B. V. Gnedenko, О θ в формуле Лагранжа,
Mat. Pros., 1936, Issue 7, 31–35

ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНИМОГО АРГУМЕНТА

На фиг. 8

$$OA = 1; \quad OD = 1;$$

$$DB \perp OA; FK \parallel EC \parallel DB; EF \perp OD; LD \parallel OA.$$

$$\operatorname{sh} i\varphi_1 = i \cdot DB; \quad \operatorname{ch} i\varphi_1 = OB.$$

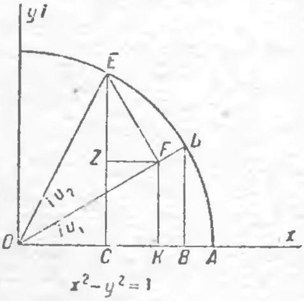
$$\operatorname{sh} i\varphi_2 = i \cdot EF; \quad \operatorname{ch} i\varphi_2 = OF.$$

$$\operatorname{sh} i(\varphi_1 + \varphi_2) = i \cdot EC.$$

$$EC = LC + EL = FK + EL.$$

$$\triangle DBO \backsim \triangle FKO; \quad FK = BD \cdot OF;$$

$$\triangle DBO \backsim \triangle EFL; \quad EL = OB \cdot EF.$$



Фиг. 8.

Отсюда

$$\frac{\operatorname{sh} i(\varphi_1 + \varphi_2)}{i} = \frac{\operatorname{sh} i\varphi_1}{i} \cdot \operatorname{ch} i\varphi_2 + \operatorname{ch} i\varphi_1 \cdot \frac{\operatorname{sh} i\varphi_2}{i},$$

или

$$\operatorname{sh} i(\varphi_1 + \varphi_2) = \operatorname{sh} i\varphi_1 \operatorname{ch} i\varphi_2 + \operatorname{sh} i\varphi_2 \operatorname{ch} i\varphi_1.$$

Таким образом круговые и гиперболические функции мнимого аргумента можно изучать на комплексной плоскости по чертежам, известным на действительной плоскости.

О θ В ФОРМУЛЕ ЛАГРАНЖА

Б. В. Гнеденко (Москва)

1. В анализе следующая формула:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h), \qquad (0<\theta<1) \tag{1}$$

известна под именем формулы Лагранжа.

Зная функцию $f(x)$, всегда (по крайней мере, принципиально) можно найти θ. Так, например,

1) если

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

то

$$\theta = \frac{1}{2};$$

2) если

$$f(x) = e^x,$$

то

$$\theta = \frac{1}{h} \ln \frac{e^h - 1}{h};$$

3) если

$$f(x) = \sin x,$$

то

$$\theta = -\frac{1}{h}\left\{x - \arccos\frac{1}{h}[\sin(x+h) - \sin x]\right\}.$$

Таким образом θ является, вообще говоря, функцией от двух переменных h и x, вполне определяемой заданием функции $f(x)$. Естественно поставить перед собой следующий вопрос: можно ли, зная функцию $\theta=\theta(x, h)$, определить обратно функцию $f(x)$?

В настоящей заметке я отвечаю на следующие два возникающих в связи с этим вопроса: для каких функций $f(x)$

1) $\theta=\theta(x, h)$ будет функцией только x?

2) $\theta=\theta(x, h)$ будет функцией только h?

2. Напомню, хотя я этим и не воспользуюсь в дальнейшем, геометрический смысл θ.

Предположим, что имеется непрерывная функция $y=f(x)$ с непрерывной первой производной. Изобразим ее в осях координат XOY. Возьмем на кривой две точки M и M_1, соответствующие двум значениям аргумента x и $x+h$, соединим их хордой и проведем в промежутке $(x, x+h)$ касательную к кривой, параллельную этой хорде. Если правый конец абсциссы точки касания обозначить буквой B, а концы абсцисс, соответствующих точкам M и M_1,—буквами A и C, то θ равно:

$$\theta=\frac{AB}{AC}=\frac{AB}{h}.$$

Может случиться, что при данных x и h функция $\theta(x, h)$ будет многозначна.

Мы ограничимся случаем, когда θ однозначна и обладает конечными производными $\frac{\partial\theta}{\partial h}, \frac{\partial^2\theta}{\partial h^2}, \frac{\partial^3\theta}{\partial h^3}, \frac{\partial\theta}{\partial x}$ при $h=0$. Относительно функции $f(x)$ мы предположим, что она обладает конечными производными до четвертого порядка включительно.

3. Теорема 1. *При h, стремящемся к нулю, $\theta(x, h)$ принимает в пределе значение $\frac{1}{2}$ независимо от x и $f(x)$:*

$$\theta(x, 0)=\frac{1}{2}\ [1].$$

В самом деле, из (1) находим:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x+\theta h).$$

Составляем отношение

$$\frac{f'(x+\theta h)-f'(x)}{h}=\frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)}{h}.$$

Предел левой части равен $\theta_0 f''(x)$, где $\theta_0=\lim\limits_{h\to 0}\theta$; предел правой части равен $\frac{1}{2}f''(x)$, в чем нетрудно убедиться путем разложения

[1] Если нарушены условия предыдущего параграфа, то теорема допускает исключения, о которых см. статью Бритмана, Об остаточном члене формулы Тейлора, «Математическое просвещение», выпуск 6, 1936. *(Ред)*.

в строку Тейлора $f(x+h)$ по степеням h до третьего члена. Отсюда и следует, что

$$\theta(x, 0) = \theta_0 = \frac{1}{2}\ ^{1)}.$$

4. Истолкуем полученный результат геометрически. Функции

$$\theta = \theta(x, h)$$

можно представлять как поверхности в пространстве координат $xh\theta$. Все они будут заключены в области между плоскостями $\theta = 0$ и $\theta = 1$. Предыдущий результат показывает, что все эти поверхности проходят через прямую $h = 0$, $\theta = \frac{1}{2}$. Отсюда мы сделаем тот вывод, что независимо от функции $f(x)$ и значения аргумента x должно быть

$$\left[\frac{\partial\theta}{\partial x}\right]_{h=0} = 0.$$

Теперь мы в состоянии перейти к доказательству основной теоремы.

5. Теорема 2. *Всякая функция* $f(x)$ (удовлетворяющая условиям, высказанным в п. 2) *удовлетворяет уравнению*

$$f'''(x) = 24\left[\frac{\partial\theta}{\partial h}\right]_{h=0} f''(x).$$

Для доказательства диференцируем формулу Лагранжа

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x+\theta h)$$

по x:

$$f'(x+h) - f'(x) = hf''(x+\theta h)\cdot\left(1 + h\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)$$

и по h:

$$f'(x+h) = f'(x+\theta h) + hf''(x+\theta h)\cdot\left(\theta + h\frac{\partial\theta}{\partial h}\right).$$

Находим из этих уравнений величину $hf''(x+\theta h)$ и приравниваем полученные выражения:

$$\frac{f'(x+h) - f'(x)}{1 + h\dfrac{\partial\theta}{\partial x}} = \frac{f'(x+h) - f'(x+\theta h)}{\theta + h\dfrac{\partial\theta}{\partial h}}. \qquad (2)$$

Но из формулы Лагранжа

$$f'(x+\theta h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

поэтому равенство (2) переписывается так:

$$\frac{f'(x+h) - f'(x)}{1 + h\dfrac{\partial\theta}{\partial x}} = \frac{hf'(x+h) - f(x+h) + f(x)}{h\left(\theta + h\dfrac{\partial\theta}{\partial h}\right)}.$$

---

[1]) Это заключение верно только в том случае, когда $f''(x) \neq 0$. См. предыдущую сноску. (*Ред.*)

Это равенство иначе можно переписать так:

$$\frac{h(1-\theta)f'(x+h)+\theta hf'(x)-f(x+h)+f(x)}{h}=$$

$$=\frac{\partial\theta}{\partial x}[f(x+h)-f(x)-hf'(x+h)]+h\frac{\partial\theta}{\partial h}[f'(x+h)-f'(x)].$$

Разделим это равенство на h^2 и перейдем к пределу, полагая $h\to 0$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{h(1-\theta)f'(x+h)+\theta hf'(x)-f(x+h)+f(x)}{h^3}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\partial\theta}{\partial x}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-hf'(x+h)}{h^2}+\lim_{h\to 0}\frac{\partial\theta}{\partial h}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h};$$

но мы видели, что

$$\left[\frac{\partial\theta}{\partial x}\right]_{h=0}=0,$$

поэтому предел правой части равен

$$f''(x)\cdot\left[\frac{\partial\theta}{\partial h}\right]_{h=0}. \tag{3}$$

Вычислим предел левой части посредством правила Лопиталя. После трехкратного применения этого правила приходим к равенству:

Левая часть =

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3\frac{\partial^2\theta}{\partial h^2}\left[f'(x)-f'(x+h)\right]-6\frac{\partial\theta}{\partial h}f''(x+h)+(2-3\theta)f'''(x+h)}{6}-$$

$$-\lim_{h\to 0}\frac{h\left[\frac{\partial^3\theta}{\partial h^3}f'(x+h)+3\frac{\partial^2\theta}{\partial h^2}f''(x+h)+3\frac{\partial\theta}{\partial h}f'''(x+h)-(1-\theta)f^{\text{IV}}(x+h)-\frac{\partial^3\theta}{\partial h^3}f'(x)\right]}{6}.$$

Предел второго члена в силу присутствия множителя h равен нулю; предел первого члена равен

$$-\left[\frac{\partial\theta}{\partial h}\right]_{h=0}f''(x)+\frac{1}{12}f'''(x). \tag{4}$$

Приравниваем (3) и (4):

$$-\left[\frac{\partial\theta}{\partial h}\right]_{h=0}f''(x)+\frac{1}{12}f'''(x)=\left[\frac{\partial\theta}{\partial h}\right]_{h=0}f''(x).$$

Отсюда окончательно

$$f'''(x)=24\left[\frac{\partial\theta}{\partial h}\right]_{h=0}f''(x). \tag{5}$$

6. Применим теперь формулу (5) для нахождения функций $f(x)$, для которых $\theta(x, h)$ является а) функцией только x; б) функцией только h.

Теорема 3. *Для того чтобы $\theta(x, h)$ зависела только от x, необходимо, чтобы функция $f(x)$ была вида*

$$f(x)=ax^2+bx+c;$$

в этом случае постоянно равно $\frac{1}{2}$.

Действительно, в этом случае

$$\theta(x,\ h) = \theta(x,\ 0) = \frac{1}{2}.$$

Уравнение (5) в этом случае запишется так:

$$f'''(x) = 0,$$

отсюда

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Теорема 4. *Для того чтобы $\theta(x,\ h)$ зависела только от h, необходимо, чтобы функция $f(x)$ была вида*

$$f(x) = a + bx + ce^{kx}.$$

Действительно, в этом случае

$$24\left[\frac{\partial\theta}{\partial h}\right]_{h=0} = k = \text{const}.$$

Уравнение (5) принимает вид

$$f'''(x) = kf''(x),$$

откуда

$$f(x) = a + bx + ce^{kx}.$$

Но сформулированные в теоремах 3 и 4 условия являются в то же время достаточными, так как в первом случае $\theta = 0{,}5$; а во втором случае

$$\theta = \frac{1}{kh}\ln\frac{1}{k}(e^{kh} - 1).$$

Приведенные теоремы показывают, что далеко не всякая функция $\theta(x,\ h)$ $(0 < \theta < 1)$ может быть θ в формуле Лагранжа.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, В КОТОРЫХ ОТСУТСТВУЕТ ОДНА ИЗ ПЕРЕМЕННЫХ

И. С. Градштейн (Москва)

Обычный способ интегрирования диференциальных уравнений $F(x,\ y') = 0$, $F(y,\ y') = 0$, в которых отсутствует одна из переменных, сводится к решению этих уравнений относительно входящего в них переменного или относительно производной. Однако решить эти уравнения относительно входящих в них переменных не всегда возможно. В таком случае общий метод интегрирования таких уравнений сводится к выражению как переменной x (или y), так и производной y' через вспомогательный параметр t. Конкретных способов применения этого метода обычно не указывается. Я хочу здесь указать способ решения одного вида таких диференциальных уравнений.