С. Н. Селезнева, О сложности задания k-значных функций обобщенно-поляризованными полиномами, *Дискрет. матем.*, 2009, том 21, выпуск 4, 20–29

DOI: 10.4213/dm1068

Дискретная математика

том 21 выпуск 4 * 2009

УДК 519.7

О сложности задания k-значных функций обобщенно-поляризованными полиномами

© 2009 г. С. Н. Селезнева

Рассматриваются обобщенно-поляризованные полиномы k-значных функций (при простых k). Доказано, что по каждому вектору поляризации каждая k-значная функция задается однозначным обобщенно-поляризованным полиномом. Найдены верхняя и нижняя оценки функций Шеннона степени и длины обобщенно-поляризованных полиномов k-значных функций.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 07–01–00444 и 09–01–00701а.

1. Введение

Одной из естественных форм задания функций являются полиномы. В зависимости от вида слагаемых рассматриваются обычные [1], поляризованные [2, 3], обобщенные [4, 5] полиномы и исследуется сложность задания функций такими полиномами.

В настоящей работе вводятся обобщенно-поляризованные полиномы для k-значных функций (при простых k) и находятся оценки сложности задания такими полиномами k-значных функций.

2. Основные понятия

Пусть $k \geqslant 2$, $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Назовем k-значной функцией отображение $f^n\colon E_k^n \to E_k$, $n = 0, 1, \ldots$. Множество всех k-значных функций обозначим P_k, множество всех k-значных функций, зависящих от n переменных, обозначим P_k^n.

Пусть k — простое число. Будем рассматривать сложение и умножение по модулю k.

Произведение вида $x_{i_1}^{m_1} \ldots x_{i_r}^{m_r}$, в котором все переменные попарно различны, называется мономом. Степенью монома X называется число

$$\deg(X) = \sum_{j=1}^{r} m_j.$$

Будем считать константу 1 вырожденным мономом степени 0.

Сумма вида $\sum_{i=1}^{l} c_i X_i$, где $c_i \in E_k \setminus \{0\}$ — коэффициенты, X_i — различные мономы, $i = 1, \ldots, l$, называется полиномом. Число слагаемых полинома P называется его длиной $l(P)$, максимальная степень его слагаемых называется степенью $\deg(P)$ полинома. Мы будем полагать константу 0 вырожденным обобщенным полиномом с длиной и степенью, равными 0.

Известно, что каждую k-значную функцию можно однозначно задать полиномом по модулю k тогда и только тогда, когда k — простое число [1].

Введем понятие обобщенно-поляризованного полинома.

Обозначим D_m, $m = 1, \dots, k-1$. множество всех k-значных одноместных функций, степень которых равна m. Пусть

$$\widetilde{D} = D_{k-1} \times \dots \times D_1.$$

Обобщенным вектором поляризации назовем вектор $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$, в котором $\delta_i = (s_{i,k-1}(x_i), \dots, s_{i,1}(x_i)) \in \widetilde{D}$, то есть степень полинома $s_{i,m}(x_i)$ равна m.

Обобщенно-поляризованным мономом по вектору δ называется произведение вида $\prod_{j=1}^{r} s_{i_j,m_j}(x_{i_j})$, в котором все переменные попарно различны. Степенью обобщенно-поляризованного монома X называется число

$$\deg(X) = \sum_{j=1}^{r} m_j.$$

Обобщенно-поляризованным полиномом по вектору δ назовем сумму различных обобщенно поляризованных по тому же вектору мономов с ненулевыми коэффициентами из E_k. Число слагаемых обобщенно-поляризованного полинома P назовем его длиной $l(P)$, максимальную степень слагаемых — его степенью $d(P)$.

3. О задании обобщенно-поляризованными полиномами k-значных функций

Теорема 1. *Пусть k — простое число. Для каждого вектора поляризации δ для каждой k-значной функции $f(x_1, \dots, x_n)$ существует однозначно определенный задающий ее обобщенно-поляризованный полином по этому вектору.*

Доказательство. Вначале докажем существование для каждой функции задающего ее обобщенно-поляризованного полинома по каждому вектору поляризации.

Проведем индукцию по значению n.

В качестве базы индукции возьмем случай $n = 1$. Пусть $\delta = (s_{k-1}(x), \dots, s_1(x))$, где $\deg(s_i) = i$, $i = k-1, \dots, 1$, — вектор поляризации.

Пусть дана функция $f(x) \in P_k^1$,

$$f(x) = c_{k-1}x^{k-1} + \dots + c_1 x + c_0,$$

где $c_{k-1}, \dots, c_1, c_0 \in E_k$.

Запишем функцию $f(x)$ обобщенно-поляризованным полиномом по вектору δ. Применим деление полиномов с остатком и получим

$$\begin{aligned}
f(x) &= c'_{k-1}s_{k-1}(x) + g_{k-2}(x), && \deg(g_{k-2}) \leqslant k-2,\\
g_{k-2}(x) &= c'_{k-2}s_{k-2}(x) + g_{k-3}(x), && \deg(g_{k-2}) \leqslant k-2,\\
&\dots,\\
g_1(x)c's_1(x) &= c_0, && c'_0, c'_1, \dots c'_{k-1} \in E_k.
\end{aligned}$$

Тогда

$$f(x) = c'_{k-1}s_{k-1}(x) + \ldots + c'_1 s_1(x) + c'_0$$

есть обобщенно-поляризованный полином по вектору δ для функции $f(x)$.

Опишем индуктивный переход. Пусть для каждой функции от n переменных найдется обобщенно-поляризованный по каждому вектору поляризации полином.

Рассмотрим функцию $f(y, x_1, \ldots, x_n) \in P_k^{n+1}$:

$$f(y, x_1, \ldots, x_n) = y^{k-1} f_{k-1}(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + y f_1(x_1, \ldots, x_n) + f_0(x_1, \ldots, x_n).$$

Пусть $\delta = (\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n)$ — вектор поляризации и $\delta' = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$. Учитывая предположение индукции, запишем каждую из функций $f_{k-1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_1(x_1, \ldots, x_n)$, $f_0(x_1, \ldots, x_n)$ обобщенно-поляризованным по вектору δ' полиномом.

Затем, как при описании базиса индукции, проводя деление полиномов с остатком, поляризуем переменную y по вектору δ_0. При этом операции сложения и умножения на число с функциями от переменных $x_1, \ldots, x_n$ проводим формально над обобщенно-поляризованными по вектору δ' полиномами. Получим обобщенно-поляризованный полином по вектору δ для функции $f(y, x_1, \ldots, x_n)$.

Теперь докажем, что для каждой функции можно построить не более одного задающего ее обобщенно-поляризованного полинома по каждому вектору поляризации.

Пусть $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ — вектор поляризации. Подсчитаем число обобщенно-поляризованных по вектору δ полиномов от переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Обобщенно-поляризованных по вектору δ мономов от переменных $x_1, \ldots, x_n$ можно составить k^n (каждая переменная x_i может либо не входить в моном, либо содержаться в нем в виде $s_{i,m}(x_i)$, $m = k-1, \ldots, 1$). Из этих мономов можно построить k^{k^n} обобщенно-поляризованных по вектору δ полиномов. Таким образом, число обобщенно-поляризованных по вектору δ полиномов от переменных $x_1, \ldots, x_n$ совпадает с числом функций от этих же переменных.

Значит, каждая функция задается обобщенно-поляризованным полиномом по каждому вектору поляризации однозначно. Теорема 1 доказана.

Обобщенно-поляризованный полином для функции f по вектору поляризации δ обозначим $P^{\delta}(f)$.

Заметим, что обобщенно-поляризованный полином для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ по вектору поляризации $\delta = ((x_1^{k-1}, \ldots, x_1), \ldots, (x_n^{k-1}, \ldots, x_n))$ является обычным полиномом. Будем обозначать его $P(f)$.

Поляризованный полином из [3] для функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k^n$ по вектору поляризации $(d_1, \ldots, d_n) \in E_k^n$ является частным случаем обобщенно-поляризованного полинома по вектору поляризации $\delta = (((x_1 + d_1)^{k-1}, \ldots, x_1 + d_1), \ldots, ((x_n + d_n)^{k-1}, \ldots, x_n + d_n))$. Заметим, что для булевых функций обобщенно-поляризованные полиномы совпадают с поляризованными полиномами из [2].

4. О сложности обобщенно-поляризованных полиномов

Введем сложностные характеристики k-значных функций в классе обобщенно-поляризованных полиномов. Для функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2^n$ ее длиной $l^{GPP}(f)$ (степенью $d^{GPP}(f)$) в классе обобщенно-поляризованных полиномов назовем минимальную длину (минимальную степень) среди всех обобщенно-поляризованных полиномов, задающих f.

Введем функции Шеннона длины и степени k-значных функций в классе обобщенно-поляризованных полиномов, полагая

$$L_k^{GPP}(n) = \max l^{GPP}(f), \qquad D_k^{GPP}(n) = \max d^{GPP}(f),$$

где максимум берется по всем функциям, зависящим от n переменных.

Для функции Шеннона $L_k^{PP}(n)$ длины поляризованных полиномов по векторам поляризации $(d_1, \ldots, d_n) \in E_k^n$ известны следующие оценки:

(1) $L_2^{PP}(n) = \left\lfloor \frac{2}{3} 2^n \right\rfloor$ (см. [2]),

(2) $L_k^{PP}(n) \leqslant \frac{k(k-1)}{k(k-1)+1} k^n$ при $k \geqslant 3$ (см. [3]),

(3) $\frac{k-1}{k} k^n \lesssim L_k^{PP}(n)$ при $n \to \infty$ (см. [6]),

(4) $L_k(1) = k - 1$ (см. [7]).

Мы докажем следующие оценки функции Шеннона степени и длины обобщенно-поляризованных полиномов k-значных функций:

(1) $D_k^{GPP}(n) = (k-1)n$;

(2) $\frac{k-1}{k} k^n \lesssim L_k^{GPP}(n)$ при $n \to \infty$;

(3) $L_k^{GPP}(n) \leqslant \frac{k}{k+1} k^n$.

Заметим, что нижние мощностные оценки для поляризованных и обобщенно-поляризованных полиномов совпадают. Верхняя оценка обобщенно-поляризованных полиномов k-значных функций соответствует верхней оценке поляризованных полиномов булевых функций.

Вначале установим оценку степени обобщенно-поляризованных полиномов k-значных функций.

Теорема 2. *Пусть k — простое число. Тогда*

$$D_k^{GPP}(n) = (k-1)n.$$

Доказательство. Из доказательства теоремы 1 следует, что для каждой функции $f \in P_k$ для каждого вектора поляризации δ верно, что $\deg(P^\delta(f)) = \deg(P(f))$. Отсюда следует утверждение теоремы 2.

Теперь получим нижнюю и верхнюю оценки длины обобщенно-поляризованных полиномов k-значных функций.

Теорема 3. *Пусть k — простое число. Тогда*

$$\frac{k-1}{k} \lesssim L_k^{GPP}(n), \qquad n \to \infty.$$

Доказательство. Пусть L, $L \leqslant (k-1)k^{n-1}$, — некоторое натуральное число. Найдем число обобщенно-поляризованных полиномов длины, не большей L, задающих функции от переменных $x_1, \dots, x_n$.

Всего число мономов над переменными $x_1, \dots, x_n$ есть k^n, полиномов длины, не большей L, из них можно составить $\sum_{i=0}^{L} \binom{k^n}{i}(k-1)^i$.

Каждую переменную можно обобщенно-поляризовать не более, чем $(k^k)^{(k-1)}$ способами (не более k^k вариантов обобщенной поляризации для каждой степени переменной и $k-1$ степень переменной).

Следовательно, общее число обобщенно-поляризованных полиномов от переменных $x_1, \dots, x_n$ длины, не большей L, не превосходит

$$\sum_{i=0}^{L} \binom{k^n}{i} (k-1)^i (k^k)^{(k-1)n} \tag{1}$$

Для оценки полученного выражения воспользуемся следующими свойствами.

1. Для всех целых $n \geqslant 1$ и $0 \leqslant i \leqslant n$ верно неравенство

$$\binom{n}{i} \leqslant \frac{n^n}{i^i (n-i)^{n-i}},$$

полагаем $0^0 = 1$.

Доказательство этого свойства можно провести индукцией по значению n.

2. Рассмотрим функцию действительного аргумента

$$H_k(x) = x \log_k \frac{1}{x} + (1-x) \log_k \frac{1}{1-x} + x \log_k (k-1)$$

на интервале $(0, 1)$. Она называется функцией k-значной энтропии.

Несложно проверить, что

(1) $\lim\limits_{x \to 0} H_k(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to 1} H_k(x) = \log_k(k-1),$

(2) на полуинтервале $(0, (k-1)/k]$ функция $H_k(x)$ монотонно возрастает, на полуинтервале $[(k-1)/k, 1)$ функция $H_k(x)$ монотонно убывает, в точке $(k-1)/k$ она достигает своего максимума, и $H_k((k-1)/k) = 1$.

Оценивая выражение (1) с использованием свойств 1 и 2, находим, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{L} \binom{k^n}{i} (k-1)^i (k^k)^{(k-1)n} &\leqslant L \binom{k^n}{L} (k-1)^L k^{k(k-1)n} \\ &\leqslant L \frac{(k^n)^{k^n}}{L^L (k^n - L)^{k^n - L}} (k-1)^L k^{k(k-1)n} \\ &\leqslant L k^{H_k(L/k^n) k^n} k^{k(k-1)n} \end{aligned} \tag{2}$$

Пусть ε — положительная константа и $L \leqslant (k-1)/k - \varepsilon)k^n$. Тогда по свойствам функции k-значной энтропии найдется такая действительная положительная константа ε_1, что

$$H_k\left(\frac{L}{k^n}\right) \leqslant H_k\left(\frac{k-1}{k} - \varepsilon\right) \leqslant 1 - \varepsilon_1.$$

Отсюда для выражения (2) находим, что

$$Lk^{H_k(L/k^n)k^n}k^{k(k-1)n} \leqslant \left(\frac{k-1}{k}-\varepsilon\right)k^n k^{(1-\varepsilon_1)k^n}k^{k(k-1)n}.$$

Полученное выражение при $n \to \infty$ растет медленнее, чем k^{k^n}. Другими словами, для каждой действительной константы $\varepsilon > 0$ при $L \leqslant ((k-1)/k-\varepsilon)k^n$ обобщенно-поляризованных полиномов длины, не большей L, не хватит, чтобы задать все функции от переменных $x_1, \dots, x_n$. Отсюда следует, что при $n \to \infty$

$$\frac{k-1}{k}k^n \lesssim L_k^{GPP}(n).$$

Теорема 3 доказана.

Из теоремы 3 следует, что при задании k-значных функций обобщенно-поляризованными полиномами длину “самой сложной” функции асимптотически можно уменьшить не более, чем в константу раз.

Теорема 4. *Пусть k — простое число. Тогда*

$$L_k^{GPP}(n) \leqslant \frac{k}{k+1}k^n.$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по числу переменных функции.

В качестве базиса индукции возьмем случай $n = 1$. Рассмотрим $f(x) \in P_k^1$. Пусть $\deg(f) = m$, $m \geqslant 1$. Тогда длина обобщенно-поляризованного полинома функции $f(x)$ по вектору поляризации $\delta = (x^{k-1}, \dots, x^{m+1}, f(x), x^{m-1}, \dots, x)$ равна 1.

Опишем индуктивный переход.

Пусть

$$f(y, x_1, \dots, x_n) = y^{k-1}f_{k-1}(x_1, \dots, x_n) + \ldots + yf_1(x_1, \dots, x_n) + f_0(x_1, \dots, x_n).$$

По предположению индукции функцию $f_{k-1}(x_1, \dots, x_n)$ можно так задать обобщенно-поляризованным полиномом по некоторому вектору $\delta' = (\delta_1, \dots, \delta_n)$, что

$$l(P^{\delta'}(f_{k-1})) \leqslant \frac{k}{k+1}k^n.$$

Будем полагать, что все рассматриваемые дальше в доказательстве функции от переменных $x_1, \dots, x_n$ записаны по вектору поляризации δ'.

Найдем такой вектор поляризации $\delta = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n)$, в котором $(\delta_1, \dots, \delta_n) = \delta'$, что длина обобщенно-поляризованного полинома по нему функции $f(y, x_1, \dots, x_n)$ не больше $k^{n+2}/(k+1)$.

В векторе δ неизвестна компонента δ_0. Вектор δ_0 построим последовательным уточнением.

Для уточнения вектора δ_0 проведем последовательно шаги $1, 2, \dots, k-1$.

Опишем шаг i, $1 \leqslant i \leqslant k-1$. Пусть на предыдущем шаге $i-1$ был получен вектор

$$\delta_0^{i-1} = (s_{k-1}^{i-1}(y), \dots, s_{(k-1)-(i-1)}^{i-1}(y), y^{(k-1)-i}, \dots, y),$$

вектор

$$\delta^{i-1} = (\delta_0^{i-1}, \delta_1, \dots, \delta_n)$$

и функция

$$F_{i-1}(y, x_1, \ldots, x_n) = s_{k-1}^{i-1}(y) f_{k-1}^{i-1}(x_1, \ldots, x_n) + \ldots \\ + s_{(k-1)-(i-1)}^{i-1}(y) f_{(k-1)-(i-1)}^{i-1}(x_1, \ldots, x_n),$$

для длины L_{i-1} обобщенно-поляризованного полинома по вектору δ^{i-1} которой справедливо равенство

$$L_{i-1} = \sum_{j=0}^{i-1} l(P^{\delta'}(f_{(k-1)-j}^{i-1})) \leqslant \beta_{i-1} k^n,$$

где β_{i-1} — некоторая константа.

Если $i = 1$, то положим

$$\delta_0^0 = (y^{k-1}, \ldots, y),$$
$$\delta^0 = (\delta_0^0, \delta_1, \ldots, \delta_n),$$

и

$$F_0(y, x_1, \ldots, x_n) = y^{k-1} f_{k-1}(x_1, \ldots, x_n).$$

Заметим, что

$$L_0 = l(P^{\delta'}(f_{k-1})) \leqslant \frac{k}{k+1} k^n$$

по предположению индукции. Поэтому положим $\beta_0 = k/(k+1)$.

Выберем индекс a, $0 \leqslant a \leqslant i-1$, так, что

$$l_i = l(P^{\delta'}(f_{(k-1)-a}^{i-1})) \geqslant \frac{1}{i} L_{i-1}.$$

Такой индекс a всегда можно выбрать.

Пусть X — произвольный обобщенно-поляризованный по вектору δ' моном над переменными $x_1, \ldots, x_n$. Пусть c' и c'' — коэффициенты, с которыми он входит в полиномы $P^{\delta'}(f_{(k-1)-a}^{i-1})$ и $P^{\delta'}(f_{(k-1)-i})$ соответственно. Тогда, если $c' \neq 0$, то

$$c' s_{(k-1)-a}^{i-1}(y) X + c'' y^{(k-1)-i} X = c'(s_{(k-1)-a}^{i-1}(y) + \frac{c''}{c'} y^{(k-1)-i}) X.$$

Пусть полиномы $g_{(k-1)-a}^{j}(x_1, \ldots, x_n)$ составлены из всех таких слагаемых $c'X$, для которых $c''.c' = j$, $j \in E_k$, а полином $g_{(k-1)-i}(x_1, \ldots, x_n)$ содержит все слагаемые полинома $P^{\delta'}(f_{(k-1)-i})$, которых нет в полиноме $P^{\delta'}(f_{(k-1)-a}^{i-1})$, со своими коэффициентами. Тогда

$$s_{(k-1)-a}^{i-1}(y) f_{(k-1)-a}^{i-1}(x_1, \ldots, x_n) + y^{(k-1)-i} f_{(k-1)-i}(x_1, \ldots, x_n) \\ = \sum_{j \in E_k} (s_{(k-1)-a}^{i-1}(y) + j y^{(k-1)-i}) g_{(k-1)-a}^{j}(x_1, \ldots, x_n) + y^{(k-1)-i} g_{(k-1)-i}(x_1, \ldots, x_n).$$

Заметим, что в полиномах $g_{(k-1)-a}^{j}(x_1, \ldots, x_n)$, $j \in E_k$, $g_{(k-1)-i}(x_1, \ldots, x_n)$ по построению нет совпадающих слагаемых, может быть, с различными коэффициентами. Кроме того, по построению

$$\sum_{j \in E_k} g_{(k-1)-a}^{j}(x_1, \ldots, x_n) = f_{(k-1)-a}^{i-1}(x_1, \ldots, x_n).$$

Выберем индекс $b \in E_k$ так, что

$$l_i^b = l(P^{\delta'}(g_{(k-1)-a}^b)) \geqslant \frac{1}{k} l_i.$$

Такой индекс b всегда можно выбрать.

Вектор поляризации δ_0^i получим из вектора поляризации δ_0^{i-1} заменой функции $s_{(k-1)-a}^{i-1}(y)$ на функцию $s_{(k-1)-a}^{i-1}(y) + by^{(k-1)-i}$.

Переобозначим компоненты вектора δ_0^i. Пусть

$$\delta_0^i = (s_{k-1}^i(y), \ldots, s_{(k-1)-i}^i(y), y^{(k-1)-(i+1)}, \ldots, y).$$

Пусть $\delta^i = (\delta_0^i, \delta_1, \ldots, \delta_n)$ и

$$F_i(y, x_1, \ldots, x_n) = F_{i-1}(y, x_1, \ldots, x_n) + y^{(k-1)-i} f_{(k-1)-i}(x_1, \ldots, x_n).$$

Запишем функцию $F_i(y, x_1, \ldots, x_n)$ по вектору поляризации δ^i.

По рассмотренному выше получаем, что

$$\begin{aligned}
F_i(y, x_1 \ldots, x_n) &= F_{i-1}(y, x_1, \ldots, x_n) + y^{(k-1)-i} f_{(k-1)-i}(x_1, \ldots, x_n) \\
&= \sum_{j \in \{0,1,\ldots,i-1\}} s_{(k-1)-j}^{i-1}(y) f_{(k-1)-j}^{i-1} + y^{(k-1)-i} f_{(k-1)-i}(x_1, \ldots, x_n) \\
&= \sum_{j \in \{0,1,\ldots,i-1\} \setminus \{a\}} s_{(k-1)-j}^{i-1}(y) f_{(k-1)-j}^{i-1}(x_1, \ldots, x_n) \\
&\quad + (s_{(k-1)-a}^{i-1}(y) f_{(k-1)-a}^{i-1}(x_1, \ldots, x_n) \\
&\quad + y^{(k-1)-i} f_{(k-1)-i}(x_1, \ldots, x_n)) \\
&= \sum_{j \in \{0,1,\ldots,i-1\} \setminus \{a\}} s_{(k-1)-j}^{i-1}(y) f_{(k-1)-j}^{i-1}(x_1, \ldots, x_n) \\
&\quad + (s_{(k-1)-a}^{i-1}(y) + by^{(k-1)-i}) f_{(k-1)-a}^{i-1}(x_1, \ldots, x_n) \\
&\quad + y^{(k-1)-i}(f_{(k-1)-i}(x_1, \ldots, x_n) - bf_{(k-1)-a}^{i-1}(x_1, \ldots, x_n)) \\
&= \sum_{j \in \{0,1,\ldots,i-1\} \setminus \{a\}} s_{(k-1)-j}^{i}(y) f_{(k-1)-j}^{i-1}(x_1, \ldots, x_n) \\
&\quad + s_{(k-1)-a}^{i}(y) f_{(k-1)-a}^{i-1}(x_1, \ldots, x_n) \\
&\quad + s_{(k-1)-i}^{i}(y)(f_{(k-1)-i}(x_1, \ldots, x_n) - bf_{(k-1)-a}^{i-1}(x_1, \ldots, x_n)).
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
f_{(k-1)-j}^i(x_1, \ldots, x_n) &= f_{(k-1)-j}^{i-1}(x_1, \ldots, x_m), \qquad j = 0, 1, \ldots, i-1; \\
f_{(k-1)-i}^i(x_1, \ldots, x_n) &= f_{(k-1)-i}^{i-1}(x_1, \ldots, x_m) - bf_{(k-1)-a}^{i-1}(x_1, \ldots, x_n).
\end{aligned}$$

Для того, чтобы найти длину полинома $P^{\delta^i}(F_i)$ перепишем его в виде

$$\begin{aligned}
&F_i(y, x_1, \ldots, x_n) \\
&= \sum_{j \in \{0,1,\ldots,i-1\} \setminus \{a\}} s_{(k-1)-j}^{i}(y) f_{(k-1)-j}^{i-1}(x_1, \ldots, x_n) + s_{(k-1)-a}^{i}(y) f_{(k-1)-a}^{i-1}(x_1, \ldots, x_n) \\
&\quad + s_{(k-1)-i}^{i}(y)(f_{(k-1)-i}(x_1, \ldots, x_n) - bf_{(k-1)-a}^{i-1}(x_1, \ldots, x_n))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j\in\{0,1,\dots,i-1\}\setminus\{a\}} s^i_{(k-1)-j}(y) f^{i-1}_{(k-1)-j}(x_1,\dots,x_n)\\
&\quad + s^i_{(k-1)-a}(y) \sum_{j\in E_k} g^j_{(k-1)-a}(x_1,\dots,x_n)\\
&\quad + s^i_{(k-1)-i}(y)\left(\sum_{j\in E_k\setminus\{b\}} \tilde g^j_{(k-1)-a}(x_1,\dots,x_n) + \tilde g_{(k-1)-i}(x_1,\dots,x_n)\right),
\end{aligned}
$$

где полиномы $P^{\delta'}(\tilde g^j_{(k-1)-a})$ и $P^{\delta'}(\tilde g_{(k-1)-i})$ состоят из тех же слагаемых, что и соответственно полиномы $P^{\delta'}(g^j_{(k-1)-a})$ и $P^{\delta'}(g_{(k-1)-i})$, может быть, с другими коэффициентами.

Следовательно, полиномы

$$
P^{\delta'}(g^b_{(k-1)-a}), \quad P^{\delta'}(\tilde g^j_{(k-1)-a}),\ j\in E_k\setminus\{b\}, \quad P^{\delta'}(\tilde g_{(k-1)-i}) \tag{3}
$$

не имеют общих слагаемых.

Таким образом,

$$
F_i(y,x_1,\dots,x_n) = P_1 + P_2 + P_3,
$$

где

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \sum_{j\in\{0,1,\dots,i-1\}\setminus\{a\}} s^i_{(k-1)-j}(y) f^{i-1}_{(k-1)-j}(x_1,\dots,x_n),\\
P_2 &= s^i_{(k-1)-a}(y) g^b_{(k-1)-a}(x_1,\dots,x_n)\\
&\quad + s^i_{(k-1)-i}(y)\left(\sum_{j\in E_k\setminus\{b\}} \tilde g^j_{(k-1)-a}(x_1,\dots,x_n) + \tilde g_{(k-1)-i}(x_1,\dots,x_n)\right),\\
P_3 &= \sum_{j\in E_k\setminus\{b\}} s^i_{(k-1)-a}(y) g^j_{(k-1)-a}(x_1,\dots,x_n).
\end{aligned}
$$

Тогда, с учетом свойства (3),

$$
\begin{aligned}
l(P^{\delta^i}(F_i)) &\leqslant l(P_1) + l(P_2) + l(P_3)\\
&\leqslant (\beta_{i-1}k^n - l_i) + k^n + \frac{k-1}{k} l_i \leqslant \beta_{i-1}k^n + k^n - \frac{l_i}{k}\\
&\leqslant \beta_{i-1}k^n + k^n - \frac{1}{ki}\beta_{i-1}k^n \leqslant \left(1 + \left(1 - \frac{1}{ki}\right)\beta_{i-1}\right) k^n.
\end{aligned}
$$

Положим

$$
\beta_i = 1 + \left(1 - \frac{1}{ki}\right)\beta_{i-1}.
$$

Заметим, что $F_{k-1}(y,x_1,\dots,x_n) = f(y,x_1,\dots,x_n)$.

Положим $\delta_0 = \delta_0^{k-1}$ и $\delta = (\delta_0,\delta_1,\dots,\delta_n)$.

Тогда обобщенно-поляризованный полином по вектору поляризации δ для функции $f(y,x_1,\dots,x_n)$ имеет длину, не большую $\beta_{k-1}k^n$, которую можно подсчитать по следующим равенствам при $\beta_0 = k/(k+1)$:

$$\beta_1 = 1 + \left(1 - \frac{1}{k}\right)\beta_0,$$

$$\beta_2 = 1 + \left(1 - \frac{1}{2k}\right)\beta_1,$$

$$\dots$$

$$\beta_{k-1} = 1 + \left(1 - \frac{1}{(k-1)k}\right)\beta_{k-2}.$$

В результате непосредственного подсчета получаем, что

$$\beta_{k-1} = \frac{k^2}{k+1},$$

или что

$$l(P^\delta(f)) \leqslant \frac{k}{k+1}k^{n+1}.$$

Индуктивный переход обоснован. Теорема 4 доказана.

Автор благодарит В. Б. Алексеева за ценные замечания, которые улучшили текст статьи.

Список литературы

1. Яблонский С. В., *Введение в дискретную математику*. Наука, Москва, 2001.
2. Перязев Н. А., Сложность булевых функций в классе полиномиальных поляризованных форм. *Алгебра и логика* (1995) **34**, №3, 323–326.
3. Селезнева С. Н., О сложности представления функций многозначных логик поляризованными полиномами. *Дискретная математика* (2002) **14**, №2, 48–53.
4. Кириченко К. Д., Верхняя оценка сложности полиномиальных нормальных форм булевых функций. *Дискретная математика* (2005) **17**, №3, 80–88.
5. Селезнева С. Н., Дайняк А. Б., О сложности обобщенных полиномов k-значных функций. *Вестник Московского Университета, сер. 15: вычисл. матем. и киберн.* (2008) 34–39.
6. Алексеев В. Б., Вороненко А. А., Селезнева С. Н., О сложности реализации функций k-значной логики поляризованными полиномами. В сб.: *Труды V Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем»*. МГУ, Москва, 2003, с. 8–9.
7. Селезнева С. Н., О сложности поляризованных полиномов функций многозначных логик, зависящих от одной переменной. *Дискретная математика* (2004) **16**, №2, 117–120.

Статья поступила 21.01.2009.