

УДК 535.4: 519.63

**ПРИМЕНЕНИЕ НЕПОЛНОГО МЕТОДА ГАЛЕРКИНА
К НЕРЕГУЛЯРНЫМ ПЕРЕХОДАМ
В ОТКРЫТЫХ ПЛАНАРНЫХ ВОЛНОВОДАХ**

© 2015 г. *Д.В. Диваков¹, Л.А. Севастьянов^{1,2}*

¹ Российский университет дружбы народов, Москва

² Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл.
sevast@sci.pfu.edu.ru, dmitriy.divakov@gmail.com

Рассматривается неполный метод Галеркина в применении к расчету электромагнитного поля в закрытом однородном волноводе, представляющем собой нерегулярный переход между двумя волноводами постоянного поперечного сечения. Метод обобщен на случай расчета электромагнитного поля (с учетом мод, соответствующих дискретному спектру) в открытом однородном нерегулярном волноводе.

Ключевые слова: плавно-нерегулярные волноводы, открытые волноводы, неполный метод Галеркина, волноводный переход.

**APPLICATION OF INCOMPLETE GALERKIN METHOD
TO IRREGULAR JUNCTION IN OPEN PLANAR WAVEGUIDES**

D.V. Divakov¹, L.A. Sevastianov^{1,2}

¹ Peoples' Friendship University of Russia, Moscow

² Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Moscow Region

The work is dedicated to the application of incomplete Galerkin method to the electromagnetic problem in closed homogeneous waveguide, presented as irregular junction between two waveguides with constant transverse sections. The method is generalized to the electromagnetic problem in open irregular homogeneous waveguide (in case of discrete modes only).

Key words: smoothly-irregular waveguides, open waveguides, reduced Galerkin's method, waveguide junction.

1. Введение

В настоящей работе рассматривается задача отыскания электромагнитного поля внутри волноводного перехода, представляющего собой нерегулярный по двум границам участок. Процедура неполного метода Галеркина, состоящая в переходе к новым координатам, в которых границы волновода представляются плоскими, сохраняет вид парциальных условий излучения в новых координатах при дополнительных предположениях, не ограничивающих общности задачи. Будут рассмотрены два случая.

В первом случае считаем, что поверхности (нижняя и верхняя) волновода покрыты

сверхпроводящими покрытиями нулевой толщины. В этом случае на границах волноводного слоя выполняются условия, которые при редукции уравнений Максвелла к уравнениям Гельмгольца для ТЕ- и ТМ-мод редуцируются к условиям первого рода на нижней и верхней кривых границах сечения волноводного слоя. Этот случай рассмотрен во втором разделе настоящей работы.

Во втором случае считаем, что вдоль кривых $h_1(z)$ и $h_2(z)$ реализуются границы раздела диэлектрических сред. На них выполняются условия, которые при редукции уравнений Максвелла к уравнениям Гельмгольца для ТЕ- и ТМ-мод редуцируются к условиям третьего рода. Решения поперечной части уравнения Гельмгольца с граничными условиями третьего рода не обращаются в нуль на границах слоя. Однако синус-образное поведение решения внутри слоя дает возможность продолжить его за пределы слоя до пересечения с осью Ox , что позволяет поставить в соответствие исходному открытому волноводу закрытый волновод, поле внутри которого совпадает с полем исходного волновода на некотором отрезке. Подобное построение позволяет использовать неполный метод Галеркина, изложенный во втором разделе, для решения задачи в открытом волноводе. Этот случай рассмотрен в третьем разделе работы.

2. Описание неполного метода Галеркина для закрытого нерегулярного волноводного перехода

Рассмотрим плоский закрытый волновод, формы верхней и нижней границ которого заданы уравнениями $x = h_1(z)$ и $x = h_2(z)$ (см. рис.1).

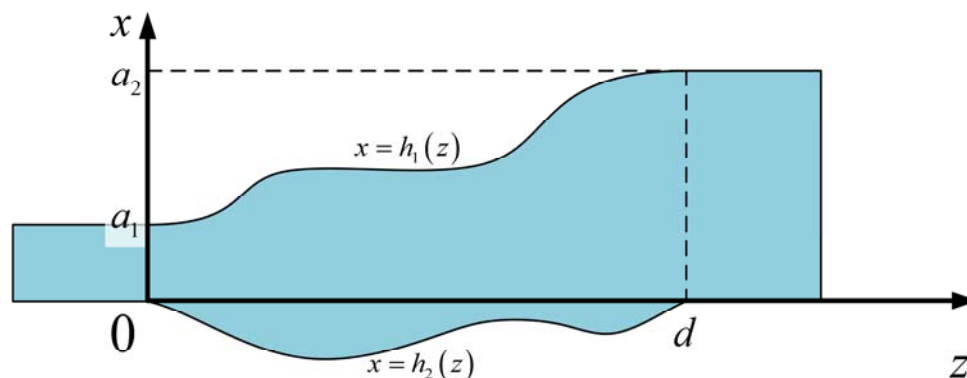


Рис.1. Волноводный переход между плоскими волноводами постоянного поперечного сечения.

Функции $h_1(z)$ и $h_2(z)$ описывают формы верхней и нижней границ, причем $h_1(z) \equiv a_1$, $h_2(z) \equiv 0$ при $z \leq 0$ и $h_1(z) \equiv a_2$, $h_2(z) \equiv 0$ при $z \geq d$. Рассмотрим задачу о волноводном распространении электромагнитного поля внутри описанной структуры. Поле $u = u(x, z)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца [1]:

$$u_{xx} + u_{zz} + k^2 u = 0 \tag{1}$$

и граничным условиям первого рода

$$u|_{x=h_1(z)} = u|_{x=h_2(z)} = 0. \tag{2}$$

Кроме того, поле удовлетворяет условиям возбуждения и излучения на бесконечности вида [1]:

$$u|_{z \leq 0} = \sum_{n=1}^{\infty} R_n \exp(-i\gamma_n z) \sin(\pi n x / a_1) + A \exp(i\gamma_{n_0} z) \sin(\pi n_0 x / a_1), \quad (3)$$

$$u|_{z \geq d} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \exp(i\Gamma_n z) \sin(\pi n x / a_2), \quad (4)$$

где $\gamma_n = k^2 - (\pi n / a_1)^2$, $\Gamma_n = k^2 - (\pi n / a_2)^2$, A – заданная амплитуда падающей моды с номером n_0 , R_n и T_n – неизвестные коэффициенты, определяющие амплитуды прямых и обратных мод.

Для преобразования формы границ волновода по аналогии с [1] введем новые переменные:

$$\xi(x, z) = [x - h_2(z)] / [h_1(z) - h_2(z)] \stackrel{not}{=} x / h(z) - g(z), \quad \eta(x, z) = z, \quad (5)$$

где $h(z) = h_1(z) - h_2(z)$ и $g(z) = h_2(z) / h(z)$.

В новых координатах уравнение Гельмгольца (1) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \left(h^{-2}(\eta) + [\xi b(\eta) + f(\eta)]^2 \right) \times u_{\xi\xi} - 2(\xi b(\eta) + f(\eta)) \times u_{\xi\eta} + \\ & + u_{\eta\eta} + (\xi + g(\eta)) c(\eta) \times u_{\xi} + k^2 u = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $b(\eta) = h'(\eta) / h(\eta)$, $c(\eta) = b^2(\eta) - b'(\eta)$, $f(\eta) = g(\eta) b(\eta) + g'(\eta)$.

Граничные условия (2) в новых координатах примут следующий вид:

$$u|_{\xi=0} = u|_{\xi=1} = 0. \quad (7)$$

Преобразуем (6), умножив на $h(\eta)$ и сгруппировав слагаемые следующим образом:

$$L_1 u + L_2 u = 0, \quad (8)$$

где $L_1 u = -2(\xi h'(\eta) + h_2'(\eta)) \times u_{\xi\eta} + h(\eta) \times u_{\eta\eta}$,

$$L_2 u = \left(1 + [\xi h'(\eta) + h_2'(\eta)]^2 \right) h^{-1}(\eta) \times u_{\xi\xi} + (\xi h(\eta) + h_2(\eta)) c(\eta) \times u_{\xi} + k^2 h(\eta) \times u.$$

Далее будем осуществлять редукцию от уравнения в частных производных (8) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, задавая приближенное решение в виде частичной суммы ряда по системе функций, удовлетворяющих граничным условиям (7) [1]:

$$u^N(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^N A_n(\eta) \sin(\pi n \xi). \quad (9)$$

Подставим теперь решение (9) в уравнение (8). Отметим, что $L_1 u^N$ определяют слагаемые с первой и второй производной от $A_n(\eta)$ в редуцированной системе дифференциальных уравнений, в то время как $L_2 u^N$ определяют слагаемые с $A_n(\eta)$.

Применим теперь проекционную схему неполного метода Галеркина [1]:

$$\sum_{n=1}^N \int_0^1 (L_1 [A_n(\eta) \sin(\pi n \xi)] + L_2 [A_n(\eta) \sin(\pi n \xi)]) \sin(\pi m \xi) d\xi = 0 \quad m = \overline{1, N}. \quad (10)$$

Запишем диагональную ($n = m$) часть редуцированной системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$J_1 A_n + J_2 A_n = \frac{1}{2} (h A_n')' - \frac{1}{2} p_n(\eta) A_n, \quad (11)$$

где $p_n(\eta)$ определен следующим образом:

$$p_n(\eta) = h(\eta) \left(\left[h^{-2}(\eta) + b^2(\eta) / 3 + f(\eta)(f(\eta) + b(\eta)) \right] (\pi n)^2 - b'(\eta) / 2 - k^2 \right). \quad (12)$$

Недиагональная часть ($n \neq m$) редуцированной системы обыкновенных дифференциальных уравнений примет следующий вид:

$$\sum_{\substack{m \neq n \\ m=1}}^N (J_3 A_m + J_4 A_m) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{m \neq n \\ m=1}}^N (L_{nm}(\eta) A_m' + K_{nm}(\eta) A_m), \quad (13)$$

где введены следующие обозначения:

$$L_{nm}(\eta) = 4h(\eta) [b(\eta) + f(\eta)] \times (-1)^{n+m} \alpha_{nm} - 4h(\eta) f(\eta) \times \alpha_{nm} \quad (14)$$

$$K_{nm}(\eta) = -2h(\eta) \times (-1)^{n+m} \alpha_{nm} \left[b^2(\eta) (4m\alpha_{nm} / n + 1) - b'(\eta) \right] - \quad (15)$$

$$-2h(\eta) \times \left((-1)^{m+n} - 1 \right) \alpha_{nm} f(\eta) \left[b(\eta) (4m\alpha_{nm} / n + b(\eta)) - b'(\eta) \right],$$

где $\alpha_{nm} = nm / (n^2 - m^2)$. Редуцированная система обыкновенных дифференциальных уравнений примет в итоге следующий вид:

$$(h A_n')' - p_n(\eta) A_n + \sum_{\substack{m \neq n \\ m=1}}^N (L_{nm}(\eta) A_m' + K_{nm}(\eta) A_m) = 0. \quad (16)$$

Условия (3) и (4) можно сформулировать в следующем виде [1, 2]:

$$\int_0^{a_1} (u_z + i\gamma_n u) \sin(\pi n x / a_1) \Big|_{z=0} dx = 2i\gamma_{n_0} A_{n_0} \delta_{n,n_0}, \quad (17)$$

$$\int_0^{a_2} (u_z - i\Gamma_n u) \sin(\pi n x / a_2) \Big|_{z=0} dx = 0. \quad (18)$$

Необходимо теперь переписать условия (17) и (18) в новых координатах. Предполагая дополнительно: $h'_1(0) = h'_2(0) = 0$ и $h'_1(d) = h'_2(d) = 0$, получим

$$\int_0^1 (u_\eta + i\gamma_n u) \Big|_{\eta=0} \sin(\pi n \xi) d\xi = 2i\gamma_{n_0} (A_{n_0} / a_1) \delta_{n,n_0}, \quad (19)$$

$$\int_0^1 (u_\eta - i\Gamma_n u) \Big|_{\eta=d} \sin(\pi n \xi) d\xi = 0. \quad (20)$$

Условия (19), (20) с учетом вида решения (9) можно сформулировать в виде

$$A'_n + i\gamma_n A_n \Big|_{\eta=0} = 2i\gamma_{n_0} (A_{n_0} / a_1) \delta_{n,n_0}, \quad (21)$$

$$A'_n - i\Gamma_n A_n \Big|_{\eta=d} = 0. \quad (22)$$

Получив граничные условия (21) и (22), мы завершили редукцию от краевой задачи для уравнения Гельмгольца (1)-(4) к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (16), (21), (22).

3. Обобщение неполного метода Галеркина на открытый нерегулярный волновод

Во втором случае считаем, что вдоль кривых $h_1(z)$ и $h_2(z)$ реализуются границы раздела диэлектрических сред. Следовательно, на этих границах выполняются граничные условия [3]:

$$\mathbf{E}^\tau \Big|_{h_1(z)-0} = \mathbf{E}^\tau \Big|_{h_1(z)+0}, \quad \mathbf{E}^\tau \Big|_{h_2(z)+0} = \mathbf{E}^\tau \Big|_{h_2(z)-0} \quad (23)$$

и

$$\mathbf{H}^\tau \Big|_{h_1(z)-0} = \mathbf{H}^\tau \Big|_{h_1(z)+0}, \quad \mathbf{H}^\tau \Big|_{h_2(z)+0} = \mathbf{H}^\tau \Big|_{h_2(z)-0}. \quad (24)$$

При редукции системы уравнений Максвелла к уравнениям Гельмгольца для ТЕ- и ТМ-мод условия (23), (24) редуцируются к граничным условиям третьего рода на нижней и верхней кривых границах xOz сечения волноводного слоя. Решения поперечной части уравнения Гельмгольца с граничными условиями третьего рода, аналогичные мембранным функциям в случае условий первого рода, не обращаются в нуль на грани-

цах слоя. При построении решений на всей оси Ox они осциллируют подобно синусу внутри слоя и убывают экспоненциально в обе стороны снаружи слоя.

Если продолжить синус-образное поведение решений (в произвольном поперечном сечении $z = z^*$) за пределы слоя, то такая кривая пересечет ось Ox снаружи от слоя на расстоянии Δx_1^* от точки $x = h_1(z^*)$ и на расстоянии Δx_2^* от точки $x = h_2(z^*)$. Эти сдвиги для регулярных волноводов сравнения [4] именуется сдвигами Гуса-Хенхена (см. рис.2).

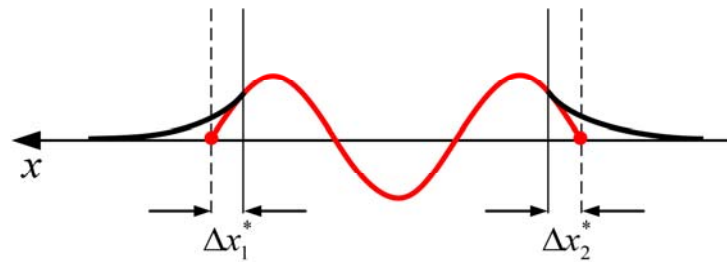


Рис.2. Сдвиги Гуса-Хенхена.

Величины сдвигов Гуса-Хенхена определяются [5] формулами для ТЕ-моды:

$$\Delta x_1^{TE} = p_n^{-1}(z), \tag{25}$$

$$\Delta x_2^{TE} = q_n^{-1}(z) \tag{26}$$

и для ТМ-моды:

$$\Delta x_1^{TM} = p_n^{-1}(z) \left[\gamma_n^2(z) / k_c^2 + \gamma_n^2(z) / k^2 - 1 \right]^{-1}, \tag{27}$$

$$\Delta x_2^{TM} = q_n^{-1}(z) \left[\gamma_n^2(z) / k_s^2 + \gamma_n^2(z) / k^2 - 1 \right]^{-1}, \tag{28}$$

где $p_n(z) = \sqrt{\gamma_n^2(z) - k_c^2}$, $q_n(z) = \sqrt{\gamma_n^2(z) - k_s^2}$, причем $\gamma_n^2(z) = k^2 - (\pi n / h(z))^2$.

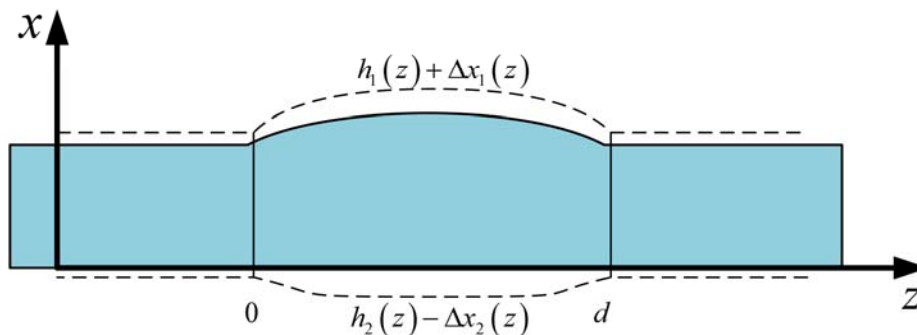


Рис.3. Нерегулярный волновод со сдвигами Гуса-Хенхена.

Если обозначить $\tilde{h}_1(z) = h_1(z) + \Delta x_1(z)$, $\tilde{h}_2(z) = h_2(z) - \Delta x_2(z)$ (см.рис.3), то схема из раздела 2 применяется к волноводу с виртуальными границами $\tilde{h}_1(z)$ и $\tilde{h}_2(z)$, после чего по-

лученное решение сужается на область между $h_1(z)$ и $h_2(z)$. В отличие от закрытого волновода, поле которого сосредоточено в полосе $\Pi_0 = \{(x, z) : x \in [h_2(z), h_1(z)], z \in [0, d]\}$, в открытом волноводе поле присутствует во всей плоскости, но основная часть сосредоточена в оптической полосе $\Pi_1 = \{(x, z) : x \in [\tilde{h}_2(z), \tilde{h}_1(z)], z \in [0, d]\}$. Решение для открытого волновода с волноводным слоем в полосе Π_0 эквивалентно решению для некоторого закрытого волновода с более широким волноводным слоем в полосе Π_1 , так что сужение решения для исходного открытого волновода на полосу Π_0 совпадает с решением в Π_0 для открытого волновода.

4. Заключение

В настоящей работе авторы продемонстрировали возможность применения неполного метода Галеркина к моделированию открытых волноводов. Принципиальная схема метода сохранила свой вид, предложенный Свешниковым А.Г. для расчета закрытых волноводов. Расчет открытых волноводов производится благодаря сопоставлению исходному открытому волноводу соответствующего волновода закрытого, имеющего большую толщину, поле внутри которого на суженном отрезке (равном толщине исходного волновода) совпадает в точности с полем исходного волновода. Толщина открытого волновода находится с помощью сдвигов Гуса-Хенхена, которые в случае нерегулярного исходного открытого волновода определяют нерегулярную форму и верхней и нижней границ соответствующего закрытого волновода. Поле в закрытом волноводе с нерегулярными верхней и нижней границами рассчитывается с помощью неполного метода Галеркина, сформулированного в третьем разделе настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Г. Свешников. К расчету согласования плоских волноводов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, т.2, № 1, с.175-179.
A.G. Sveshnikov. K raschetu soglasovaniia ploskikh volnovodov // Zh. vychisl. matem. i matem. fiz., 1962, t.2, № 1, s.175-179.
2. А.Г. Свешников, И.Е. Могилевский. Избранные математические задачи теории дифракции. – М.: Физический факультет МГУ, 2012, 240 с.
A.G.Sveshnikov, I.E.Mogilevskii. Izbrannyye matematicheskie zadachi teorii difraktsii. – M.: Fizicheskii fakultet MGU, 2012, 240 s.
3. А.А. Егоров, Л.А. Севастьянов, А.Л. Севастьянов. Исследование плавно-нерегулярных интегрально-оптических волноводов методом адиабатических мод: нулевое приближение // Квантовая электроника, 2014, 44 (2), с.167-173.
A.A. Egorov, L.A. Sevastianov, A.L. Sevastianov. Issledovanie plavno-neregularnykh integralno-opticheskikh volnovodov metodom adiabaticheskikh mod: nulevoe priblizhenie // Kvantovaya elektronika, 2014, 44 (2), s.167-173.
4. В.В. Шевченко. Плавные переходы в открытых волноводах (Введение в теорию). – М.: Наука, 1969.
V.V. Shevchenko. Plavnye perekhody v otkrytykh volnovodakh (Vvedenie v teoriyu). – M.: Nauka, 1969.
5. М. Адамс. Введение в теорию оптических волноводов. Пер. с англ. – М.: Мир, 1984, с.512.
M.J. Adams. An introduction to optical waveguides. John Wiley & Sons, 1981, p.401.