Ю. П. Красовский, Долгопериодная асимптотика решений эволюционных задач, *Функц. анализ и его прил.*, 1993, том 27, выпуск 4, 78–81

УДК 517.95

Долгопериодная асимптотика решений эволюционных задач

© 1993. Ю. П. Красовский

Рассматривая решение эволюционной задачи без начального условия как функцию времени на всей числовой оси, можно определить его долгопериодную составляющую. Она соответствует низкочастотной части преобразования Фурье этого решения. Выделение долгопериодных колебаний, описываемых этой составляющей, представляет значительный интерес при исследовании ряда прикладных задач, например, в геофизике и климатологии [1]. Здесь будет дано построение такой составляющей. Для этого построения мы используем приближенное решение задачи, которое обладает асимптотическими свойствами близости к точному решению на низких частотах и малости на высоких.

Будет рассмотрена следующая граничная задача:

$$\partial u/\partial t = Au + f \qquad \text{при } x \in \Omega, \tag{1}$$

$$B_j u = \varphi_j \qquad \text{при } x \in S,\ j = 1, \dots, m, \tag{2}$$

где Ω — область N-мерного евклидова пространства, $x = (x_1, \dots, x_N)$, S — граница области Ω и A, B_j — линейные, может быть, неограниченные операторы. Эти операторы являются замкнутыми и имеют область определения D, всюду плотную в $L_2(\Omega)$. Оператор A действует в $L_2(\Omega)$, а операторы B_j действуют из $L_2(\Omega)$ в $L_2(S)$. Функции u, f определены в бесконечном цилиндре $\Omega \times (-\infty, \infty)$, φ_j определены на его границе $S \times (-\infty, \infty)$, $f \in L_2(\Omega)$, $\varphi_j \in L_2(S)$, $u = u(x,t)$, $f = f(x,t)$, $\varphi_j = \varphi_j(x,t)$. Вопросы существования и единственности решения здесь не рассматриваются. Если (1), (2) — параболическая граничная задача, такое рассмотрение не вызывает затруднений, как показано в [5].

Решением задачи (1), (2) назовем функцию u, если эта функция при любом t имеет непрерывную производную $\partial u/\partial t$, $u \in D$, и удовлетворяет соотношениям (1), (2).

Вместо начального условия мы используем ограничение роста решения по времени, т.е. будем предполагать, что $u(x,t)$ удовлетворяет условиям

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant Ce^{\alpha|t|}, \qquad -\infty < t < \infty, \tag{3}$$

$$\|Au\|_{L_2(\Omega)} \leqslant Ce^{\alpha t}, \qquad t > 0, \tag{4}$$

где $\alpha > 0$ — некоторая константа, а C не зависит от t.

Наряду с задачей (1), (2) нам понадобится соответствующая стационарная задача. Она состоит в нахождении функции $v \in D$, которая удовлетворяет следующим уравнению и граничным условиям:

$$(pI + A)v = f \qquad \text{при } x \in \Omega, \tag{5}$$

$$B_j v = \varphi_j \qquad \text{при } x \in S,\ j = 1, \dots, m. \tag{6}$$

Здесь I — тождественный оператор, p — комплексная величина, $p=\xi+i\eta$. Если эта задача имеет единственное решение при любых $f\in L_2(\Omega)$, $\varphi_j\in L_2(S)$, то мы можем определить оператор Грина задачи (5), (6) $(pI+A)^{-1}$ и записать ее решение в виде $u=(pI+A)^{-1}\overline{f}$, где $\overline{f}$ — вектор-функция, $\overline{f}=(f,\varphi_1,\dots,\varphi_m)$. Предположим, что оператор $(pI+A)^{-1}$ существует при любом p, удовлетворяющем условию

$$\operatorname{Re} p<\beta, \tag{7}$$

и его норма допускает оценку

$$\|(pI+A)^{-1}\|\leqslant C(1+|p|^{\gamma})^{-1}, \tag{8}$$

где $\beta>\alpha$, $\gamma>1/2$ — некоторые фиксированные числа, а константа C зависит лишь от величины $\beta-\operatorname{Re}p>0$. Кроме того, предположим, что при некотором ξ, $\alpha<\xi<\beta$, существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2\xi t}\|\overline{f}(x,t)\|^2dt, \quad \text{где } \|\overline{f}\|^2=\|f\|^2_{L_2(\Omega)}+\sum_{j=1}^{m}\|\varphi_j\|^2_{L_2(S)}.$$

Заметим, что неравенство (8) может выполняться при $\gamma\leqslant 1$, если (5), (6) — эллиптическая граничная задача [2, 3].

С помощью преобразования Лапласа $u(x,t)$ доказывается следующая

Теорема 1. *Пусть $u(x,t)$, решение задачи* (1), (2), *удовлетворяет условиям* (3), (4), *а оператор A — условию* (8).

Тогда справедлива оценка

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}\leqslant C\int_{-\infty}^{t} e^{-2\xi(t-\tau)}\|\overline{f}(x,\tau)\|^2d\tau, \tag{9}$$

где $\alpha<\xi<\beta$, а константа C не зависит от f, t, $C=C(\beta-\xi)$.

Полученную оценку (9) используем для построения приближенного решения задачи (1), (2). Вначале приблизим при помощи полиномов от $t-\tau$ степени n при фиксированных x, t функции f, φ_j в метрике, определяемой правой частью неравенства (9):

$$f(x,\tau)=\sum_{i=0}^{n}a_i(x,t)(t-\tau)^i+R_n(x,\tau,t), \tag{10}$$

$$\varphi_j(x,\tau)=\sum_{i=0}^{n}b_{ij}(x,t)(t-\tau)^i+R'_{nj}(x,\tau,t). \tag{11}$$

Коэффициенты a_i, b_{ij} определяются из условия минимума следующих величин J, J_j:

$$J=\int_{-\infty}^{t}R_n^2e^{-2\mu(t-\tau)}d\tau, \qquad J_j=\int_{-\infty}^{t}R'^{\,2}_{nj}e^{-2\mu(t-\tau)}d\tau. \tag{12}$$

Здесь $\mu>0$ — некоторая константа, R_n и R'_{nj} выражены через f, a_i и φ_j, b_{ij} с помощью равенств (10) и (11) соответственно, а J, J_j рассматриваются как функции от a_i, b_{ij}.

Запишем соотношения (10), (11) с помощью вектор-функции:

$$\overline{f}(x,\tau)=\sum_{i=0}^{n}\overline{a}_i(x,t)(t-\tau)^i+\overline{R}_n,$$

где приняты обозначения

$$\overline{a}_i=(a_i,b_{i1},\ldots,b_{im}),\qquad \overline{R}_n=(R_n,R'_{n1},\ldots,R'_{nm}).$$

Определим функции $v_i(x,t)$ как решения следующей рекуррентной системы уравнений ($i=0,\ldots,n$):

$$v_n=-A^{-1}\overline{a}_n,\qquad v_i=A^{-1}\overline{a}_i-(i+1)\,A^{-1}\overline{v}_{i+1},\quad i=n-1,\ldots,0, \tag{13}$$

где $\overline{v}_i=(v_i,\ldots,0)$, а A^{-1} — оператор, дающий решение задачи (5), (6) при $p=0$. Теперь приближенное решение задачи (1), (2) $u_{n\mu}(x,t)$ мы определим с помощью равенства

$$u_{n\mu}=v_0(x,t).$$

Свойства приближенного решения описываются следующими теремами.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\|u-u_{n\mu}\|_{L_2(\Omega)}=0.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и преобразования Фурье по t функций u, Au, $\overline{f}$ непрерывны на некотором интервале $|\omega-\omega_0|<\delta$, $\delta>0$. Тогда имеет место оценка*

$$\|u^*(x,\omega)-u^*_{n\mu}(x,\omega)\|_{L_2(\Omega)}\leqslant M(\omega/\mu')^{n+1}\|\overline{f}^{\,*}(x,\omega)\|,$$

где $\mu'=\mu$ при $\mu\leqslant\beta$, $\mu'=\beta$ при $\mu>\beta$, константа M не зависит от ω, μ, а u^*, $u^*_{n\mu}$, $\overline{f}^{\,*}$ — преобразования Фурье функций u, $u_{n\mu}$, $\overline{f}$.

Главный член асимптотического разложения $u_{0\mu}$, согласно (13), при $n=0$ можно записать в виде

$$u_{0\mu}=-A^{-1}\overline{a}_0\qquad(\overline{a}_0=(a_0,b_{01},\ldots,b_{0m})),$$

$$a_0(x,t)=2\mu\int_{-\infty}^{t}e^{-2\mu(t-\tau)}f(x,\tau)\,d\tau,$$

$$b_{0j}(x,t)=2\mu\int_{-\infty}^{t}e^{-2\mu(t-\tau)}\varphi_j(x,\tau)\,d\tau,$$

где a_0, b_{0j} найдены из условий минимума величин J, J_j из (12):

$$\partial J/\partial a_0=0,\quad \partial J_j/\partial b_{0j}=0.$$

Аналогичным образом можно представить коэффициенты a_i, b_{ij} при $n\neq 0$, которые выражаются через коэффициенты разложения f, φ_j как функций от $s=2\mu(t-\tau)$ по многочленам Лагерра. В этом случае весовая функция $e^{-2\mu(t-\tau)}$ заменяется произведением ее на некоторый многочлен степени n по $t-\tau$. Поэтому из преобразования Фурье свертки и определения $u_{n\mu}$ через a_i, b_{ij}, согласно (13), для $u^*_{n\mu}$ получается оценка

$$\|u^*_{n\mu}(x,\omega)\|_{L_2(\Omega)}\leqslant M(\mu/\omega)\|\overline{f}^{\,*}(x,\omega)\|,$$

где $\omega > \mu$ и константа M не зависит от ω, μ. Она позволяет оценить приближенное решение на высоких частотах, если $\overline{f}^*$ непрерывно на этих частотах. Параметр μ, входящий в приближенное решение, определяет его свойства на низких и высоких частотах.

В случае когда (1), (2) является параболической граничной задачей, близость точного и приближенного решений может быть оценена в более сильной метрике, чем метрика пространства L_2, на основе априорных оценок решения при достаточной гладкости правых частей задачи [4].

Эволюционная задача (1), (2) может рассматриваться как естественное обобщение параболических граничных задач без начального условия. Легко видеть, что решение этой задачи может быть определено как предел решений задач с нулевым начальным условием при $t = t_0$, если $t_0 \to -\infty$. Такое определение решения задачи Дирихле для параболического уравнения было использовано в [5], где получена оценка, аналогичная (9). Там же показано, что константа β, ограничивающая показатель экспоненты в этой оценке, является точной, т.е. не может быть увеличена.

Литература

1. *Красовский Ю. П., Казаков С. И.* // Океанология. – 1992. – Т. 32, вып. 2. – С. 219–227. **2.** *Агранович М. С., Вишик М. И.* // УМН. – 1964. – Т. 19, вып. 3. – С. 53–161. **3.** *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. – М.: Мир, 1977. **4.** *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. **5.** *Красовский Ю. П.* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1991. – Т. 55, №2. – С. 439–443.

Экспериментальное отделение
Морского гидрофизического института
Академии наук Украины

Поступило в редакцию
27 апреля 1992 г.
В переработанном виде
25 марта 1993 г.

УДК 517.5

О непрерывности приведения гиперповерхностей в пространстве $\mathbb{C}^2$ к нормальной форме

© 1993. А. В. Лобода

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}^2$ с координатами $z = x + iy$, $w = u + iv$ вещественно-аналитическую гиперповерхность M вида $v = F(x, u, y)$. Пусть форма Леви этой поверхности в некоторой ее точке невырожденна. Тогда после плоской нормализации [4] в новом уравнении гиперповерхности M

$$F(x, u, y) = 2y^2 + \sum_{k \geqslant 4} F_k(x, u) y^k.$$

При этом функциональные коэффициенты $F_4(x, u)$, $F_5(x, u)$ удовлетворяют некоторым дополнительным требованиям.

В заметке рассматривается приведение к плоской нормальной форме семей-