

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Сенченко, Финальная σ -алгебра неоднородной марковской цепи с конечным числом состояний,
Матем. заметки, 1972, том 12, выпуск 3, 295–302

<https://www.mathnet.ru/mzm9882>

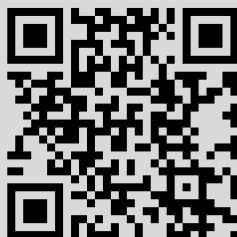
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.88

23 апреля 2025 г., 21:11:58



ФИНАЛЬНАЯ σ -АЛГЕБРА НЕОДНОРОДНОЙ МАРКОВСКОЙ ЦЕПИ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ

Д. В. Сенченко

Доказано, что финальная σ -алгебра в случае неоднородной марковской цепи с конечным числом состояний n порождается конечным числом ($\leq n$) атомов. Атомы охарактеризованы с точки зрения поведения траекторий цепи. Даны достаточные условия (в случае счетного числа состояний) существования единственного атома на бесконечности. Библ. 3 назв.

Введение. Рассмотрим неоднородную марковскую цепь $x(t)$, $t = 0, 1, 2, \dots, m, \dots$, с конечным числом состояний n и переходной функцией $p_{ij}(s, t)$. Пусть $N_{[t, \infty)}$ — минимальная σ -алгебра, индуцированная цепью за время $[t, \infty)$, $N = \bigcap_t N_{[t, \infty)}$ — финальная σ -алгебра, P_{ti} — меры на $N_{[t, \infty)}$ индуцированные цепью (т. е. условные распределения при условии $x(t) = i$). Множество B , $B \in N$, мы назовем нулевым, если $P_{ti}(B) = 0$ при всех t и i . Множество $B \in N$ назовем почти наверное атомом (п. н. атомом), если B ненулевое и не распадается на сумму двух ненулевых непересекающихся множеств. Известно (см., например, [1]), что в случае однородной марковской цепи с конечным числом состояний траектория цепи, начиная с некоторого момента, попадает в одно из конечного числа замкнутых подмножеств состояний цепи (это — атом). В случае неоднородной цепи $x(t)$ верен аналогичный факт, если рассматривать траекторию по некоторой неслучайной подпоследовательности моментов времени. В работе показано, что любое ненулевое N -измеримое множество совпадает с точностью до почти наверное по любой мере P_{ti} с объединением конечного числа ($\leq n$)

п. н. атомов. Можно разбить пространство состояний E на подмножества E_j и найти последовательность $\{t_k\}$, $t_k \rightarrow \infty$, таким образом, что каждый из п. н. атомов совпадает п. н. с одним из событий:

$$\bigcup_l \bigcap_{k>l} x(t_k) \in E_j.$$

Даны также достаточные условия для «полного перемешивания на бесконечности», т. е. для того, чтобы σ -алгебра состояла из одного п. н. атома. Достаточные условия для «перемешивания» даются для случая счетного числа состояний.

§ 1. ТЕОРЕМА 1. σ -алгебра N содержит не больше n попарно непересекающихся ненулевых множеств.

Доказательство. Так как цепь $x(t)$ марковская, то при $A \in N$

$$P_{si}(A/N_{[s,t]}) = P_{tx(t)}(A), \text{ п. н. } P_{si}, \quad (1)$$

где $N_{[s,t]}$ — σ -алгебра, индуцированная цепью за время $[s, t]$. Переходя в равенстве (1) к пределу при $t \rightarrow \infty$ и пользуясь сходимостью мартингалов [2], получим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{tx(t)}(A) = P_{si}(A/N_{[s,\infty)}) = \chi(A), \text{ п. н. } P_{si}, \quad (2)$$

где $\chi(A)$ — характеристическая функция множества A . Если A — ненулевое, то из (2) и конечности числа состояний цепи следует, что существует некоторое состояние j и подпоследовательность $\{t_k\}$ последовательности $\{t\} = 0, 1, 2, \dots, m, \dots$ такие, что

$$\lim_{t_k \rightarrow \infty} P_{t_k j}(A) = 1. \quad (3)$$

Рассмотрим линейную оболочку, натянутую на множество вектор-функций вида

$$P_t(A) = \{P_{t1}(A), P_{t2}(A), \dots, P_{tn}(A)\}, \quad A \in N,$$

и покажем, что попарно непересекающимся ненулевым множествам A_1, A_2, \dots, A_l соответствуют линейно независимые вектор-функции

$$P_t(A_1), P_t(A_2), \dots, P_t(A_l).$$

Выше было показано, что существует состояние j и последовательность $\{t_k\}$ такие, что $\lim_{t_k \rightarrow \infty} P_{t_k j}(A_1) = 1$. Так как A_2, A_3, \dots, A_l не пересекаются с A_1 , то $\lim_{t_k \rightarrow \infty} P_{t_k j}(A_r) = 0$ при $2 \leq r \leq l$. Поэтому в равенстве

$$c_1 P_t(A_1) + c_2 P_t(A_2) + \dots + c_l P_t(A_l) \equiv 0,$$

$c_1 = 0$, аналогично проверяется, что $c_2 = 0, \dots, c_l = 0$. Для доказательства теоремы остается показать, что существует не больше n линейно независимых вектор-функций. Пусть при фиксированном s базис линейной оболочки векторов вида

$$P_s(A) = \{P_{s_1}(A), P_{s_2}(A), \dots, P_{s_n}(A)\}, \quad A \in N,$$

содержит $k(s)$ ($k(s) \leq n$) векторов. Из марковского свойства

$$P_{s_i}(A) = \sum_{j=1}^n p_{ij}(s, t) P_{t_j}(A) \quad (4)$$

следует, что $k(s)$ не убывает при $s \rightarrow \infty$. Так как $k(s) \leq n$, то, начиная с некоторого s_0 , $k(s)$ остается постоянным, $k(s) = k$ при $s \geq s_0$. Если $\{P_{s_0}(A_r), r = 1, 2, \dots, k\}$ — базис указанного пространства векторов в момент s_0 , то $\{P_t(A_r), r = 1, 2, \dots, k\}$ остается в силу (4) базисом при любом $t \geq s_0$. Применяя опять марковское свойство (4), находим, что в разложении

$$P_t(A) = c_1^t P_t(A_1) + c_2^t P_t(A_2) + \dots + c_k^t P_t(A_k), \quad A \in N,$$

константы $c_1^t, c_2^t, \dots, c_k^t$ можно считать не зависящими от t . Это показывает, что существует не больше k ($k \leq n$) линейно независимых вектор-функций, и теорема тем самым доказана.

Утверждение теоремы 1 аналогично лемме 2 из [3], где рассматривался неоднородный непрерывный справа марковский процесс с конечным числом состояний и изучалась σ -алгебра, индуцированная процессом слева от точки накопления скачков.

Из теоремы 1 следует, что существуют п. н. атомы

$$A_1, A_2, \dots, A_k \quad (k \leq n)$$

такие, что их объединение дает пространство элементарных событий и любое N -измеримое множество является или нулевым или отличается на нулевое от объединения некоторого числа из атомов A_1, A_2, \dots, A_h . Так как число состояний конечно, то в силу (3) для каждого п. н. атома A можно найти некоторое подмножество $I = I(A)$ пространства состояний и подпоследовательность $\{s_m\}$ такие, что

$$\lim_{s_m \rightarrow \infty} P_{s_m i}(A) = 1, \quad i \in I, \quad (5)$$

но $P_{s_m i}(A) < \alpha < 1$, если $i \notin I$. Очевидно, в (2), (3) можно заменить последовательность $\{t\}$ на любую подпоследовательность $\{t'\}$, считая теперь $\{t_k\}$ подпоследовательностью $\{t'\}$. Это дает возможность для конечного числа п. н. атомов A_1, A_2, \dots, A_h выбрать единую подпоследовательность $\{s_m\}$ и единое число α в (5). Очевидно,

$$I(A_i) \cap I(A_j) = \phi.$$

ТЕОРЕМА 2. *Существует последовательность $\{s_m\}$ и разбиение пространства состояний*

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_j + \dots + E_h$$

такие, что каждый п. н. атом $A_j, 1 \leq j \leq h$, с точностью до п. н. по любой мере P_{s_i} совпадает с множеством

$$\bigcup_l \bigcap_{m>l} x(s_m) \in E_j.$$

Доказательство. Докажем сначала, что каждый п. н. атом A с точностью до почти наверное совпадает с множеством

$$A' = \bigcup_l \bigcap_{m>l} x(s_m) \in I,$$

$$I = I(A) \quad \text{и} \quad \{s_m\}$$

определены в (5). По марковскому свойству имеем

$$P_{s_i}(A, \bigcap_{r \geq m > l} x(s_r) \in I) =$$

$$= \sum_{j \in I} P_{s_i}(\bigcap_{r > m > l} x(s_r) \in I, x(s_r) = j) P_{s_r j}(A).$$

Переходя к пределу при $r \rightarrow \infty$ и принимая во внимание (5), получаем

$$P_{si}(A, \bigcap_{m>l} x(s_m) \in I) = P_{si}(\bigcap_{m>l} x(s_m) \in I).$$

Отсюда получаем при $l \rightarrow \infty$

$$P_{si}(AA') = P_{si}(A'). \quad (6)$$

Аналогично из (5) и марковского свойства следует

$$P_{si}(A, \bigcup_{r \geq m > l} x(s_m) \in \bar{I}) \leq \alpha P_{si}(\bigcup_{r \geq m \geq l} x(s_m) \in \bar{I}).$$

Переходя к пределу сначала по r , а затем по l , получим

$$P_{si}(A\bar{A}') \leq \alpha P_{si}(\bar{A}'), \quad (7)$$

где \bar{A}' — дополнение к A' . Из (6), (7) следует

$$P_{si}(A) \leq \alpha + (1 - \alpha) P_{si}(A'),$$

откуда получаем, что

$$\lim_{s_m \rightarrow \infty} P_{s_m i}(A') = 1$$

при $i \in I(A)$. Поэтому

$$\lim_{s_m \rightarrow \infty} P_{s_m i}(AA') = 1$$

при $i \in I(A)$ и множество AA' ненулевое. Это значит, что $A\bar{A}'$ — нулевое множество, так как A — п. н. атом, и $A = AA' + A\bar{A}'$. Поэтому для любой меры P_{si} имеем

$$P_{si}(A) = P_{si}(AA').$$

Отсюда и из (6) следует, что множества A и A' отличаются на нулевое множество. Пусть E' — множество состояний, не входящих ни в одно из $I(A_1), I(A_2), \dots, I(A_k)$. Мы получим утверждение теоремы 2, полагая, например,

$$E_1 = I(A_1), \quad E_2 = I(A_2), \quad \dots, \quad E_{k-1} = I(A_{k-1}), \\ E_k = I(A_k) + E'.$$

§ 2. В этом параграфе даны достаточные условия для того, чтобы σ -алгебра N содержала всего один п. н. атом. В этом случае любое N -измеримое множество или нулевое или имеет P_{si} -вероятность, равную 1 по любой мере P_{si} , такое множество назовем единичным. Следующая теорема верна для случая счетного числа состояний цепи.

ТЕОРЕМА 3. Пусть существует подпоследовательность $\{s_k\}$ последовательности $\{t\} = 0, 1, 2, \dots, t, \dots$ такая, что для любого $j, j \in E$, и любой подпоследовательности $\{t_k\}$ последовательности $\{s_k\}$ множество

$$D = \bigcap_l \bigcup_{k>l} x(t_k) = j$$

имеет вероятность 1 по любой мере P_{si} . Тогда σ -алгебра N состоит из нулевых и единичных множеств.

Доказательство. Пусть $A \in N$, A ненулевое. Так же, как в теореме 1,

$$\lim_{s_k \rightarrow \infty} P_{s_k x(s_k)}(A) = \chi(A)$$

— почти наверное по любой мере P_{si} . Пусть сначала в выражении для D $t_k = s_k$ и $j = 1$.

Так как A ненулевое, а D единичное, то существует $\varphi, \varphi \in A \cdot D$, такое, что

$$\lim_{s_k \rightarrow \infty} P_{s_k x(s_k, \varphi)}(A) = 1.$$

Так как $\varphi \in D$, то найдется подпоследовательность последовательности $\{s_k\}$ такая, что

$$x(t_k^{(1)}, \varphi) = 1.$$

Поэтому

$$\lim_{t_k^{(1)} \rightarrow \infty} P_{t_k^{(1)} 1}(A) = 1.$$

Заменим далее в D t_k на $t_k^{(1)}$ и положим $j = 2$. Аналогично найдем подпоследовательность $\{t_k^{(2)}\}$ последовательности $\{t_k^{(1)}\}$ такую, что

$$\lim_{t_k^{(2)} \rightarrow \infty} P_{t_k^{(2)} 2}(A) = 1.$$

По индукции для любого j построим подпоследовательность $\{t_k^{(j)}\}$ последовательности $\{t_k^{(j-1)}\}$ такую, что

$$\lim_{t_k^{(j)} \rightarrow \infty} P_{t_k^{(j)}}(A) = 1.$$

Выбирая диагональную последовательность u_k , $u_k = t_k^{(k)}$, получим при $u_k \rightarrow \infty$

$$P_{u_k j}(A) \rightarrow 1$$

для любого j . Отсюда следует, что σ -алгебра N не может содержать два ненулевых непересекающихся множества. В самом деле, пусть $A \cdot B = \phi$ и A, B ненулевые. Тогда, так же, как u_k , можно построить подпоследовательность $\{m_k\}$ последовательности $\{u_k\}$ такую, что при $m_k \rightarrow \infty$

$$P_{m_k j}(B) \rightarrow 1$$

для всех j . Поэтому

$$P_{m_k j}(A + B) = P_{m_k j}(A) + P_{m_k j}(B) \rightarrow 2$$

при $m_k \rightarrow \infty$. Полученное противоречие доказывает утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е. Условие теоремы 3 выполняется, например, в случае однородной, неприводимой цепи с эргодическими (с точностью до периодичности) состояниями.

В самом деле, в этом случае для произвольной меры P_{si}

$$P_{si}(D) \geq \lambda_j > 0,$$

где $\lambda_j = \lim_{m \rightarrow \infty} p_{ij}(m)$. В силу (2) \bar{D} — нулевое множество, так как ни для какой последовательности $\{t_k\}$ $P_{t_k x(t_k)}(\bar{D})$ не стремится к 1. Поэтому D единичное. Условие теоремы 3 выполняется также в случае неоднородной марковской цепи, если существует последовательность $\{s_k\}$ такая, что для всех i, j

$$p_{ij}(s_k, s_{k+1}) \geq \lambda_j > 0.$$

В этом случае также $P_{si}(D) \geq \lambda_j > 0$ для произвольной меры P_{si} .

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1, М., 1967.
- [2] Лоев М., Теория вероятностей, М., 1962.
- [3] Сенченко Д. В., О характеристиках неоднородных марковских процессов с конечным числом состояний, Теория вероятн. и ее примен., 13 (1968), 548—555.