С. А. Гизунов, В. А. Носов, Сложность распознавания классов Шеффера,
Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1996, номер 4, 7–12

Замечание 1. Поясним необходимость приближенного вычисления функций и введения величины Approx. Можно показать, что независимо от r и c мощность классов $\widehat{H}^N_{r,c}$ и $H^N_{r,c}$ при $N\to\infty$ есть $2^{N(1+o(1))}$, поэтому для точной реализации функций из этих классов потребуется сложность $\geqslant \rho N/\log_2 N(1+o(1))$ (на самом деле справедлива и верхняя оценка того же вида). Переход же к приближенной реализации существенно снижает сложность. Что же касается погрешности, которая возникает при приближенном вычислении, то она не столь существенна, так как сами функции из $\widehat{H}^N_{r,c}$ и $H^N_{r,c}$ можно рассматривать как средство для приближенного вычисления непрерывных функций из $H_{r,c}$.

Замечание 2. Мы рассматривали 1-приближение в равномерной метрике $\|f\|=\max\limits_{x\in I_N}|f(x)|$. Переход к метрикам «в среднем»: $\|f\|_p=$ $=\left(\frac{1}{N}\sum\limits_{x\in I_N}|f(x)|^p\right)^{1/p}$, вообще говоря, позволяет уменьшить Approx и L^{Approx}, но порядок этих величин останется тем же; константы c_1 и c_2 можно выбрать общими для всех таких метрик.

Пользуясь случаем, автор выражает глубокую благодарность своему учителю О. Б. Лупанову за постановку задач и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А. Н. Различные подходы к оценке трудности приближенного задания и вычисления функций//Proc. Intern. Congr. Math. Stockholm. 1963. 230—250.
2. Офман Ю. О приближенной реализации непрерывных функций на автоматах//Докл. АН СССР. 1963. **152**, № 4. 823—826.
3. Офман Ю. Об алгоритмической сложности дискретных функций//Докл. АН СССР. 1962. **145**, № 1. 48—51.
4. Тогер А. В. О сложности некоторых функциональных классов//Докл. АН СССР. 1971. **199**, № 4. 789—791.
5. Асарин Е. А. О сложности равномерных приближений непрерывных функций//Успехи матем. наук. 1984. **39**, № 3. 157—169.
6. Аманжаев Г. Г. Дискретный аналог гладких функций//Алгебра, геометрия и дискретная математика в нелинейных задачах. М., 1991. 4—24.
7. Аманжаев Г. Г. Дискретные функции с заданным модулем непрерывности//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1992. № 5. 86—89.
8. Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М. ε-Энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах//Успехи матем. наук. 1959. **14**, № 2 (86). 3—86.
9. Лупанов О. Б. Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования//Проблемы кибернетики. 1965. Вып. 14. 31—110.
10. Лупанов О. Б. О синтезе некоторых классов управляющих систем//Проблемы кибернетики. 1963. Вып. 10. 63—97.

Поступила в редакцию
21.02.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 4

УДК 519.716

С. А. Гизунов, В. А. Носов

СЛОЖНОСТЬ РАСПОЗНАВАНИЯ КЛАССОВ ШЕФФЕРА

1. В работе [1] Шеффером была решена задача о сложности распознавания выполнимости формул, представляющих собой конъюнкцию отношений на множестве двоичных наборов.

Напомним соответствующий результат.

Пусть $R \subset [0, 1]^n$ — произвольное отношение на двоичных наборах длины n. Определим шесть классов отношений, которые в дальнейшем будем называть классами Шеффера.

1. Отношение R называется 0-выполнимым, если $(0, ..., 0) \in R$.
2. Отношение R называется 1-выполнимым, если $(1, ..., 1) \in R$.
3. Отношение R называется мультиаффинным, если R представимо как множество решений некоторой системы линейных уравнений над GF [2].
4. Отношение R называется биюнктивным, если R представимо как множество выполняющих наборов формулы, являющейся конъюнкцией дизъюнкций, каждая из которых содержит не более двух переменных.
5. Отношение R называется слабо положительным, если R представимо как множество выполняющих наборов формулы, являющейся конъюнкцией дизъюнкций, каждая из которых содержит не более одного переменного с отрицанием.
6. Отношение R называется слабо отрицательным, если R представимо как множество выполняющих наборов формулы, являющейся конъюнкцией дизъюнкций, каждая из которых содержит не более одного переменного без отрицания.

Пусть F — конечное множество отношений. Под F-формулой понимается произвольная конъюнкция отношений с переменными $x_1, x_2, ...$, число которых соответствует размерности участвующих отношений.

Через **SAT(F)** обозначим множество выполнимых F-формул. Справедлива

Теорема 1 [1]. *Если все отношения множества F принадлежат некоторому классу Шеффера, то задача распознавания принадлежности множеству* **SAT (F)** *полиномиально разрешима. Если все отношения множества F не принадлежат ни одному из классов Шеффера, то задача распознавания принадлежности множеству* **SAT(F)** *NP-полна.*

В связи с применением данного результата возникает проблема распознавания принадлежности произвольного отношения указанным классам [1, проблема 2]. В [1] она решена для мультиаффинных и биюнктивных отношений, если последние заданы списками элементов.

2. Каждое отношение $R \subset [0, 1]^n$ будем задавать булевой функцией $f(x_1, ..., x_n)$, где $f(a_1, ..., a_n) = 1$ тогда и только тогда, когда $(a_1, ..., a_n) \in R$. Переведем указанные определения на язык булевых функций и систем булевых уравнений.

Определение 1. Пусть $F = \{f_j(x_1, x_2, \ldots, x_{k_j}) \not\equiv 0 \mid j \in J\}$ — конечный набор булевых функций. Класс всевозможных систем уравнений

$$\{f_{j_i}(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik_{j_i}})\} = 1, \ i = \overline{1, m},$$

при любом выборе функций f_{j_i} из F, с любым конечным числом m уравнений в каждой системе и при любом выборе неизвестных x_{ij} из множества $X = \{x_1, x_2, ...\}$ называется классом F-систем. Обозначим этот класс символом $[F]_{nc}$. Задача распознавания совместности произвольной системы уравнений из класса F-систем называется задачей F-совместности.

Определение 2 [1]. Набор R_f лексикографически упорядоченных векторов из векторного пространства V_n, $n > 0$, называется для булевой функции $f: V_n \to V$, $V = GF[2]$ логическим отношением порядка n, если f является характеристической функцией этого набора.

Конечному набору булевых функций F из определения 1 поставим в соответствие множество логических отношений $R_F=\{R_{f_j} \mid j\in J\}$. Набор функций F называется P-набором, если существует полиномиальный алгоритм решения задачи F-совместности, и NP-полным набором, если задача F-совместности NP-полна. Здесь предполагается, что функции из набора F заданы в конъюнктивной нормальной форме (КНФ). Существует гипотеза, что NP-полные задачи не могут быть решены полиномиальными алгоритмами, поэтому классы систем уравнений, для которых задача распознавания совместности является NP-полной, можно считать труднорешаемыми.

Определение 3. Булева функция f называется:

а) 0-выполнимой, если $f(0, 0, ..., 0)=1$;

б) 1-выполнимой, если $f(1, 1, ..., 1)=1$;

в) аффинной, если функция f соответствует формуле вида

$$x_{i1}\oplus x_{i2}\oplus \ldots \oplus x_{ik}\oplus \alpha, \text{ где } \alpha\in\{0,\ 1\},\ k\geqslant 0;$$

г) мультиаффинной, если функция f соответствует КНФ вида

$$\bigwedge_{i=1}^{m} \mathfrak{B}_i(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik_i}), \text{ где } \mathfrak{B}_i \text{— аффинные функции, } k_i\geqslant 0;$$

д) биюнктивной, если функция f соответствует КНФ вида

$$\bigwedge_{i=1}^{m} (x_{i1}^{\alpha_{i1}} \vee x_{i2}^{\alpha_{i2}}), \text{ где } \alpha_{i1},\ \alpha_{i2}\in\{0,\ 1\};$$

е) слабо положительной, если функция f соответствует КНФ вида

$$\bigwedge_{i=1}^{m} (x_{i1}^{\alpha_i} \vee x_{i2} \vee \ldots \vee x_{ik_i}), \text{ где } \alpha_i\in\{0,\ 1\};$$

ж) слабо отрицательной, если функция f соответствует КНФ вида

$$\bigwedge_{i=1}^{m} (x_{i1}^{\alpha_i} \vee \bar{x}_{i2} \vee \ldots \vee \bar{x}_{ik_i}), \text{ где } \alpha_i\in\{0,\ 1\}.$$

Теорема 1 может быть переформулирована следующим образом.

Теорема 1, а. *Пусть F — конечное множество не тождественно равных нулю булевых функций, заданное множеством выполняющих наборов. Если F удовлетворяет хотя бы одному из включений* (а) — (е):

(а) $F\subseteq 1\text{—}\&$,
(б) $F\subseteq 0\text{—}\&$,
(в) $F\subseteq$ МАФ,
(г) $F\subseteq$ БИН,
(д) $F\subseteq$ СЛП,
(е) $F\subseteq$ СЛО,

где символы 1—&, 0—&, МАФ, БИН, СЛП, СЛО *обозначают соответственно множества всех* 1*-выполнимых,* 0*-выполнимых, мультиаффинных, биюнктивных, слабо положительных и слабо отрицательных функций, то задача F-совместности разрешима за полиномиальное время. В противном случае задача F-совместности NP-полна.*

Пусть F — произвольный набор булевых функций. Чтобы узнать, какова сложность задачи F-совместности, достаточно проверить, выполняется ли хотя бы одно из включений (а)—(е) теоремы 1, а.

Теорема 2. *Задача распознавания NP-полноты произвольного* *конечного набора булевых функций F полиномиально решаема, если функции из набора F заданы множеством выполняющих наборов.*

Доказательство. Согласно теореме 1, а для доказательства NP-полноты набора F достаточно показать, что для F не выполнено ни одно из включений (a)—(e). Чтобы проверить выполнение включений (a)—(e), достаточно проверить принадлежность каждой функции f из набора F соответствующему множеству.

Проверка включений $f \in 1$—& и $f \in 0$—& тривиальна.

Лемма 1 [1]. *Произвольная булева функция $f: V_n \to \{0, 1\}$ является мультиаффинной тогда и только тогда, когда для любых трех векторов, x, y и z из V_n выполнено условие*

$$\overline{f(x \oplus y \oplus z)}\, f(x)\, f(y)\, f(z) \equiv 0.$$

Лемма 2. *Произвольная булева функция $f: V_n \to \{0, 1\}$ является биюнктивной тогда и только тогда, когда для любых трех векторов x, y и z из V_n выполнено условие*

$$\overline{f(xy \oplus yz \oplus xz)}\, f(x)\, f(y)\, f(z) \equiv 0.$$

Доказательство. Пусть $\alpha \in V_n$. Для произвольного подмножества $J \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ символом $K_{1,J}$ обозначим вектор из V_n, для которого множество номеров единичных координат совпадает с J, символом $K_{0,J}$ — вектор, полученный из $K_{1,J}$ инвертированием всех координат. Множество J называется множеством перемены (см. [1]) для вектора $\alpha \in R_f$, если вектор $\alpha \oplus K_{1,J}$ тоже принадлежит R_f. В лемме 3.1.B из [1] показано, что отношение R_f соответствует биюнктивной функции тогда и только тогда, когда для любого вектора $\alpha \in R_f$ и для любых двух множеств перемены для этого вектора их пересечение тоже является множеством перемены для вектора α. Отсюда следует справедливость леммы. ■

Лемма 3. *Произвольная булева функция $f: V_n \to \{0, 1\}$ является слабо положительной тогда и только тогда, когда для любых векторов x, y из V_n выполнено условие* $\overline{f(x \vee y)}\, f(x)\, f(y) \equiv 0$, *и слабо отрицательной тогда и только тогда, когда для любых векторов x, y из V_n выполнено условие* $\overline{f(x \wedge y)}\, f(x)\, f(y) \equiv 0$.

Доказательство. Пусть $i \in \{0, 1\}$, J — непустое подмножество множества $N = \{1, 2, ..., n\}$, $\alpha \in V_n$. Обозначим символом $\mathrm{Sat}_{i,J}(f) = \{\alpha \in R_f, \alpha_j = i, j \in J\}$ множество всех векторов из R_f, у которых координаты с номерами из множества J равны i; символом $\mathrm{Cl}_{i,f}(J) = \cap\{j \mid \alpha_j = i \mid \alpha \in \mathrm{Sat}_{i,J}(f)\}$ — множество всех координат, которые равны i для каждого вектора из множества $\mathrm{Sat}_{i,J}(f)$. Множество J называется i-замкнутым, если $J = \mathrm{Cl}_{i,f}(J)$, и i-совместимым, если множество векторов $\mathrm{Sat}_{i,J}(f)$ не пусто. Рассмотрим множество векторов $\mathrm{Sat}_{i,J}(f)$, где J — произвольное 0-замкнутое и 0-совместимое подмножество множества N. По определению $J = \mathrm{Cl}_{i,f}(J)$. Но тогда вектор $K_{0,J}$ совпадает с дизъюнкцией всех векторов из R_f и, таким образом, принадлежит множеству $\mathrm{Cl}_{0,f}$, являющемуся подмножеством R_f. Согласно лемме 3.1.W из [1] отношение R_f слабо положительно. Второе утверждение леммы доказывается аналогично. ■

С учетом лемм 1—3 получаем, что для проверки включения $f \in$ МАФ ($f \in$ БИН, $f \in$ СЛП, $f \in$ СЛО) достаточно проверить замкнутость отношения R_f при действии соответствующих операций. Сложность проверки замкнутости, очевидно, полиномиальна.

Пусть теперь функции системы F заданы в КНФ.

Теорема 3. *Задача распознавания мультиаффинности, биюнктивности, слабо положительности и слабо отрицательности булевой функции, заданной в КНФ, является NP-полной.*

Доказательство. Принадлежность задачи классу NP следует из соотношений замкнутости, приведенных в теореме 2.

Пусть $f(x_1, ..., x_n)$ — произвольная индивидуальная задача «выполнимость КНФ».

1. Образуем функцию $f^*(x_1, ..., x_n, y_1, y_2) = f \cdot y_1 \vee y_2$, где y_1, y_2 — новые переменные. Данная формула может быть представлена в КНФ за полиномиальное от длины f время. Покажем, что f^* мультиаффинна тогда и только тогда, когда f невыполнима. Если f невыполнима, то $f^* \sim y_2$ и f^* мультиаффинна. Если f выполнима, то пусть $x_1{}^0 ... x_n{}^0$ — выполняющий набор. Тогда наборы $\xi_1 = x_1{}^0 ... x_n{}^0 10$, $\xi_2 = x_1{}^0 ... x_n{}^0 01$, $\xi_3 = x_1{}^0 ... x_n{}^0 11$ будут выполняющими для f^*, но набор $\xi_1 \oplus \xi_2 \oplus \xi_3 = (x_1{}^0 ... x_n{}^0 00)$ не выполняет функцию f^*, и, значит, f^* не мультиаффинна (по лемме 1).

2. Образуем функцию $f^*(x_1, ..., x_n, y_1, y_2, y_3) = (y_1 \vee y_2) \cdot f \vee y_3$. Аналогично показываем, что f^* биюнктивна тогда и только тогда, когда f невыполнима. Если f невыполнима, то утверждение очевидно. Если f выполнима, то пусть $x_1{}^0 ... x_n{}^0$ — выполняющий набор. Тогда наборы $\xi_1 = x_1{}^0 ... x_n{}^0 100$, $\xi_2 = x_1{}^0 ... x_n{}^0 010$, $\xi_3 = x_1{}^0 ... x_n{}^0 001$ будут выполняющими для f^*, но набор $\xi_1\xi_2 \oplus \xi_2\xi_3 \oplus \xi_1\xi_3 = (x_1{}^0 ... x_n{}^0 000)$ не является выполняющим для f^*, и, значит, f^* не биюнктивна (по лемме 2).

3. Образуем функцию $f^*(x_1, \ldots, x_n, y_1, y_2, y_3) = (\overline{y_1} \vee \overline{y_2}) \cdot f \vee \overline{y_3}$, где y_1, y_2, y_3 — новые переменные. Аналогично показываем, что f^* слабо положительна тогда и только тогда, когда f невыполнима.

4. Образуем функцию $f^*(x_1, ..., x_n, y_1, y_2, y_3) = (y_1 \vee y_2) \cdot f \vee y_3$, где y_1, y_2, y_3 — новые переменные. Аналогично показываем, что f^* слабо отрицательна тогда и только тогда, когда f невыполнима.

Следовательно, если существует полиномиальный алгоритм проверки принадлежности указанным классам Шеффера, то существует полиномиальный алгоритм проверки выполнимости КНФ. В силу NP-полноты задачи выполнимости [2] получаем требуемое. ■

3. Рассмотрим теперь вопрос о соотношениях между классами МАФ, БИН, СЛП, СЛО. Используя критерии из теоремы 2, легко показать, что

$$\text{СЛП} \cap \text{СЛО} \subseteq \text{БИН},$$

$$\text{МАФ} \cap \text{СЛП} \subseteq \text{СЛО},$$

$$\text{МАФ} \cap \text{СЛО} \subseteq \text{СЛП}.$$

Для каждой булевой функции f определим $(0, 1)$-набор $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$, где

$$\alpha_1 = \begin{cases} 1, \text{ если } f \in \text{СЛО}; \\ 0, \text{ если } f \notin \text{СЛО}, \end{cases} \quad \alpha_2 = \begin{cases} 1, \text{ если } f \in \text{СЛП}; \\ 0, \text{ если } f \notin \text{СЛП}, \end{cases}$$

$$\alpha_3 = \begin{cases} 1, \text{ если } f \in \text{БИН}; \\ 0, \text{ если } f \notin \text{БИН}, \end{cases} \quad \alpha_4 = \begin{cases} 1, \text{ если } f \in \text{МАФ}; \\ 0, \text{ если } f \notin \text{МАФ}. \end{cases}$$

Реализуемость наборов $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$ приведена в таблице.

СЛО	СЛП	БИН	МАФ	Функция
0	0	0	0	$0^{11}10110$
0	0	0	1	$0^{8}10010110$
0	0	1	0	$0^{10}101110$
0	0	1	1	$0^{10}101000$
0	1	0	0	$0^{9}1^{7}$
0	1	0	1	—
0	1	1	0	$0^{11}11001$
0	1	1	1	—
1	0	0	0	$0^{8}10000110$
1	0	0	1	—
1	0	1	0	$0^{8}10101000$
1	0	1	1	—
1	1	0	0	—
1	1	0	1	—
1	1	1	0	$0^{12}1011$
1	1	1	1	$0^{14}11$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schaefer Th. J. The complexity of satisfiability problems//Conf. Rec. 10 Ann. ACM Symp. Theory Comput. N. Y., 1978. 221—226.
2. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М., 1982.

Поступила в редакцию
28.10.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 4

УДК 515.12

В. А. Дулев

О БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ n-МНОГООБРАЗИЯХ

§ 1. Предварительные сведения

В работе используются два подхода к определению сильной и слабой бесконечномерности, введенные П. С. Александровым и Ю. М. Смирновым.

Определение 1 (П. С. Александров). Пространство X называется слабо бесконечномерным (в дальнейшем A-слабо бесконечномерным), если для любой счетной системы пар замкнутых множеств (A_i, B_i), $A_i \cap B_i = \varnothing$, $i \in N$, найдутся перегородки C_i (между A_i и B_i), такие, что $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i = \varnothing$.

Пространство, не являющееся A-слабо бесконечномерным, называется A-сильно бесконечномерным.