Н. К. Никольский, О возмущениях спектра унитарных операторов,
Матем. заметки, 1969, том 5, выпуск 3, 341–349

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 5, № 3 (1969), 341—349

УДК 513.88

О ВОЗМУЩЕНИЯХ СПЕКТРА УНИТАРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Н. К. Никольский

Изучается устойчивость существенного спектра унитарных операторов при ядерных и компактных возмущениях. Библ. 10 назв.

1. Пусть A — линейный непрерывный оператор в (сепарабельном) гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. *Существенным спектром* оператора A будем называть дополнение $\sigma_e(A)$ множества всех нормальных точек *) оператора A до всей комплексной плоскости. Хорошо известно следующее утверждение об устойчивости существенного спектра (см. [1], теорема И. Ц. Гохберга, стр. 39, и следствия из нее).

ТЕОРЕМА А. *Если резольвентное множество $\rho(A)$ оператора A связно и K — вполне непрерывный оператор, то*

$$\sigma_e(A) = \sigma_e(A+K).$$

С другой стороны, уже для унитарных операторов A, спектр которых заполняет единичную окружность $C = \{z: |z| = 1\}$, это предложение, вообще говоря, не имеет места. Более того, легко указать унитарный оператор U и одномерный оператор K такие, что

$$\sigma_e(U+K) = \overline{D} \overset{\text{def}}{=} \{z: |z| \leqslant 1\}.$$

*) Число λ называется *нормальной точкой оператора* A [1], если λ — либо регулярная точка A, либо изолированное собственное число, которому соответствует конечномерный спектральный проектор.

В настоящей заметке *) описываются те унитарные операторы U, на которые в той или иной мере распространяется теорема A о возмущении существенного спектра. Устанавливается, что устойчивость существенного спектра оператора связана с наличием некоторого «люка» в его спектре, соединяющего внешность и внутренность единичной окружности C. Строго говоря, основной целью заметки является доказательство следующих теорем.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть U — унитарный оператор в (сепарабельном) гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.*

1) *Если оператор U имеет неприводящее* **) *инвариантное подпространство, то*

$$\sigma_e(U+K) = \bar{D} = \{z : |z| \leqslant 1\}$$

при некотором одномерном операторе K.

2) *Если любое U-инвариантное подпространство приводит оператор U, то $\sigma_e(U+K) = \sigma_e(U)$ для любого* ***) *K, $K \in \mathfrak{S}_1$.*

Здесь и далее через $\mathfrak{S}_1$ обозначается симметрично-нормированный (с.-н.) идеал (см. [1]) всех ядерных операторов в $\mathcal{H}$; $\mathfrak{S}_\infty$ — с.-н. идеал всех вполне непрерывных операторов в $\mathcal{H}$; $\mathfrak{S}_2$ — с.-н. идеал всех операторов Гильберта-Шмидта.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть U — унитарный оператор в $\mathcal{H}$, не имеющий неприводящих инвариантных подпространств.*

1) *Если спектр $\sigma(U)$ оператора U совпадает со всей окружностью C, а $\mathfrak{S}$ — с.-н. идеал операторов в $\mathcal{H}$, причем $\mathfrak{S} \supset \mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S} \neq \mathfrak{S}_1$, то существует оператор K, $K \in \mathfrak{S}$ такой, что $\sigma_e(U+K) = \bar{D}$.*

2) *Если $\sigma(U) \neq C$, то $\sigma_e(U+K) = \sigma_e(U)$ для любого K, $K \in \mathfrak{S}_\infty$.*

Другими словами, из теорем 1 и 2 вытекает, что если $\sigma(U) = C$, то существует T, $T \in \mathfrak{S}$, такой, что $\sigma_e(U+T) = \bar{D}$, причем $\mathfrak{S}$ — любой с.-н. идеал, отличный от $\mathfrak{S}_1$.

---

*) Своим появлением заметка обязана вопросу В. И. Мацаева и А. С. Маркуса о поведении существенного спектра при компактных возмущениях, а также поддержке и добрым советам М. Ш. Бирмана.

**) Подпространство ($\equiv$ замкнутое подпространство) M приводит оператор U, если $UM \subset M$ и $U(\mathcal{H} \ominus M) \subset \mathcal{H} \ominus M$.

***) Легко показать, что в этом случае $\sum ||\lambda_k| - 1| < \infty$, если $\{\lambda_k\}$ — собственные числа оператора $U+K$, $K \in \gamma_1$.

Что же касается возмущений из $\mathfrak{S}_1$, то здесь все определяется не спектром U, а наличием у него неприводящих инвариантных подпространств.

2. Простейшим унитарным оператором со свойством неустойчивости существенного спектра является оператор сдвига S в пространстве L^2 всех (классов) функций, измеримых и суммируемых с квадратом на окружности $C = \{z : |z| = 1\}$,

$$(Sf)(z) = zf(z), \quad z \in C, \quad f \in L^2.$$

Действительно, положим

$$K = -(\cdot, e_{-1})e_0, \quad e_0(z) \equiv 1, \quad z \in C; \quad e_{-1} = S^{-1}e_0,$$

и заметим, что

$$S + K = S_+ \oplus Sl_+^*,$$

где $S_+ = S/H^2$ — оператор (одностороннего) сдвига на подпространстве H^2 всех функций из L^2, коэффициенты Фурье которых с отрицательными номерами равны нулю. Теперь ясно, что $\sigma_e(S + K) = \sigma_e(S_+) = \overline{D} = \{z : |z| \leqslant 1\}$, и наше утверждение доказано.

Итак, если $U = S$ или если унитарный оператор U содержит часть *), унитарно эквивалентную оператору сдвига S, то его можно возмутить одномерным оператором K так, что $\sigma_e(U + K) = \sigma_e(S_+) = \overline{D}$.

В связи с этим обстоятельством напомним результат Дж. Вермера [2] об операторах, не содержащих оператора S.

ТЕОРЕМА Б. *Унитарный оператор U не содержит никакой части, унитарно эквивалентной оператору сдвига S в том, и только в том случае, когда любое U-инвариантное подпространство приводит оператор U.*

Несколько более полное утверждение содержится в работе [3]:

ТЕОРЕМА В. *Пусть U — унитарный оператор в $\mathscr{H}$. Существуют подпространства $\mathscr{H}_0$ и $\mathscr{H}_1$, приводящие U, $\mathscr{H} = \mathscr{H}_0 \oplus \mathscr{H}_1$, и такие, что*

1) *$U/\mathscr{H}_0$ унитарно эквивалентен прямой сумме нескольких экземпляров (может быть в счетном числе) оператора сдвига S;*

---

*) *Частью* оператора U называется сужение U/M оператора U на некоторое его инвариантное подпространство M.

2) *любое инвариантное подпространство оператора* $U/\mathcal{H}_1$ *является приводящим;*

3) *оператор* $U/\mathcal{H}_1$ *унитарно эквивалентен оператору умножения на независимую переменную в пространстве* *) $\int_C \oplus L(\zeta)d\mu(\zeta)$, *причем* $\mu\Delta = 0$ *для некоторого борелевского множества* Δ, $\Delta \subset C$, *положительной лебеговой меры*, $\operatorname{mes} \Delta > 0$.

Следствие (Дж. Вермер). *Любое* U*-инвариантное подпространство приводит оператор* U *в том, и только в том случае, когда* $E(\Delta) = \mathbf{0}$ *для некоторого борелевского множества* $\Delta, \Delta \subset C$, *с* $\operatorname{mes} \Delta > 0$ (*т. е. когда* $\mathcal{H}_0 = \{\mathbf{0}\}$). *Здесь* $E(\cdot)$ — *спектральная мера, соответствующая унитарному оператору* U.

3. Доказательству теорем 1 и 2 предпошлем несколько лемм. Некоторые из них, по существу, содержатся в работе М. Ш. Бирмана и С. Б. Энтиной [5] (см. также [6]), хотя формально и являются обобщениями соответствующих утверждений из этой статьи.

ЛЕММА 1. *Пусть* Ω — *ограниченная односвязная область комплексной плоскости со спрямляемой границей* Γ, *а* F — *функция со значениями в* $\mathfrak{S}_1$, *регулярная в* Ω. *Если*

$$F_R(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{F(z) + F(z)^*}{2} \geqslant \mathbf{0}$$

$$\left(\text{или } F_J(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{F(z) - F(z)^*}{2i} \geqslant \mathbf{0}\right), \quad z \in \Omega,$$

то при почти всех ζ, $\zeta \in \Gamma$, *существуют в смысле* $\mathfrak{H}_2$ *угловые граничные значения функции* $F_1 = D_1 F D_2$,

$$F_1(\zeta) = \lim_{z \to \zeta} F_1(z),$$

каковы бы ни были вполне непрерывные операторы D_1 *и* D_2.

Доказательство. Следуя схеме доказательства леммы 2.4 из работы [5], установим сначала, что существуют слабые угловые граничные значения функции F.

---

*) Напомним [4], что прямой интеграл измеримого семейства L-подпространств из $\mathcal{H}$ относительно меры μ ($\mu \geqslant 0$) есть подпространство пространства $L^2(C, \mathcal{H}, \mu)$, состоящее из всех (классов) функций f таких, что $f(\zeta) \in L(\zeta)$ при μ-почти всех ζ, $\zeta \in C$.

Так как при любых f и g из пространства $\mathscr{H}$ имеем

$$4(F(z)f, g) = (F(z)(f+g), f+g) - (F(z)(f-g), f-g) + \\ + i(F(z)(f+ig), f+ig) - i(F(z)(f-ig), f-ig)$$

то можно ограничиться рассмотрением функций вида $(F(\cdot)f, f)$, $f \in \mathscr{H}$. Для этих функций $\operatorname{Re}(F(z)f, f) \geqslant 0$, $z \in \Omega$, и наше утверждение следует из теоремы П. Фату — И. И. Привалова (см. [7]).

Чтобы закончить доказательство леммы, достаточно установить ограниченность норм $\| F(z)\|_{\mathfrak{S}_2}$ при угловом стремлении $z \to \zeta$, $z \in \Omega$, для почти всех ζ, $\zeta \in \Gamma$, и сослаться на лемму 2.1 из работы [5] о сильной сходимости в $\mathfrak{S}_2$ «окаймленных» последовательностей операторов. Имеем (ср. [6] и [5])

$$\| F(z)\|_{\mathfrak{S}_2}^2 = \operatorname{Sp} F(z)F(z)^* \leqslant \det(I + F(z)F(z)^*) \leqslant \\ \leqslant \det(I + F(z)F(z)^* + F(z) + F(z)^*) = \\ = \det(I + F(z))(I + F(z)^*) = |\det(I + F(z))|^2.$$

С другой стороны, $\det(I + F(z)F(z)^*) \geqslant 1$, $z \in \Omega$, так что функция $\det(I + F(\cdot))$ имеет (теорема П. Фату — И. И. Привалова) угловые граничные значения почти всюду на Γ, и, следовательно, нормы $\| F(z)\|_{\mathfrak{S}_2}$ ограничены в нужном нам смысле. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Функция* $G_1 = D_1GD_2$, *где* $D_i \in \mathfrak{S}_2$, $i = 1,2$, $G(z) = (U - z)^{-1}$, $|z| < 1$, *а* U*—унитарный оператор в* $\mathscr{H}$, *имеет угловые граничные значения* (*в смысле* $\mathfrak{S}_2$) *при почти всех* ζ, $|\zeta| = 1$.

Доказательство.

$$G_1 = D_1GD_2 = D_1U^{-1}(UG)D_2 = \widetilde{D}_1UGD_2 = \\ = \frac{1}{4}\{(\widetilde{D}_1^* + D_2)^*UG(\widetilde{D}_1^* + D_2) - (\widetilde{D}_1^* - D_2)^*UG(\widetilde{D}_1^* - D_2) - \\ - i(\widetilde{D}_1^* + iD_2)^*UG(\widetilde{D}_1^* + iD_2) + i(\widetilde{D}_1^* - iD_2)^*UG(\widetilde{D}_1^* - iD_2)\}.$$

Отсюда следует, что можно ограничиться рассмотрением функции вида $F_1 = D^*UGD$, $D \in \mathfrak{S}_2$. Факторизуем теперь оператор D, $D = AB$, $A \in \mathfrak{S}_2$, $B \in \mathfrak{S}_\infty$, и положим $F = A^*UGA$. Проверим, что функция F удовлетворяет условиям леммы 1. Действительно,

$$2F_R(z) = A^*(U(U-z)^{-1} + (U^* - \bar z)^{-1} U^*) A =$$
$$= A^*(U^* - \bar z)^{-1}((U^* - \bar z) U + U^*(U - z))(U - z)^{-1} A =$$
$$= A^*(U^* - \bar z)^{-1}(2 - 2(zU^*)_R)(U - z)^{-1} A \geqslant 0,$$

так как

$$2 - 2(zU^*)_R \geqslant 2(1 - \|zU^*\|) I = 2(1 - |z|) I > 0.$$

Лемма 2 вытекает теперь из леммы 1.

ЛЕММА 3. *Пусть U — унитарный оператор в $\mathscr{H}$, $E(\cdot)$—его спектральная мера и Δ — борелевское подмножество на окружности C такое, что $E(\Delta) = 0$,* $\operatorname{mes}\Delta > 0$. *Тогда при почти всех ζ, $\zeta \in \Delta$,*

$$\mathfrak{S}_2 - \lim_{z \to \zeta} \left(D_1 G(z) D_2 - D_1 G\left(\frac{1}{\bar z}\right) D_2 \right) = 0,$$

где $z \to \zeta$ угловым образом, $G(z) = (U - z)^{-1}$, $|z| \neq 1$, а $D_i \in \mathfrak{S}_2$, $i = 1, 2$.

Доказательство вытекает из леммы 2 и известной теоремы И. И. Привалова [7] о граничных значениях интегралов типа Коши (эта теорема применяется к функции Φ вида

$$\Phi(z) = (D_1 G(z) D_2 f, g) = \int_{|\zeta|=1} \frac{\psi(\zeta)\, d\mu(\zeta)}{z - \zeta}, \quad |z| \neq 1,$$

где μ — мера из представления п. 3) теоремы В

$$f, g \in \int_C \oplus L(\zeta) d\mu(\zeta)$$

и

$$\psi(\zeta) = ((D_2 f)(\zeta), (D_1^* g)(\zeta)), \ \zeta \in C).$$

ЛЕММА 4. *Пусть $\mathfrak{S}$ — с.-н. идеал кольца всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Если A и B — самосопряженные (может быть неограниченные) операторы в $\mathscr{H}$ и $A - B \in \mathfrak{S}$, то и $U_A - U_B \in \mathfrak{S}$. Здесь $U_A = (A + i)\ (A - i)^{-1}$ — преобразование Кэли оператора A.*

Доказательство.

$$U_A - U_B = (B - i)^{-1}((B - i)(A + i) -$$
$$-(B + i)(A - i))(A - i)^{-1} = 2i(B - i)^{-1}(B - A)(A - i)^{-1} \in \mathfrak{S}.$$

ЛЕММА 5. *Пусть* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *последовательности комплексных чисел*, $|\lambda_k| = |\mu_k| = 1$, $k \geqslant 1$, *всюду плотные на окружности* C. *Тогда при некоторой перестановке* $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ *натурального ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k - \mu_{p_k}| < \infty$.

Доказательство леммы 5 лишь незначительными деталями отличается от доказательства одного предложения Дж. фон Неймана ([8] или [9], стр. 326) и потому может быть опущено*).

4. Доказательство теоремы 1. Первая часть теоремы уже доказана в начале. п. 2. Чтобы доказать второе утверждение теоремы, представим оператор $U + K - \lambda$, $K \in \mathfrak{S}_1$, в виде

$$U + K - \lambda = (I + K(U - \lambda)^{-1})(U - \lambda), \lambda \notin C.$$

Рассмотрим функции $d_{\pm}$:

$$d_+(\lambda) = \det_2(I + K(U - \lambda)^{-1}), \quad |\lambda| < 1,$$

$$d_-(\lambda) = \det_2(I + K(U - \lambda)^{-1}), \quad |\lambda| > 1,$$

где $\det_2(I + A), A \in \mathfrak{S}_1$ (регуляризованный определитель порядка 2) определяется равенством $\det_2(I + A) = \det(I + A) \cdot \exp(\mathrm{Sp}\, A)$ (см. [1], стр. 211). Легко видеть, что $\det_2(I + AB) = \det_2(I + BA)$; $A, B \in \mathfrak{S}_2$; и, следовательно,

$$d_{\pm}(\lambda) = \det_2 \ (I + D_1(U - \lambda)^{-1} D_2),$$

где $K = D_2 D_1$ и $D_i \in \mathfrak{S}_2$, $i = 1, 2$. Если воспользоваться теперь непрерывной зависимостью $\det_2(I + A)$ от оператора A в метрике $\mathfrak{S}_2$ ([1], стр. 212) и леммой 3, то заметим, что

$$\lim_{\lambda \to \zeta} \left(d_+(\lambda) - d_-\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}\right)\right) = 0 \qquad (1)$$

при почти всех ζ, $\zeta \in \Delta$, где Δ — борелевское подмножество окружности C такое, что $E(\Delta) = 0$, $\mathrm{mes}\, \Delta > 0$, а $E(\cdot)$ — спектральная мера оператора U (см. теоремы Б и В).

*) Из леммы 5, в частности, вытекает, что если A и B — самосопряженные операторы с $\sigma(A) = \sigma(B) = (-\infty, \infty)$, то $\| UAU^{-1} - B\|_{\gamma} < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, U — некоторый унитарный оператор, а $\mathfrak{S}$—с.-н.—идеал, $\mathfrak{S} \neq \mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S} \supset \mathfrak{S}_1$.

Теперь легко закончить доказательство теоремы 1. Так как функция d_+ регулярна в круге $\{\lambda : |\lambda| < 1\}$, то либо $d_+(\lambda) \equiv 0$, $|\lambda| < 1$, либо $d_+(\lambda) \neq 0$, за исключением, может быть, дискретного множества точек, сгущающегося только к окружности C. Последний случай означает как раз, что $\sigma_e(U+K) = \sigma_e(U)$, а первый случай невозможен. Действительно, если $d_+(\lambda) \equiv 0$, $|\lambda| < 1$, то из равенства (1) вытекает, что функция d_- имеет почти всюду на множестве Δ угловые граничные значения, равные нулю. Следовательно (теорема единственности Н. Н. Лузина, [7], стр. 292), $d_- \equiv 0$, что невозможно. Теорема доказана.

5. Доказательство теоремы 2. В доказательстве нуждается только первое утверждение теоремы 2, так как ее вторая часть содержится уже в теореме А.

Пусть $\mathfrak{S}$ — с.-н. идеал, упомянутый в условии теоремы 2, U — унитарный оператор с $\sigma(U) = C$. Не умаляя общности, считаем, что $\lambda = 1$ не является собственным числом оператора U. Пусть A и H — самосопряженные операторы в $\mathcal{H}$, преобразования Кэли которых совпадают соответственно с операторами U и $\tilde{S}$, где $\tilde{S}$ — оператор в $\mathcal{H}$, унитарно эквивалентный оператору сдвига S в пространстве L^2. По теореме С. Курода [10] существуют самосопряженные операторы B и L с чисто точечным спектром такие, что $B - A \in \mathfrak{S}$ и $H - L \in \mathfrak{S}$. Спектры операторов U_B и U_L также точечные, и

$$U_B - U_A = U_B - U \in \mathfrak{S},\quad U_L - U_H = U_L - \tilde{S} \in \mathfrak{S} \quad \text{(лемма 4)}.$$

Применяя лемму 5 к последовательностям собственных чисел операторов U_B и U_L, убеждаемся, что существует унитарный оператор V такой, что $U_B - VU_LV^{-1} \in \mathfrak{S}_1$. Следовательно,

$$U - V\tilde{S}V^{-1} = (U - U_B) + (U_B - VU_LV^{-1}) + \\ + (VU_LV^{-1} - V\tilde{S}V^{-1}) \in \mathfrak{S}.$$

Из теоремы 1, п. 1) теперь вытекает, что

$$\sigma_e(U + K) = D = \{z : |z| \leqslant 1\}$$

при соответственном выборе оператора K, $K \in \mathfrak{S}$. Теорема доказана.

Ленинградское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило
1.III.1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, М., 1965.

[2] Wermer J., On invariant subspaces of normal operators, Proc. Amer. Math. Soc., 3, № 2 (1952), 270—277.

[3] Никольский Н. К., Об инвариантных подпространствах унитарных операторов, Вестник Ленингр. ун-та. Сер. матем., № 19 (1966), 36—43.

[4] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, т. 1, М., 1962.

[5] Бирман М. Ш., Энтина С. Б., Стационарный подход в абстрактной теории рассеяния, Изв. АН СССР. Сер. матем., 31, № 2 (1967), 401—430.

[6] de Branges L., Perturbation of selfadjoint transformations, Amer. J. Math., 84, № 4 (1962), 543—560.

[7] Привалов И. И., Рраничные свойства аналитических функций, М.—Л., 1950.

[8] von Neumann J., Charakterisierung des Spektrum eines Integraloperators, Act. sc. et ind., Paris, 1935.

[9] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М., 1966.

[10] Kuroda S. T., On a theorem of Weyl-von Neumann, Proc. Japan Acad., 34, № 1 (1958), 11—15.