ операторы $(\lambda-\mathcal{L}_{t,a,W})^{-1}$ и $(\lambda-\mathcal{L}_t)^{-1}$ связаны соотношением

$$(\lambda-\mathcal{L}_{t,a,W})^{-1}=e^{af_W}(\lambda-\mathcal{L}_t)^{-1}e^{-af_W},\tag{10}$$

которое необходимо понимать следующим образом. Если $a<0$, то для любого $s\in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2n},E_{x_0})$ выражение $e^{af_W}(\lambda-\mathcal{L}_t)^{-1}e^{-af_W}s$ имеет смысл и определяет функцию из $L^2(\mathbb{R}^{2n},E_{x_0})$. Таким образом, получается корректно определенный оператор

$$e^{af_W}(\lambda-\mathcal{L}_t)^{-1}e^{-af_W}: C_c^\infty(\mathbb{R}^{2n},E_{x_0})\to L^2(\mathbb{R}^{2n},E_{x_0}),$$

и можно проверить, что $e^{af_W}(\lambda-\mathcal{L}_t)^{-1}e^{-af_W}s=(\lambda-\mathcal{L}_{t,a,W})^{-1}s$ для любого $s\in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2n},E_{x_0})$. Поэтому, соотношение (10) означает, что оператор

$e^{af_W}(\lambda-\mathcal{L}_t)^{-1}e^{-af_W}$ продолжается до ограниченного оператора в пространстве $L^2(\mathbb{R}^{2n},E_{x_0})$, который совпадает с оператором $(\lambda-\mathcal{L}_{t,a,W})^{-1}$. Если $a>0$, то для любого $s\in L^2(\mathbb{R}^{2n},E_{x_0})$ выражение

$$e^{af_W}(\lambda-\mathcal{L}_t)^{-1}e^{-af_W}s$$

имеет смысл как обобщенная функция на $\mathbb{R}^{2n}$. Таким образом, мы получаем корректно определенный оператор

$$e^{af_W}(\lambda-\mathcal{L}_t)^{-1}e^{-af_W}:L^2(\mathbb{R}^{2n},E_{x_0})\to C^{-\infty}(\mathbb{R}^{2n},E_{x_0}).$$

Поэтому, соотношение (10) означает, что этот оператор, на самом деле, является ограниченным оператором в пространстве $L^2(\mathbb{R}^{2n},E_{x_0})$, который совпадает с оператором $(\lambda-\mathcal{L}_{t,a,W})^{-1}$.

Следующее предложение является обобщением предложения 1.8 из [14].

Предложение 2. *Для любого натурального m существует такое $C_m>0$, что для любых $t\in(0,1]$, $Q_1,\dots,Q_m\in\{\nabla_{t,a,W;e_i},Z_i\}_{i=1}^{2n}$, $|a|<c\sqrt{\mu_0}$, $W\in\mathbb{R}^{2n}$ и $s,s'\in C^\infty_c(\mathbb{R}^{2n},E_{x_0})$*

$$\left|\bigl\langle\bigl[Q_1,[Q_2,\dots,[Q_m,\mathcal{L}_{t,a,W}]\dots]\bigr]s,s'\bigr\rangle_{t,0}\right|\leqslant C_m\|s\|_{t,1}\|s'\|_{t,1}.$$

Доказательство. Напомним коммутационные соотношения

$$[\nabla_{t,e_i},Z_j]=\delta_{ij},\quad [\nabla_{t,e_i},\nabla_{t,e_j}]=R^{L_0}(tZ)(e_i,e_j).$$

Следовательно,

$$[\nabla_{t,a,W;e_i},Z_j]=e^{af_W}[\nabla_{t,e_i},Z_j]e^{-af_W}=\delta_{ij},$$
$$[\nabla_{t,a,W;e_i},\nabla_{t,a,W;e_j}]=e^{af_W}[\nabla_{t,e_i},\nabla_{t,e_j}]e^{-af_W}=R^{L_0}(tZ)(e_i,e_j).$$

Согласно (7) оператор $\mathcal{L}_{t,a,W}$ имеет вид

$$\mathcal{L}_{t,a,W}=\sum_{i,j}a_{ij}(t,tZ)\nabla_{t,a,W;e_i}\nabla_{t,a,W;e_j}+\sum_i b_i(t,tZ)\nabla_{t,a,W;e_i}+c(t,tZ),$$

где $a_{ij}(t,Z)$, $b_i(t,Z)$, $c(t,Z)$ как функции переменной Z принадлежат пространству $C^\infty_b(\mathbb{R}^{2n},\mathrm{End}(E_{x_0}))$ со всеми нормами, равномерно ограниченными по $t\in[0,1]$. Более того, они являются многочленами от t. Используя коммутационные соотношения, можно увидеть, что для $Q_1,\dots,Q_m\in\{\nabla_{t,a,W;e_i},Z_i\}_{i=1}^{2n}$ оператор $[Q_1,[Q_2,\dots,[Q_m,\mathcal{L}_{t,a,W}]\dots]]$ имеет такую же структуру, как оператор $\mathcal{L}_{t,a,W}$. Если $(\nabla_{t,a,W;e_i})^*$ — оператор, сопряженный к оператору $\nabla_{t,a,W;e_i}$ по отношению к скалярному произведению $\langle\cdot,\cdot\rangle_{t,0}$, то

$$(\nabla_{t,a,W;e_i})^*=-\nabla_{t,a,W;e_i}-t(\kappa^{-1}(e_i\kappa))(tZ)-2ae_i(f_W)(Z).$$

Используя эти факты, можно легко завершить доказательство. □

Следующий результат является аналогом теоремы 1.9 из [14]. Для его доказательства мы можем дословно повторить доказательство этой теоремы.

Теорема 5. *Для любых* $t \in (0, t_0]$, $\lambda \in \delta$, $m \in \mathbb{N}$, $W \in \mathbb{R}^{2n}$ *и* $|a| < c\sqrt{\mu_0}$ *резольвента* $(\lambda - \mathcal{L}_{t,a,W})^{-1}$ *отображает* H^m_t *в* H^{m+1}_t. *Более того, для любых* $\alpha \in \mathbb{Z}^{2n}_+$ *и* $m \in \mathbb{N}$ *существует такое* $C_{\alpha,m} > 0$, *что для* $t \in (0, t_0]$, $\lambda \in \delta$, $W \in \mathbb{R}^{2n}$ *и* $|a| < c\sqrt{\mu_0}$

$$\left\| Z^\alpha (\lambda - \mathcal{L}_{t,a,W})^{-1} s \right\|_{t,m+1} \leqslant C_{\alpha,m} \sum_{\alpha' \leqslant \alpha} \left\| Z^{\alpha'} s \right\|_{t,m}, \quad s \in C^\infty_c(\mathbb{R}^{2n}, E_{x_0}).$$

§4. Оценки по норме обобщенных проекторов Бергмана

В этом параграфе мы выведем оценки весовых норм обобщенных проекторов Бергмана, ассоциированных с оператором $\mathcal{L}_t$, и их производных произвольного порядка по t.

Обозначим через $\mathcal{P}_{0,t}$ спектральный проектор оператора $\mathcal{L}_t$, соответствующий интервалу $[-C_{L_0} t^2, C_{L_0} t^2]$. Пусть $\mathcal{P}_{q,t}(Z, Z') = \mathcal{P}_{q,t,x_0}(Z, Z')$ — гладкое ядро оператора $\mathcal{P}_{q,t} = (\mathcal{L}_t)^q \mathcal{P}_{0,t}$ по отношению к dv_{TX}. Для любых целых $k > 0$ и $q \geqslant 0$ мы можем написать

$$\mathcal{P}_{q,t} = (\mathcal{L}_t)^q \mathcal{P}_{0,t} = \frac{1}{2\pi i} \binom{q+k-1}{k-1}^{-1} \int_\delta \lambda^{q+k-1} (\lambda - \mathcal{L}_t)^{-k} \, d\lambda.$$

Предложение 3. *Для любых* $t \in (0, t_0]$, $Q, Q' \in \mathcal{Q}^m$, $W \in \mathbb{R}^{2n}$ *и* a, $|a| < c\sqrt{\mu_0}$ *оператор* $Q e^{a f_W} \mathcal{P}_{q,t} e^{-a f_W} Q'$ *продолжается до ограниченного оператора в пространстве* $L^2(\mathbb{R}^{2n}, E_{x_0})$ *с нормой, равномерно ограниченной по* W *и* t.

Доказательство. Прежде всего, мы заметим, что для любых $Q, Q' \in \mathcal{Q}^m$, $W \in \mathbb{R}^{2n}$ и $a \in \mathbb{R}$ оператор $Q e^{a f_W} \mathcal{P}_{q,t} e^{-a f_W} Q'$ корректно определен как оператор из $C^\infty_c(\mathbb{R}^{2n}, E_{x_0})$ в $C^{-\infty}(\mathbb{R}^{2n}, E_{x_0})$.

Из теоремы 5 вытекает, что для любого $Q \in \mathcal{Q}^m$ существует такое $C_m > 0$, что для любых $t \in (0, t_0]$, $\lambda \in \delta$, $W \in \mathbb{R}^{2n}$ и $|a| < c\sqrt{\mu_0}$

$$\| Q (\lambda - \mathcal{L}_{t,a,W})^{-m} \|^{0,0}_t \leqslant C_m.$$

Поскольку $\mathcal{L}_t$ формально самосопряжен по отношению к $\| \cdot \|_{t,0}$, мы имеем $\mathcal{L}^*_{t,a,W} = \mathcal{L}_{t,-a,W}$, поэтому, переходя к сопряженным операторам, мы получаем для всех $t \in (0, t_0]$, $\lambda \in \delta$, $W \in \mathbb{R}^{2n}$ и $|a| < c\sqrt{\mu_0}$

$$\| (\lambda - \mathcal{L}_{t,a,W})^{-m} Q \|^{0,0}_t \leqslant C_m.$$

Таким образом, для любых $Q, Q' \in \mathcal{Q}^m$ существует такое $C_m > 0$, что для всех $t \in (0, t_0]$, $\lambda \in \delta$, $W \in \mathbb{R}^{2n}$ и $|a| < c\sqrt{\mu_0}$

$$\|Q(\lambda - \mathcal{L}_{t,a,W})^{-2m} Q'\|_t^{0,0} \leqslant C_m.$$

Благодаря приведенным выше оценкам желаемое утверждение немедленно следует из формулы

$$\begin{aligned} Q&e^{af_W}\mathcal{P}_{q,t}e^{-af_W}Q' \\ &= \frac{1}{2\pi i}\binom{q+k-1}{k-1}^{-1}\int_\delta \lambda^{q+k-1} Q e^{af_W}(\lambda - \mathcal{L}_t)^{-k} e^{-af_W} Q'\, d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\binom{q+k-1}{k-1}^{-1}\int_\delta \lambda^{q+k-1} Q(\lambda - \mathcal{L}_{t,a,W})^{-k} Q'\, d\lambda \end{aligned}$$

при $k > 2m$, которую можно обосновать по аналогии с тем, как это было сделано для приведенного выше соотношения (10). □

Теорема 6. *Для любых $r \geqslant 1$, $Q, Q' \in \mathcal{Q}^m$ и $a, |a| < c\sqrt{\mu_0}$ существует такое $C > 0$, что для любых $W \in \mathbb{R}^{2n}$ и $t \in (0, t_0]$*

$$\left\| Q e^{af_W} \frac{\partial^r}{\partial t^r}\mathcal{P}_{q,t} e^{-af_W} Q' s \right\|_{t,0} \leqslant C \sum_{|\beta| \leqslant 2r} \|Z^\beta s\|_{t,0}, \quad s \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2n}, E_{x_0}).$$

Доказательство. Воспользуемся формулой

$$e^{af_W}\frac{\partial^r}{\partial t^r}\mathcal{P}_{q,t}e^{-af_W} = \frac{1}{2\pi i}\binom{q+k-1}{k-1}^{-1}\int_\delta \lambda^{q+k-1}\frac{\partial^r}{\partial t^r}(\lambda - \mathcal{L}_{t,a,W})^{-k}\, d\lambda$$

при $k > 2(m + r + 1)$.

Положим

$$I_{k,r} = \Big\{(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = (k_0, \dots, k_j, r_1, \dots, r_j) : \sum_{i=0}^{j} k_i = k, \sum_{i=1}^{j} r_i = r, k_i, r_i \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Тогда можно записать

$$\frac{\partial^r}{\partial t^r}(\lambda - \mathcal{L}_{t,a,W})^{-k} = \sum_{(\mathbf{k},\mathbf{r}) \in I_{k,r}} a_{\mathbf{r}}^{\mathbf{k}} A_{\mathbf{r}}^{\mathbf{k}}(\lambda, t, a, W), \tag{11}$$

где $a_{\mathbf{r}}^{\mathbf{k}}$ — некоторые постоянные и

$$\begin{aligned} A&_{\mathbf{r}}^{\mathbf{k}}(\lambda, t, a, W) \\ &= (\lambda - \mathcal{L}_{t,a,W})^{-k_0}\frac{\partial^{r_1}\mathcal{L}_{t,a,W}}{\partial t^{r_1}}(\lambda - \mathcal{L}_{t,a,W})^{-k_1} \cdots \frac{\partial^{r_j}\mathcal{L}_{t,a,W}}{\partial t^{r_j}}(\lambda - \mathcal{L}_{t,a,W})^{-k_j}. \end{aligned}$$

Теперь мы можем продолжить так же, как в доказательстве [14, теорема 1.10]. Заметим только, что $\nabla_{t,a,W;e_j} = \nabla_{t,e_j} - a\nabla_{e_j} f_W$ и при $r > 0$ мы имеем $\frac{\partial^r}{\partial t^r}\nabla_{t,a,W;e_j} = \frac{\partial^r}{\partial t^r}\nabla_{t,e_j}$. Мы получим, что для любых $Q, Q' \in \mathcal{Q}^m$, $W \in \mathbb{R}^{2n}$ и $a, |a| < c\sqrt{\mu_0}$, существует такое $C > 0$, что для $\lambda \in \delta$ и $t \in (0, t_0]$,

$$\|QA^{\mathbf{k}}_{\mathbf{r}}(\lambda, t, a, W)Q's\|_{t,0} \leqslant C \sum_{|\beta|\leqslant 2r} \|Z^\beta s\|_{t,0}, \quad s \in C^\infty_c(\mathbb{R}^{2n}, E_{x_0}).$$

Это завершает доказательство. □

При помощи похожих рассуждений можно доказать следующую теорему.

Теорема 7. *Для любых $r \geqslant 1$, $Q, Q' \in \mathcal{Q}^m$, $\alpha \in \mathbb{Z}^{2n}_+$ и a, $|a| < c\sqrt{\mu_0}$, существует такое $C > 0$, что для любых $W \in \mathbb{R}^{2n}$ и $t \in (0, t_0]$*

$$\|QZ^\alpha e^{af_W} \frac{\partial^r}{\partial t^r}\mathcal{P}_{q,t} e^{-af_W} Q's\|_{t,0} \leqslant C \sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|+2r} \|Z^\beta s\|_{t,0}, \quad s \in C^\infty_c(\mathbb{R}^{2n}, E_{x_0}).$$

§5. Асимптотические разложения и доказательства основных результатов

В этом параграфе мы завершим доказательство основной теоремы. Сначала напомним, что согласно [14, теорема 1.11] для любого

$$s \in C^\infty_c(\mathbb{R}^{2n}, E_{x_0})$$

существует предел $\frac{\partial^r}{\partial t^r}\mathcal{P}_{q,t}s$ при $t \to 0$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^{2n}, E_{x_0})$, который задается формулой

$$\lim_{t\to 0} \frac{\partial^r}{\partial t^r}\mathcal{P}_{q,t}s = F_{q,r}s,$$

где $F_{q,r} = F_{q,r,x_0}$ — сглаживающий оператор в $L^2(\mathbb{R}^{2n}, E_{x_0})$, задаваемый формулой

$$F_{q,r} = \frac{1}{2\pi i}\begin{pmatrix} q+k-1 \\ k-1 \end{pmatrix}^{-1} \int\limits_\delta \lambda^{q+k-1} \sum_{(\mathbf{k},\mathbf{r})\in I_{k,r}} a^{\mathbf{k}}_{\mathbf{r}} A^{\mathbf{k}}_{\mathbf{r}}(\lambda, 0)\, d\lambda$$

при достаточно большом k, и

$$A^{\mathbf{k}}_{\mathbf{r}}(\lambda, 0) = (\lambda - \mathcal{L}_0)^{-k_0} \frac{\partial^{r_1}\mathcal{L}_t}{\partial t^{r_1}}(0)(\lambda - \mathcal{L}_0)^{-k_1} \cdots \frac{\partial^{r_j}\mathcal{L}_t}{\partial t^{r_j}}(0)(\lambda - \mathcal{L}_0)^{-k_j}.$$

Заметим, что оценки в теореме 7 равномерны по t вплоть до $t = 0$, откуда немедленно вытекает, что такое же утверждение справедливо для предельного значения $t = 0$. Мы заключаем, что для любых $r \geqslant 1$, $Q, Q' \in$

$\mathcal{Q}^m$, $\alpha\in\mathbb{Z}^{2n}_+$ и $a, |a|<c\sqrt{\mu_0}$, существует такое $C>0$, что для любого $W\in\mathbb{R}^{2n}$ мы имеем

$$\|QZ^\alpha e^{af_W}F_{q,r}e^{-af_W}Q's\|_{0,0}\leqslant C\sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|+2r}\|Z^\beta s\|_{0,0},\quad s\in C^\infty_c(\mathbb{R}^{2n},E_{x_0}). \tag{12}$$

Для любых q и j положим

$$R^{(j)}_{q,t}=P_{q,t}-\sum_{r=0}^{j}F_{q,r}t^r,\quad t>0.$$

Теорема 8. *Для любых $Q,Q'\in\mathcal{Q}^m$, $\alpha\in\mathbb{Z}^{2n}_+$ и $a, |a|<c\sqrt{\mu_0}$, существует такое $C>0$, что для любых $W\in\mathbb{R}^{2n}$ и $t\in[0,t_0]$,*

$$\left\|QZ^\alpha e^{af_W}R^{(j)}_{q,t}e^{-af_W}Q's\right\|_{t,0}\leqslant Ct^{j+1}\sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|+2j+2}\|Z^\beta s\|_{t,0},\quad s\in C^\infty_c(\mathbb{R}^{2n},E_{x_0}).$$

Доказательство. Данное утверждение немедленно следует из формулы Тейлора

$$\mathcal{P}_{q,t}-\sum_{r=0}^{j}\frac{1}{r!}F_{q,r}t^r=\frac{1}{j!}\int_0^t(t-\tau)^j\frac{\partial^{j+1}\mathcal{P}_{q,t}}{\partial t^{j+1}}(\tau)\,d\tau,\quad t\in[0,1],$$

и оценок (12). □

Теорема 9. *Для любых $j,m,m'\in\mathbb{N}$, $j\geqslant 2q$, существуют такие $C>0$ и $M>0$, что для любых $0\leqslant t\leqslant 1$ и $Z,Z'\in T_{x_0}X$*

$$\sup_{|\alpha|+|\alpha'|\leqslant m}\left|\frac{\partial^{|\alpha|+|\alpha'|}}{\partial Z^\alpha\partial Z'^{\alpha'}}\left(\mathcal{P}_{q,t}(Z,Z')-\sum_{r=2q}^{j}F_{q,r}(Z,Z')t^r\right)\right|_{\mathcal{C}^{m'}(X)}$$
$$\leqslant Ct^{j+1}(1+|Z|+|Z'|)^M\exp(-c\sqrt{\mu_0}|Z-Z'|)+\mathcal{O}(t^\infty). \tag{13}$$

Доказательство. Для $M\in\mathbb{N}$ пусть $\mathcal{D}^M$ — множество дифференциальных операторов в $\mathbb{R}^{2n}$ вида $\nabla_{e_{i_1}}\ldots\nabla_{e_{i_j}}$ с $j\leqslant M$. Мы утверждаем, что для любых $j\geqslant 2q$, $D,D'\in\mathcal{D}^M$ и для любого $a, |a|<c\sqrt{\mu_0}$ существует такое $C>0$, что для любого $0\leqslant t\leqslant 1$

$$\|De^{af_W}R^{(j)}_{q,t}e^{-af_W}D's\|_{t,0}\leqslant Ct^{j+1}\sum_{|\beta|\leqslant 2j+2M+2}\|Z^\beta s\|_{t,0}. \tag{14}$$

Чтобы доказать (14), мы сначала отметим, что любой оператор $D\in\mathcal{D}^M$ может быть записан в виде

$$D=\sum_\alpha A_\alpha Q_\alpha,$$

где $Q_\alpha \in \mathcal{Q}^M$ и $A_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \operatorname{End}(E_{x_0}))$ удовлетворяет следующему условию: для любого $\beta \in \mathbb{Z}_+^{2n}$ существует такое $C_\beta > 0$, что

$$|\nabla_{e_1}^{\beta_1} \dots \nabla_{e_{2n}}^{\beta_{2n}} A_\alpha(Z)| < C_\beta (1+|Z|)^M, \quad Z \in \mathbb{R}^{2n}. \tag{15}$$

Аналогично, любой оператор $D' \in \mathcal{D}^M$ может быть записан в виде

$$D' = \sum_{\alpha'} Q'_{\alpha'} A'_{\alpha'},$$

где $Q'_{\alpha'} \in \mathcal{Q}^M$ и $A'_{\alpha'} \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \operatorname{End}(E_{x_0}))$ удовлетворяет (15).

Тогда мы имеем

$$\big\| D e^{af_W} R_{q,t}^{(j)} e^{-af_W} D' s \big\|_{t,0} \leqslant \sum_{\alpha,\alpha'} \big\| A_\alpha Q_\alpha e^{af_W} R_{q,t}^{(j)} e^{-af_W} Q'_{\alpha'} A'_{\alpha'} s \big\|_{t,0}.$$

Для каждого слагаемого, стоящего в правой части последнего неравенства, мы получаем

$$\begin{aligned}
\big\| A_\alpha Q_\alpha e^{af_W} R_{q,t}^{(j)} e^{-af_W} Q'_{\alpha'} A'_{\alpha'} s \big\|_{t,0} &\leqslant C \big\| (1+|Z|)^m Q_\alpha e^{af_W} R_{q,t}^{(j)} e^{-af_W} Q'_{\alpha'} A'_{\alpha'} s \big\|_{t,0} \\
&\leqslant C t^{j+1} \sum_{|\beta| \leqslant 2j+M+2} \| Z^\beta A'_{\alpha'} s \|_{t,0} \\
&\leqslant C t^{j+1} \sum_{|\beta| \leqslant 2j+2M+2} \| Z^\beta s \|_{t,0},
\end{aligned}$$

что завершает доказательство (14).

Пусть $H^m(\mathbb{R}^{2n}, E_{x_0})$ обозначает обычное пространство Соболева в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ с нормой

$$\|u\|_{H^m(\mathbb{R}^{2n}, E_{x_0})} = \bigg(\int_{\mathbb{R}^{2n}} (1+|\xi|^2)^{m/2} |\hat{u}(\xi)|^2 \bigg)^{1/2},$$

$\hat{u}$ — преобразование Фурье функции u. Из оценки (14) следует, что для любых $m, m' \in \mathbb{R}$ и $a, |a| < c\sqrt{\mu_0}$ существуют такие $M \in \mathbb{N}$ и $C > 0$, что для любых $0 < t \leqslant 1$ и $s \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2n}, E_{x_0})$

$$\| e^{af_W} R_{q,t}^{(j)} e^{-af_W} s \|_{H^m(\mathbb{R}^{2n}, E_{x_0})} \leqslant C t^{j+1} \sum_{|\beta| \leqslant M} \| Z^\beta s \|_{H^{m'}(\mathbb{R}^{2n}, E_{x_0})}.$$

В частности, для любого $s \in H^{m'}(\mathbb{R}^{2n}, E_{x_0})$ с $\operatorname{supp} s \subset B(0,\sigma)$ при некотором $\sigma > 0$ мы имеем

$$\| e^{af_W} R_{q,t}^{(j)} e^{-af_W} s \|_{H^m(\mathbb{R}^{2n}, E_{x_0})} \leqslant C t^{j+1} (1+\sigma)^M \| s \|_{H^{m'}(\mathbb{R}^{2n}, E_{x_0})}. \tag{16}$$

Для любого $v \in E_{x_0}$ рассмотрим дельта-функцию $\delta_0^v \in C^{-\infty}(\mathbb{R}^{2n}, E_{x_0})$, определяемую формулой $\langle \delta_0^v, s \rangle = \langle v, s(0) \rangle_{h^{E_{x_0}}}$ для $s \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2n}, E_{x_0})$.

Пусть $\delta^v_{Z'} \in C^{-\infty}(\mathbb{R}^{2n}, E_{x_0})$ — дельта-функция в точке $Z' \in \mathbb{R}^{2n}$: $\delta^v_{Z'}(Z) = \delta^v_0(Z - Z')$. Тогда $\delta^v_{Z'} \in H^{-(n+1)}(\mathbb{R}^{2n}, E_{x_0})$ с нормой, равномерно ограниченной по Z' и v с $|v|_{h^{E_{x_0}}} = 1$ (на самом деле, не зависящей от Z'). Мы можем написать

$$\frac{\partial^{|\alpha'|}}{\partial Z'^{\alpha'}} \left(e^{af_W(Z)} R^{(j)}_{q,t}(Z, Z') e^{-af_W(Z')} v\right) = \left(e^{af_W} R^{(j)}_{q,t} e^{-af_W} D'_{\alpha'} \delta^v_{Z'}\right)(Z)$$

с некоторыми $D'_{\alpha'} \in \mathcal{D}^m$. Поэтому, мы получаем

$$\begin{aligned}
\sup_{|\alpha|+|\alpha'|\leqslant m} &\left| \frac{\partial^{|\alpha|+|\alpha'|}}{\partial Z^\alpha \partial Z'^{\alpha'}} \left(e^{af_W(Z)} R^{(j)}_{q,t}(Z, Z') e^{-af_W(Z')} v\right) \right| \\
&\leqslant C \sup_{|\alpha'|\leqslant m} \left\| \frac{\partial^{|\alpha'|}}{\partial Z'^{\alpha'}} \left(e^{af_W(Z)} R^{(j)}_{q,t}(Z, Z') e^{-af_W(Z')} v\right) \right\|_{C^m_b(\mathbb{R}^{2n}, E_{x_0})} \\
&\qquad = C \sum_{\alpha'} \left\| e^{af_W} R^{(j)}_{q,t} e^{-af_W} D'_{\alpha'} \delta^v_{Z'} \right\|_{C^m_b(\mathbb{R}^{2n}, E_{x_0})}.
\end{aligned}$$

По теореме вложения Соболева $H^M(\mathbb{R}^{2n}, E_{x_0}) \hookrightarrow C^m_b(\mathbb{R}^{2n}, E_{x_0})$ при $M = m+n+1$. Поэтому, используя (16), мы получаем для $|Z'| \leqslant \sigma$ с произвольным $\sigma > 0$,

$$\begin{aligned}
&\left\| e^{af_W} R^{(j)}_{q,t} e^{-af_W} D'_{\alpha'} \delta^v_{Z'} \right\|_{C^m_b(\mathbb{R}^{2n}, E_{x_0})} \\
&\qquad \leqslant C \left\| e^{af_W} R^{(j)}_{q,t} e^{-af_W} D'_{\alpha'} \delta^v_{Z'} \right\|_{H^{m+n+1}(\mathbb{R}^{2n}, E_{x_0})} \\
&\qquad \leqslant C t^{j+1} (1+\sigma)^{2j+2m+2n+4} \|\delta^v_{Z'}\|_{H^{-(m+n+1)}(\mathbb{R}^{2n}, E_{x_0})}.
\end{aligned}$$

Полагая $W = Z'$, мы получаем

$$\sup_{|\alpha|+|\alpha'|\leqslant m} \left| \frac{\partial^{|\alpha|+|\alpha'|}}{\partial Z^\alpha \partial Z'^{\alpha'}} \left(e^{af_{Z'}(Z)} R^{(j)}_{q,t}(Z, Z')\right) \right| \leqslant C t^{j+1} (1+\sigma)^{2j+2m+2n+4}$$

и

$$\begin{aligned}
\sup_{|\alpha|+|\alpha'|\leqslant m} \left| \frac{\partial^{|\alpha|+|\alpha'|}}{\partial Z^\alpha \partial Z'^{\alpha'}} R^{(j)}_{q,t}(Z, Z') \right| &\leqslant C t^{j+1} (1+\sigma)^{2j+2m+2n+4} e^{-af_{Z'}(Z)} \\
&\leqslant C t^{j+1} (1+|Z'|)^{2j+2m+2n+4} e^{-a|Z-Z'|},
\end{aligned}$$

что завершает доказательство в случае $m' = 0$.

Чтобы рассмотреть случай $m' \geqslant 1$, мы поступим так же, как в доказательстве [14, теорема 1.10]. Для любого вектора $U \in T_{x_0}X$ справедлива следующая формула:

$$\nabla_U \mathcal{P}_{q,t} = (\mathcal{L}_t)^q \mathcal{P}_{0,t} = \frac{1}{2\pi i} \binom{q+k-1}{k-1}^{-1} \int\limits_{\delta} \lambda^{q+k-1} \nabla_U (\lambda - \mathcal{L}_t)^{-k}\, d\lambda.$$

Оператор $\nabla_U(\lambda - \mathcal{L}_t)^{-k}$ задается формулой, аналогичной формуле (11). Далее мы заметим, что $\nabla_U \mathcal{L}_t$ является дифференциальным оператором в $T_{x_0}X$ такой же структуры, что и оператор $\mathcal{L}_t$. Это позволяет нам распространить все наши рассуждения на случай произвольного $m' \geqslant 1$. $\square$

Чтобы завершить доказательство теоремы 1, мы заметим, что согласно (5),

$$P^0_{q,p}(Z,Z') = t^{-2n-2q} \kappa^{-\frac{1}{2}}(Z) \mathcal{P}_{q,t}(Z/t, Z'/t) \kappa^{-\frac{1}{2}}(Z'), \quad Z, Z' \in \mathbb{R}^{2n},$$

и воспользуемся предложением 1. Заметим, что согласно [14, теорема 1.18] мы имеем $F_{q,r} = 0$ при $q > 0$, $r < 2q$.

§6. Операторы Теплица

В этом параграфе мы построим алгебру операторов Теплица, ассоциированных с ренормализованным лапласианом Бохнера на симплектическом многообразии X. Доказательства результатов этого параграфа получаются дословным повторением рассуждений работы [15]. Поэтому мы только приведем основные определения и формулировки основных результатов. Как упоминалось во введении, алгебра операторов Теплица, ассоциированных с ренормализованным лапласианом Бохнера, была также построена в работе [8].

Определение 1. Оператором Теплица называется последовательность $\{T_p\} = \{T_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ ограниченных линейных операторов $T_p : L^2(X, L^p \otimes E) \to L^2(X, L^p \otimes E)$, удовлетворяющих следующим условиям:

(i): Для любого $p \in \mathbb{N}$ мы имеем

$$T_p = P_{\mathcal{H}_p} T_p P_{\mathcal{H}_p}.$$

(ii): Существует такая последовательность $g_l \in C^\infty(X, \operatorname{End}(E))$, что

$$T_p = P_{\mathcal{H}_p} \biggl(\sum_{l=0}^{\infty} p^{-l} g_l \biggr) P_{\mathcal{H}_p} + \mathcal{O}(p^{-\infty}),$$

т.е. для любого натурального k существует такое $C_k > 0$, что

$$\biggl\| T_p - P_{\mathcal{H}_p} \biggl(\sum_{l=0}^{k} p^{-l} g_l \biggr) P_{\mathcal{H}_p} \biggr\| \leqslant C_k p^{-k-1}.$$

Полным символом оператора $\{T_p\}$ является формальный ряд $\sum_{l=0}^{\infty}\hbar^l g_l\in C^\infty(X,\operatorname{End}(E))[[\hbar]]$ и главным символом оператора $\{T_p\}$ — функция g_0.

В частном случае, когда $g_l=0$ при $l\geqslant 1$ и $g_0=f$, мы получаем оператор $T_{f,p}=P_{\mathcal{H}_p}fP_{\mathcal{H}_p}:L^2(X,L^p\otimes E)\to L^2(X,L^p\otimes E)$. Ядро Шварца оператора $T_{f,p}$ задается формулой

$$T_{f,p}(x,x')=\int\limits_X P_p(x,x'')f(x'')P_p(x'',x')\,dv_X(x'').$$

Лемма 1. *Для любых $\varepsilon>0$ и $l,m\in\mathbb{N}$ существует такое $C>0$, что для любых $p\geqslant 1$ и $(x,x')\in X\times X$ с $d(x,x')>\varepsilon$*

$$|T_{f,p}(x,x')|_{C^m}\leqslant Cp^{-l}.$$

Пусть $\{\Xi_p\}$ — последовательность линейных операторов $\Xi_p:L^2(X,L^p\otimes E)\to L^2(X,L^p\otimes E)$ с гладким ядром $\Xi_p(x,x')$ по отношению к dv_X. Как описано во введении, $\Xi_p(x,x')$ индуцирует гладкое сечение $\Xi_{p,x_0}(Z,Z')$ векторного расслоения $\pi^*(\operatorname{End}(E))$ на $TX\times_X TX$, определенное для всех $x_0\in X$ и $Z,Z'\in T_{x_0}X$ с $|Z|,|Z'|<a_X$. Напомним, что $\mathcal{P}=\mathcal{P}_{x_0}$ обозначает ядро Бергмана в $\mathbb{R}^{2n}$, определяемое формулой (1).

Определение 2. Скажем, что

$$p^{-n}\Xi_{p,x_0}(Z,Z')\cong\sum_{r=0}^{k}(Q_{r,x_0}\mathcal{P}_{x_0})\big(\sqrt{p}Z,\sqrt{p}Z'\big)p^{-\frac{r}{2}}+\mathcal{O}\big(p^{-\frac{k+1}{2}}\big)$$

с некоторыми $Q_{r,x_0}\in\operatorname{End}(E_{x_0})[Z,Z']$, $0\leqslant r\leqslant k$, зависящими гладко от $x_0\in X$, если существуют $\varepsilon'\in(0,a_X]$ и $C_0>0$ со следующим свойством: для любого $l\in\mathbb{N}$ существуют такие $C>0$ и $M>0$, что для любых $x_0\in X$, $p\geqslant 1$ и $Z,Z'\in T_{x_0}X$, $|Z|,|Z'|<\varepsilon'$, мы имеем

$$\begin{aligned}&\Big|p^{-n}\Xi_{p,x_0}(Z,Z')\kappa^{\frac12}(Z)\kappa^{\frac12}(Z')-\sum_{r=0}^{k}(Q_{r,x_0}\mathcal{P}_{x_0})(\sqrt{p}Z,\sqrt{p}Z')p^{-\frac{r}{2}}\Big|_{\mathcal{C}^l(X)}\\&\qquad\leqslant Cp^{-\frac{k+1}{2}}\big(1+\sqrt{p}|Z|+\sqrt{p}|Z'|\big)^M\exp\big(-\sqrt{C_0p}|Z-Z'|\big)+\mathcal{O}(p^{-\infty}).\end{aligned}$$

По теореме 1 для любого $k\in\mathbb{N}$ мы имеем

$$p^{-n}P_{p,x_0}(Z,Z')\cong\sum_{r=0}^{k}(F_{0,r,x_0}\mathcal{P}_{x_0})(\sqrt{p}Z,\sqrt{p}Z')p^{-\frac{r}{2}}+\mathcal{O}(p^{-\frac{k+1}{2}}).$$

Для любого многочлена $F\in\mathbb{C}[Z,Z']$ рассмотрим оператор $F\mathcal{P}$ в пространстве $L^2(T_{x_0}X)\cong L^2(\mathbb{R}^{2n})$ с ядром $(F\mathcal{P})(Z,Z')$ по отношению к мере dZ. Для любых многочленов $F,G\in\mathbb{C}[Z,Z']$ определим многочлен

$\mathcal{K}[F,G] \in \mathbb{C}[Z,Z']$ при помощи условия

$$((F\mathcal{P}) \circ (G\mathcal{P}))(Z,Z') = (\mathcal{K}[F,G]\mathcal{P})(Z,Z'),$$

где $(F\mathcal{P}) \circ (G\mathcal{P})$ — композиция операторов $F\mathcal{P}$ и $G\mathcal{P}$ в пространстве $L^2(T_{x_0}X)$.

Лемма 2. *Пусть $f \in C^\infty(X, \mathrm{End}(E))$. Для любых $k \in \mathbb{N}$, $x_0 \in X$, $Z, Z' \in T_{x_0}X$, $|Z|, |Z'| < \varepsilon/2$, мы имеем*

$$p^{-n} T_{f,p,x_0}(Z,Z') \cong \sum_{r=0}^{k} (Q_{r,x_0}(f)\mathcal{P}_{x_0})(\sqrt{p}Z, \sqrt{p}Z')p^{-\frac{r}{2}} + \mathcal{O}(p^{-\frac{k+1}{2}}),$$

где многочлены $Q_{r,x_0}(f) \in \mathrm{End}(E_{x_0})[Z,Z']$ имеют ту же четность, что число r, и задаются формулой

$$Q_{r,x_0}(f) = \sum_{r_1+r_2+|\alpha|=r} \mathcal{K}\Big[F_{0,r_1,x_0}, \frac{\partial^\alpha f_{x_0}}{\partial Z^\alpha}(0)\frac{Z^\alpha}{\alpha!}F_{0,r_2,x_0}\Big].$$

В частности,

$$Q_{0,x_0}(f) = f(x_0),$$
$$Q_{1,x_0}(f) = f(x_0)F_{0,1,x_0} + \mathcal{K}\Big[F_{0,0,x_0}, \frac{\partial f_{x_0}}{\partial Z_j}(0)Z_j F_{0,0,x_0}\Big].$$

Имеет место следующий критерий операторов Теплица.

Теорема 10. *Семейство $\{T_p : L^2(X, L^p \otimes E) \to L^2(X, L^p \otimes E)\}$ ограниченных линейных операторов является оператором Теплица тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет следующим трем условиям:*

(i): *Для любого $p \in \mathbb{N}$*

$$T_p = P_{\mathcal{H}_p} T_p P_{\mathcal{H}_p}.$$

(ii): *Для любых $\varepsilon_0 > 0$ и $l \in \mathbb{N}$ существует такое $C > 0$, что для любых $p \geqslant 1$ и $(x,x') \in X \times X$ с $d(x,x') > \varepsilon_0$*

$$|T_{f,p}(x,x')| \leqslant Cp^{-l}.$$

(iii): *Существуют семейство многочленов $\mathcal{Q}_{r,x_0} \in \mathrm{End}(E_{x_0})[Z,Z']$, зависящих гладко от x_0, той же четности, что и число r, и $\varepsilon' \in (0, a_X/4)$ такие, что для любых $k \in \mathbb{N}$, $x_0 \in X$, $Z, Z' \in T_{x_0}X$, $|Z|, |Z'| < \varepsilon'$,*

$$p^{-n} T_{p,x_0}(Z,Z') \cong \sum_{r=0}^{k} (\mathcal{Q}_{r,x_0}\mathcal{P}_{x_0})(\sqrt{p}Z, \sqrt{p}Z')p^{-\frac{r}{2}} + \mathcal{O}(p^{-\frac{k+1}{2}}).$$

Используя этот критерий, можно показать, что множество операторов Теплица является алгеброй.

Теорема 11. *Пусть* $f, g \in C^\infty(X, \mathrm{End}(E))$. *Тогда композиция операторов Теплица* $T_{f,p}$ *и* $T_{g,p}$ *является оператором Теплица. Точнее, она допускает асимптотическое разложение*

$$T_{f,p}T_{g,p} = \sum_{r=0}^{\infty} p^{-r} T_{C_r(f,g),p} + \mathcal{O}(p^{-\infty}),$$

с некоторыми $C_r(f,g) \in C^\infty(X, \mathrm{End}(E))$, *где* C_r *— бидифференциальные операторы. В частности,* $C_0(f,g) = fg$ *и для* $f, g \in C^\infty(X)$,

$$C_1(f,g) - C_1(f,g) = i\{f,g\},$$

где $\{f,g\}$ *— скобка Пуассона на* $(X, 2\pi\omega)$.

Список литературы

[1] Меладзе Г. А., Шубин М. А., *Собственные равномерные псевдодифференциальные операторы на унимодулярных группах Ли*, Тр. семин. им. И. Г. Петровского **11** (1986), 74-97.

[2] Меладзе Г. А., Шубин М. А., *Функциональное исчисление псевдодифференциальных операторов на унимодулярных группах Ли*, Тр. семин. им. И. Г. Петровского **12** (1987), 164–200.

[3] Bismut J.-M., Vasserot E., *The asymptotics of the Ray-Singer analytic torsion associated with high powers of a positive line bundle*, Comm. Math. Phys. **125** (1989), 355–367.

[4] Borthwick D., Uribe A., *Almost complex structures and geometric quantization*, Math. Res. Lett. **3** (1996), 845–861.

[5] Braverman M., *Vanishing theorems on covering manifolds*, Tel Aviv Topology Conference: Rothenberg Festschrift (1998), Contemp. Math., vol. 231, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 1–23.

[6] Dai X., Liu K., Ma X., *On the asymptotic expansion of Bergman kernel*, J. Differential Geom. **72** (2006), no. 1, 1–41.

[7] Guillemin V., Uribe A., *The Laplace operator on the nth tensor power of a line bundle: eigenvalues which are uniformly bounded in n*, Asymptotic Anal. **1** (1988), no. 2, 105–113.

[8] Ioos L., Lu W., Ma X., Marinescu G., *Berezin-Toeplitz quantization for eigenstates of the Bochner-Laplacian on symplectic manifolds*, preprint arXiv:1703.06420.

[9] Kordyukov Yu. A., *L^p-theory of elliptic differential operators on manifolds of bounded geometry*, Acta Appl. Math. **23** (1991), no. 3, 223–260.

[10] Kordyukov Yu. A., *L^p-estimates for functions of elliptic operators on manifolds of bounded geometry*, Russ. J. Math. Phys. **7** (2000), no. 2, 216–229.

[11] Lu W., Ma X., Marinescu G., *Donaldson's Q-operators for symplectic manifolds*, Sci. China Math. **60** (2017), no. 6, 1047–1056.

[12] Ma X., Marinescu G., *The* Spin^c *Dirac operator on high tensor powers of a line bundle*, Math. Z. **240** (2002), no. 3, 651–664.

[13] Ma X., Marinescu G., *Holomorphic Morse inequalities and Bergman kernels*, Progr. Math., vol. 254, Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.
[14] Ma X., Marinescu G., *Generalized Bergman kernels on symplectic manifolds*, Adv. Math. **217** (2008), no. 4, 1756–1815.
[15] Ma X., Marinescu G., *Toeplitz operators on symplectic manifolds*, J. Geom. Anal. **18** (2008), no. 2, 565–611.

Институт математики
с вычислительным центром
Уфимского федерального
исследовательского
центра РАН
ул. Чернышевского, 112,
450008, Уфа, Россия
E-mail: yurikor@matem.anrb.ru

Поступило 28 июля 2017 г.