Алгебра и анализ
Том 30 (2018), №6

ТЕОРЕМА БЕРЛИНГА, ФОРМУЛА ДЭВЕНПОРТА И ГИПОТЕЗА РИМАНА

© В. В. КАПУСТИН

Рассматриваются различные унитарно эквивалентные модели, связанные с подходом Берлинга–Нимана к гипотезе Римана о нулях дзета-функции Римана. Обсуждается связь между гипотезой Римана и свойствами подпространства весового гильбертова пространства $L^2_{1/x^2}(0,1)$, порожденного функциями $\rho(nx)$, $n = 1, 2, \ldots$, где $\rho(\,\cdot\,)$ обозначает дробную часть вещественного числа.

Подход А. Берлинга и Б. Нимана [6, 9] к гипотезе Римана опирается на унитарную эквивалентность двух гильбертовых пространств, осуществляемую преобразованием Меллина. Классическим результатом этого подхода является утверждение о том, что гипотеза Римана равносильна полноте некоторых ступенчатых функций в L^2-пространстве функций на отрезке. Доказательство этого результата может быть получено несколько иначе, чем у его авторов: сначала можно доказать, что гипотеза Римана равносильна тому, что некоторая функция из пространства Харди H^2 в полуплоскости является внешней, а затем уже унитарной пересадкой на отрезок получить критерий Берлинга–Нимана. В статье [1] Л. Баеса-Дуарте, связанной с подходом Берлинга–Нимана, используется еще одна модель, унитарно эквивалентная упомянутым. В настоящей статье будут явно построены исходная модель в H^2 и две другие модели вместе с операторами, осуществляющими унитарную эквивалентность этих двух моделей и исходной.

Пусть $\mathcal{K}$ — подпространство весового пространства

$$L^2_{1/x^2}(0,+\infty) = \left\{ f : \int\limits_0^{+\infty} |f(x)|^2 \, \frac{dx}{x^2} < \infty \right\},$$

Ключевые слова: дзета-функция Римана, подход Берлинга–Нимана к гипотезе Римана.

Работа частично поддержана грантом РФФИ № 16-01-00635-а.

состоящее из всех функций, являющихся 1-периодическими (то есть $f(x+1) = f(x)$) и удовлетворяющих соотношению

$$f(x) + f(1-x) \equiv \mathrm{const}, \quad x \in (0,1). \tag{1}$$

Функции $f(x) = \rho(nx)$, $n = 1, 2, \ldots$, где $\rho(\,\cdot\,)$ обозначает дробную часть вещественного числа, очевидно, принадлежат $\mathcal{K}$, и пусть $\mathcal{K}_*$ обозначает их замкнутую динейную оболочку в пространстве $L^2_{1/x^2}(0,+\infty)$. Таким образом, имеем $\mathcal{K}_* \subset \mathcal{K}$.

Следующая теорема может рассматриваться как основной результат этой статьи.

Теорема 1. *Гипотеза Римана о нулях дзета-функции Римана равносильна соотношению $\mathcal{K}_* = \mathcal{K}$.*

Замечание. Поскольку для 1-периодических функций нормы в пространствах $L^2_{1/x^2}(0,+\infty)$ и $L^2_{1/x^2}(0,1)$ эквивалентны, теорема также остается верной, если ее сформулировать в терминах последнего пространства.

Нетрудно проверить, что замкнутая линейная оболочка функций $\rho(nx)$ в (безвесовом) пространстве $L^2(0,1)$ совпадает с множеством всех функций из $L^2(0,1)$, удовлетворяющих соотношению (1), см. §5 ниже.

В свете теоремы 1 можно рассматривать следующее простое предложение в качестве побудительного мотива для изучения подпространства $\mathcal{K}_*$.

Предложение 2. *Пусть $f \in \mathcal{K}_*$, и пусть s — комплексное число, для которого $\operatorname{Re} s \in (\frac{1}{2}, 1)$. Если $\zeta(s) = 0$, то*

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{s-2} f(x)\, dx = 0. \tag{2}$$

Обсуждение в следующем параграфе показывает, что безотносительно того, верна или нет гипотеза Римана, множество общих нулей в открытой полосе $\{s : \operatorname{Re} s \in (\frac{1}{2}, 1)\}$ у функций из левой части соотношения (2) при $f \in \mathcal{K}_*$ совпадает с множеством всех нулей функции ζ в этой полосе.

Наша работа “параллельна” подходу А. Берлинга и Б. Нимана [6, 9] к гипотезе Римана и связана с результатами Л. Баеса-Дуарте [1, 2] в этой области. Общий план нашей работы состоит в следующем.

Подход Берлинга–Нимана дает равносильную переформулировку гипотезы Римана, состоящую в том, что постоянные функции принадлежат замкнутой линейной оболочке некоторых ступенчатых функций в $L^2(0,1)$, индексируемых вещественными числами, не меньшими 1; сам подход связан с преобразованием Меллина, унитарно отображающим $L^2(0,1)$

на класс Харди H^2 в полуплоскости $\{s:\ \operatorname{Re} s > \frac{1}{2}\}$. Если несколько видоизменить порядок рассуждений, то можно сначала получить аппроксимационный критерий в пространстве Харди, а затем пересадить его обратным преобразованием Меллина в $L^2(0,1)$. В статье [2] получен глубокий результат о более узком пространстве аппроксимации, чем у Берлинга–Нимана, а именно, доказано, что если гипотеза Римана верна, то постоянную функцию можно приблизить линейными комбинациями ступенчатых функций из подхода Берлинга–Нимана лишь с натуральными индексами. Отметим, что хотя сам результат был сформулирован в терминах модели Берлинга–Нимана, доказательство было дано в терминах конструкции в классе Харди.

Постоянная функция на интервале $(0,1)$ представлется как поточечная сумма ряда из ступенчатых функций с натуральными индексами из подхода Берлинга–Нимана. Из сходимости этого ряда в $L^2(0,1)$ следовало бы, что гипотеза Римана верна. Однако в статье [1] Л. Баеса-Дуарте показано, что ряд не сходится в L^2-норме. Для доказательства конструкция в $L^2(0,1)$ изометрически пересаживается в L^2-пространство на положительной полуоси, где полученному ряду соответствует ряд из формулы Х. Дэвенпорта [7], см. формулу (16) ниже, и видно, что L^2-сходимости нет. Таким образом появляется третья конструкция, унитарно эквивалентная двум, упоминавшимся выше: исходной в пространстве Харди, и в $L^2(0,1)$ из подхода Берлинга–Нимана. Ниже будет построен унитарный оператор, связывающий модель в классе Харди с этой новой конструкцией напрямую, т.е. минуя модель Берлинга–Нимана.

Таким образом, получаются три унитарно эквивалентные модели: одна — в классе Харди, и две модели на положительной полуоси, полученные из исходной изометрическими пересадками. Результаты для одной из этих моделей, относящиеся к структуре гильбертова пространства, немедленно дают их аналоги для двух других конструкций. Работая над какой-либо задачей об обсуждаемых гильбертовых пространствах, можно выбрать наиболее удобную модель среди этих трех (или, возможно, ещё какую-либо новую).

Грубо говоря, теорема 1 представляет собой аналог аппроксимационного критерия Баеса-Дуарте для подхода Берлинга–Нимана в терминах третьей из упоминавшихся конструкций. Однако в теореме 1 критерий сформулирован несколько иначе, а именно, в терминах полноты семейства функций в некотором пространстве; тогда как существенная часть доказательства состоит в аппроксимации некоторой фиксированной функции, как и в подходе Берлинга–Нимана. Составляющие этого результата можно найти в статьях [1, 2], однако явная формулировка там отсутствует. Целью

этой статьи является прозрачный подход к построению модели, о которой идет речь в теореме 1.

Хотя результат о расходимости из [1] (см. §5 ниже) был сформулирован в [1] для подхода Берлинга–Нимана, для его доказательства по сути использовалась другая модель на положительной полуоси из теоремы 1. Таким образом, эта конструкция уже была полезной для получения нового результата. Также допускаем, что она могла бы быть полезной и при изучении подпространства $\mathcal{K}_*$. А именно, функции $\rho(nx) - \frac{1}{2}$ нечетны и потому раскладываются в ряд Фурье по синусам. Следовательно, было бы естественно попробовать искать характеризацию элементов $\mathcal{K}_*$ через свойства последовательностей коэффициентов в их разложениях Фурье. Также эта модель может представлять интерес, поскольку, подобно модели Берлинга–Нимана, она связана со ступенчатыми функциями, которые выделяются среди всех конечных линейных комбинаций функций $\rho(nx)$ одним линейным условием.

Последний параграф посвящен построению аппроксимаций в ещё более узких пространствах, чем в упомянутом выше результате Баеса-Дуарте, связанных с группировкой слагаемых в сумме ряда.

§1. Аппроксимация и нули дзета-функции

Доказательство предложения 2. Для натурального числа n и для комплексных чисел s, у которых $\operatorname{Re} s \in (0,1)$, хорошо известно следующее соотношение:

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{s-2}\rho(nx)\,dx = -\frac{1}{n^{s-1}} \cdot \frac{\zeta(1-s)}{1-s}; \tag{3}$$

см., например, соотношение (14) ниже. При $\operatorname{Re} s \in (0,1)$, $\zeta(s) = 0$ тогда и только тогда, когда $\zeta(1-s) = 0$, и поэтому в полосе $\{s : \operatorname{Re} s \in (0,1)\}$ множество нулей выражения в правой части совпадает с множеством нулей функции ζ.

Требуемое соотношение выполнено для функций $\rho(nx)$, линейные комбинации которых, по определению $\mathcal{K}_*$, образуют плотное множество в $\mathcal{K}_*$. Таким образом, достаточно показать, что интеграл в левой части (2) определяет ограниченный линейный функционал на $\mathcal{K}$. Поскольку рассматриваются функции f, для которых $\frac{f(x)}{x}$ принадлежит безвесовому L^2-пространству, сходимость интеграла вблизи нуля вытекает из того, что функция x^{s-1} квадратично-суммируема вблизи нуля при $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$. Поскольку f является 1-периодической, интеграл $\int_n^{n+1} |f(x)|\,dx = c$ не зависит от n. При

$\operatorname{Re} s < 1$ имеем

$$\left| \int_1^\infty x^{s-2} f(x)\, dx \right| \leqslant \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} |x^{s-2}|\, |f(x)|\, dx \leqslant c \cdot \sum_{n=1}^\infty n^{\operatorname{Re} s-2} < \infty.$$

Сходимость интеграла установлена; проведенные вычисления позволяют получить оценки для нормы функционала. □

Функция $f(x) = \sin 2\pi x$ принадлежит $\mathcal{K}$. Формула (I.5.38) из [5] при $\operatorname{Re} s \in (0,1)$ дает

$$\int_0^{+\infty} x^{s-2} \sin 2\pi x\, dx = (2\pi)^{1-s}\, \Gamma(s-1)\, \sin \frac{\pi(s-1)}{2}. \tag{4}$$

Функция в правой части соотношения (4) аналитична и не обращается в нуль, если $\operatorname{Re} s \in (0,1)$. По предложению 2 из включения $\sin 2\pi x \in \mathcal{K}_*$ следовало бы, что гипотеза Римана верна.

Из формулы (3) видно, что если f является линейной комбинацией функций $\rho(nx)$, то левая часть (2) также есть аналитическая функция в полосе $\{s : \operatorname{Re} s \in (0,1)\}$, которая, однако, обращается в нуль в нулях ζ. Было бы интересно построить функции из $\mathcal{K}_*$ с другим поведением в нулях ζ с вещественной частью $\frac{1}{2}$.

Если предположить, что $\mathcal{K}_* = \mathcal{K}$, то $\sin 2\pi x \in \mathcal{K}_*$, откуда, как было сказано выше, вытекала бы гипотеза Римана. Тем самым получено доказательство одной из импликаций в теореме 1. Следующая лемма показывает, что для того, чтобы доказать теорему 1, достаточно установить включение $\sin 2\pi x \in \mathcal{K}_*$ при предположении, что гипотеза Римана верна.

Лемма 3. *Следующие утверждения равносильны*:

1) $\sin 2\pi x \in \mathcal{K}_*$;
2) $\mathcal{K}_* = \mathcal{K}$.

Доказательство. Импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) тривиальна. Теперь предположим, что $\sin 2\pi x \in \mathcal{K}_*$.

Пусть f_k — конечные линейные комбинации функций $\rho(nx)$, стремящиеся к $\sin 2\pi x$ в $L^2_{1/x^2}(0,+\infty)$. Оператор подстановки $f \mapsto f(nx)$ ограничен в $L^2_{1/x^2}(0,+\infty)$, откуда следует, что функции $f_k(nx)$ стремятся к $\sin 2\pi nx$, и, таким образом, $\sin 2\pi nx \in \mathcal{K}_*$.

Замкнутая линейная оболочка функций $\sin 2\pi nx$ в $L^2_{1/x^2}(0,+\infty)$ совпадает с подпространством $\mathcal{K}_0$ всех 1-периодических функций f, таких, что

$$f(x) + f(1-x) \equiv 0, \quad x \in (0,1).$$

По всей видимости, этот факт известен, но у нас нет подходящей ссылки. Для удобства читателя здесь приводится набросок элементарного доказательства равносильного утверждения для пространства $L^2_{1/x^2}(0,1)$.

Оператор из $L^2(0,1)$ в $L^2_{1/x^2}(0,1)$,

$$u \mapsto \int\limits_0^x \left(\int\limits_0^y u(t)\,dt \right) dy + x \cdot \int\limits_0^1 tu(t)\,dt,$$

ограничен и переводит семейство функций $\{\sin 2\pi nx\}$ в ненулевые скалярные кратные этих функций, рассматриваемые как элементы $L^2_{1/x^2}(0,1)$. Следовательно, замкнутая линейная оболочка функций $\sin 2\pi nx$ в пространстве $L^2_{1/x^2}(0,1)$ совпадает с замыканием образа замкнутой линейной оболочки функций $\sin 2\pi nx$ в $L^2(0,1)$, то есть с замыканием образа подпространства всех функций $u \in L^2(0,1)$, удовлетворяющих условию $u(x) + u(1-x) \equiv 0$. Этот образ может быть описан как

$$\Big\{ f \in L^2_{1/x^2}(0,1) : \ f(x) + f(1-x) \equiv 0, \quad f'' \in L^2(0,1), \ f(0) = 0 \Big\},$$

и очевидно, что его замыкание совпадает с подпространством всех функций $f \in L^2_{1/x^2}(0,1)$, для которых $f(x) + f(1-x) \equiv 0$, как и требовалось.

Доказано, что $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_*$. Подпространство $\mathcal{K}_0$ является подпространством $\mathcal{K}$ коразмерности 1. Кроме того, функция ρ принадлежит $\mathcal{K}_*$ и удовлетворяет соотношению $\rho(x) + \rho(1-x) \equiv 1$, $x \in (0,1)$, что завершает доказательство леммы. $\square$

§2. Дзета-функция Римана и класс Харди

Для комплексных чисел s при $\operatorname{Re} s > 1$ дзета-функция определена абсолютно сходящимся рядом,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Далее, ζ аналитически продолжается во всю комплексную плоскость за исключением точки $s = 1$, где она имеет полюс. В частности, при $\operatorname{Re} s > 0$ имеем

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \cdot \int\limits_1^{+\infty} \frac{\rho(x)}{x^{s+1}}\,dx, \tag{5}$$

где, как и выше, $\rho(\,\cdot\,)$ обозначает дробную часть вещественного числа. Интеграл в правой части (5) сходится при $\operatorname{Re} s > 0$, и, интегрируя по частям,

можно видеть, что эта формула совпадает с определением дзета-функции, данным выше, если $\operatorname{Re} s > 1$.

Нетривиальные нули ζ суть лежащие внутри *критической полосы* $\{s : \operatorname{Re} s \in (0,1)\}$. Гипотеза Римана утверждает, что все они на самом деле лежат на *критической прямой* $\{s : \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}\}$. Хорошо известно, что ζ не обращается в нуль при $\operatorname{Re} s \geqslant 1$. Множество всех нулей дзета-функции, очевидно, симметрично относительно вещественной оси. Благодаря *функциональному уравнению*

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \, \Gamma(1-s) \, \zeta(1-s) \tag{6}$$

множество всех нетривиальных нулей ζ также симметрично относительно критической прямой. Значит, гипотеза Римана равносильна следующему утверждению:

$\frac{1}{\zeta}$ *является голоморфной функцией в полуплоскости* $\{s : \operatorname{Re} s > \frac{1}{2}\}$.

По вопросам теории дзета-функции Римана отсылаем читателя к классическому источнику [10].

Нам понадобятся некоторые сведения об инвариантных подпространствах операторов умножения на ограниченные аналитические функции в пространстве Харди в верхней полуплоскости. Обозначим через $\mathbb{C}_+$ полуплоскость $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$. Класс Харди $H^2(\mathbb{C}_+)$ есть множество всех аналитических функций u в $\mathbb{C}_+$, для которых

$$\sup_{t>0} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x+it)|^2 \, dx < \infty.$$

Через угловые граничные значения $H^2(\mathbb{C}_+)$ изометрически отождествляется с подпространством пространства $L^2(\mathbb{R})$. Внутренние функции в полуплоскости $\mathbb{C}_+$ определяются как ограниченные аналитические функции, граничные значения которых унимодулярны почти всюду на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Внешние функции в $H^2(\mathbb{C}_+)$ могут быть определены как функции φ, для которых замкнутая линейная оболочка функций $\exp(itx)\varphi(x)$, $t \geqslant 0$, совпадает с $H^2(\mathbb{C}_+)$. Любая функция из $H^2(\mathbb{C}_+)$ может быть единственным образом (с точностью до мультипликативной скалярной унимодулярной константы) факторизована в произведение внутренней и внешней функций. В свою очередь, любая внутренняя функция есть произведение произведения Бляшке, определяемого нулями функции внутри $\mathbb{C}_+$, и так называемого сингулярного сомножителя. Один из вариантов знаменитой теоремы Берлинга об инвариантных подпространствах в $H^2(\mathbb{C}_+)$ выглядит следующим образом (см., например, [8]):

Замкнутое подпространство $H^2(\mathbb{C}_+)$ инвариантно относительно операторов умножения на $\exp(itx)$ для всех неотрицательных вещественных t тогда и только тогда, когда оно имеет вид $\theta H^2(\mathbb{C}_+)$ для некоторой внутренней функции θ.

Ясно, что прямой аналог этой теоремы верен и для полуплоскости

$$\frac{1}{2} - i\mathbb{C}_+ = \left\{ s : \ \operatorname{Re} s > \frac{1}{2} \right\}.$$

Функция ζ не принадлежит $H^2(\frac{1}{2} - i\mathbb{C}_+)$ по двум причинам: она не квадратично суммируема на критической прямой $\frac{1}{2} + i\mathbb{R} = \{s : \ \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}\}$ и она имеет полюс в точке 1. Возьмем внешнюю функцию $\varphi \in H^2(\frac{1}{2} - i\mathbb{C}_+)$, такую, что $\varphi\zeta \in L^2(\frac{1}{2} + i\mathbb{R})$; обычно будем брать $\varphi(s) = \frac{1}{s}$. Обозначим через b простой сомножитель Бляшке с нулем в точке 1,

$$b(s) = \frac{s-1}{s}.$$

Тогда функция $b\zeta$ аналитична в $\frac{1}{2} - i\mathbb{C}_+$. Наша дальнейшая работа будет основана на следующем критерии, который является прямым следствием теоремы Берлинга.

Предложение 4. *Для $\varphi(s) = \frac{1}{s}$ имеем $b\varphi\zeta \in H^2(\frac{1}{2} - i\mathbb{C}_+)$, и гипотеза Римана равносильна утверждению, что $b\varphi\zeta$ — внешняя функция.*

Ниже мы будем работать с преобразованием Меллина, и сейчас удобно им воспользоваться для доказательства предложения. Преобразование Меллина $\mathcal{M}$ есть унитарный оператор, действующий из $L^2(0, +\infty)$ в $L^2\left(\frac{1}{2} + i\mathbb{R}\right)$ по формуле

$$(\mathcal{M}g)(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty x^{s-1} g(x)\, dx, \quad g \in L^2(0, +\infty).$$

Функция принадлежит классу Харди $H^2(\frac{1}{2} - i\mathbb{C}_+)$ тогда и только тогда, когда она является образом при преобразовании Меллина L^2-функции с носителем на $[0, 1]$.

Набросок доказательства предложения 4. Соотношение (5) можно переписать как

$$-\varphi(s)\zeta(s) = -\frac{\zeta(s)}{s} = \frac{1}{1-s} + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\rho(x)}{x^{s+1}}\, dx = \frac{1}{1-s} + \int\limits_0^1 y^{s-1} \rho\left(\frac{1}{y}\right) dy, \quad \operatorname{Re} s > 0, \tag{7}$$

где была сделана подстановка $x = \frac{1}{y}$. Последний интеграл дает преобразование Меллина квадратично суммируемой функции с носителем на $[0,1]$, который таким образом принадлежит классу $H^2(\frac{1}{2} - i\mathbb{C}_+)$. Следовательно, $\varphi\zeta \in L^2(\frac{1}{2} + i\mathbb{R})$, и легко видеть, что $b\varphi\zeta \in H^2(\frac{1}{2} - i\mathbb{C}_+)$.

Если $\zeta(s) = 0$ для некоторого $s \in \frac{1}{2} - i\mathbb{C}_+$, то $(b\varphi\zeta)(s) = 0$ и $b\varphi\zeta$ не является внешней. Обратно, если ζ не обращается в нуль в $\frac{1}{2} - i\mathbb{C}_+$, то функция $b\varphi\zeta$ не имеет нулей в $\frac{1}{2} - i\mathbb{C}_+$. Она могла бы не быть внешней только при условии, что у нее имеется нетривиальный сингулярный внутренний делитель. Поскольку ζ аналитична во всех точках $\frac{1}{2} + i\mathbb{R}$, то этот сингулярный делитель может быть только экспоненциальной функцией вида $\exp(-c(s - \frac{1}{2}))$ для некоторого $c > 0$. Но это невозможно, поскольку $\zeta(s) \to 1$ при $s \to +\infty$. $\square$

Для $t \geqslant 0$ положим

$$e_t(s) = \exp(-ts).$$

Функции $e^{t/2} \cdot e_t$ являются внутренними в $\frac{1}{2} - i\mathbb{C}_+$. Предложение 4 дает следующую равносильную переформулировку гипотезы Римана.

Замкнутая линейная оболочка в $H^2(\frac{1}{2} - i\mathbb{C}_+)$ функций $e_t b\varphi\zeta$ с вещественными $t \geqslant 0$ совпадает с $H^2(\frac{1}{2} - i\mathbb{C}_+)$.

Это можно переписать как аппроксимационное свойство для одной функции; например, достаточно приблизить любую внешнюю функцию линейными комбинациями $e_t b\varphi\zeta$. Это свойство также сохраняется, если убрать сомножитель b; при этом требуется только разобраться с одномерным эффектом.

Предложение 5. *Гипотеза Римана равносильна следующему утверждению*:

($\divideontimes$) *Функция φ принадлежит замкнутой линейной оболочке в $L^2(\frac{1}{2} + i\mathbb{R})$ функций $e_t\varphi\zeta$, $t \geqslant 0$.*

Набросок доказательства. Допустим, что условие ($\divideontimes$) выполнено; в соответствии с приведенным выше критерием требуется доказать, что замкнутая линейная оболочка $e_t b\varphi\zeta$, $t \geqslant 0$, совпадает с $H^2(\frac{1}{2} - i\mathbb{C}_+)$. Замкнутая линейная оболочка $e_t\varphi\zeta$, $t \geqslant 0$, есть инвариантное подпространство для умножения на e_t, $t \geqslant 0$. Поскольку φ внешняя, то из условия ($\divideontimes$) вытекает, что это подпространство содержит $H^2(\frac{1}{2} - i\mathbb{C}_+)$. Умножая на b, можно видеть, что замкнутая линейная оболочка $e_t b\varphi\zeta$ содержит подпространство $bH^2(\frac{1}{2} - i\mathbb{C}_+)$, которое представляет собой подпространство коразмерности 1 всех функций из $H^2(\frac{1}{2} - i\mathbb{C}_+)$, которые обращаются в нуль в точке 1. Взяв $t = 0$, замечаем, что замкнутая линейная оболочка $e_t b\varphi\zeta$

также содержит функцию

$$b\varphi\zeta \in H^2\Big(\frac{1}{2} - i\mathbb{C}_+\Big),$$

которая не обращается в нуль в точке 1, откуда и следует требуемое.

Обратно, по предложению 4, если гипотеза Римана верна, то $b\varphi\zeta$ — внешняя функция. Следовательно замкнутая линейная оболочка функций $e_t b\varphi\zeta$, $t \geqslant 0$, совпадает с $H^2(\frac{1}{2} - i\mathbb{C}_+)$ и, в частности, содержит функцию

$$b\varphi \in H^2\Big(\frac{1}{2} - i\mathbb{C}_+\Big).$$

Поскольку сомножитель b унимодулярен, замкнутая линейная оболочка $e_t\varphi\zeta$, $t \geqslant 0$, содержит φ. □

§3. Унитарно эквивалентные конструкции

Зафиксируем

$$\varphi(s) = \frac{1}{s},$$

и для $a > 0$, $t = \log a$ определим

$$h_a(s) = e_t(s)\varphi(s)\zeta(s) = \exp(-ts)\frac{\zeta(s)}{s} = \frac{\zeta(s)}{s\,a^s}. \tag{8}$$

Пусть Ω — произвольный изометрический оператор из $L^2(\frac{1}{2} + i\mathbb{R})$ в другое гильбертово пространство. Условие ($\divideontimes$) можно переписать следующим образом.

Вектор $\Omega\varphi$ принадлежит замкнутой линейной оболочке Ωh_a, $a \geqslant 1$.

Если в качестве Ω взять обратное преобразование Меллина, получится классический подход А. Берлинга и Б. Нимана [6, 9]. Действительно, при $\operatorname{Re} s < 1$ имеем

$$\int_1^\infty y^{s-1}\rho\left(\frac{1}{y}\right)\,dy = \int_1^\infty y^{s-2}\,dy = \frac{1}{1-s}.$$

Следовательно, при $\operatorname{Re} s \in (0,1)$ соотношение (7) переписывается как

$$-\frac{\zeta(s)}{s} = \int_0^\infty y^{s-1}\rho\left(\frac{1}{y}\right)\,dy, \tag{9}$$

то есть функция $-\frac{\zeta(s)}{s}$ является преобразованием Меллина функции

$$\sqrt{2\pi}\cdot\rho\left(\frac{1}{y}\right).$$

Применяя преобразование Меллина к функциям $\rho\left(\frac{1}{ax}\right)$, $a>0$, получаем функции

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty x^{s-1}\rho\left(\frac{1}{ax}\right)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{a^s}\int\limits_0^\infty y^{s-1}\rho\left(\frac{1}{y}\right)\,dy$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{a^s}\,\frac{-\zeta(s)}{s}=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,h_a(s),$$

где $y=ax$.

С другой стороны, преобразование Меллина, примененное к индикатору $\chi_{(0,1)}$ интервала $(0,1)$, дает функцию

$$(\mathcal{M}\chi_{(0,1)})(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^1 x^{s-1}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{s}.$$

Взяв обратное преобразование Меллина в качестве Ω, получаем, что гипотеза Римана равносильна следующему утверждению:

Индикатор интервала $(0,1)$ *принадлежит замкнутой линейной оболочке в* $L^2(0,+\infty)$ *функций* $\rho\left(\frac{1}{ax}\right)$, $a\geqslant 1$.

Эта переформулировка почти совпадает с переформулировкой Берлинга–Нимана. Чтобы получить их критерий, надо применить проектор на подпространство функций, обращающихся в нуль на $(1,+\infty)$, вдоль одномерного подпространства, порожденного функцией $\rho\left(\frac{1}{x}\right)$ (для $a\geqslant 1$ функции $\rho\left(\frac{1}{ax}\right)$ в точках $x>1$ равны $\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{x}$ и, таким образом, являются скалярными кратными $\frac{1}{x}$). Это дает тот же самый критерий, но со ступенчатыми функцями $\rho\left(\frac{1}{ax}\right)-\frac{1}{a}\rho\left(\frac{1}{x}\right)$ вместо $\rho\left(\frac{1}{ax}\right)$. Поскольку все эти функции обращаются в нуль на $(1,+\infty)$, то критерий Берлинга и Нимана для выполнения гипотезы Римана можно сформулировать в терминах пространства $L^2(0,1)$:

Постоянные функции принадлежат замкнутой линейной оболочке в пространстве $L^2(0,1)$ *функций* $\rho\left(\frac{1}{ax}\right)-\frac{1}{a}\rho\left(\frac{1}{x}\right)$, $a\geqslant 1$.

Мы будем работать с оператором Ω, также определенным через преобразование Меллина, но примененного к функциям $\frac{\rho(ax)}{ax}$ вместо $\rho\left(\frac{1}{ax}\right)$. А именно, определим сопряженный оператор

$$\Omega^*: L^2(0,+\infty)\to L^2\Big(\frac{1}{2}+i\mathbb{R}\Big)$$

как композицию преобразования Меллина и оператора умножения в пространстве $L^2\left(\frac{1}{2}+i\mathbb{R}\right)$ на унимодулярную функцию ω,

$$\omega(s)=\frac{\bar{s}}{s}\cdot\frac{\zeta(s)}{\overline{\zeta(s)}},\qquad \Omega^*g=\omega\mathcal{M}g,\quad g\in L^2(0,+\infty). \tag{10}$$

Ясно, что Ω — унитарный оператор. Для $a>0$ рассмотрим функции $g_a\in L^2(0,+\infty)$,

$$g_a(x)=\frac{\rho(ax)}{ax}. \tag{11}$$

Теорема 6. *Унитарный оператор* $\Omega : L^2\left(\frac{1}{2}+i\mathbb{R}\right)\to L^2(0,+\infty)$, *определенный формулой* (10), *удовлетворяет соотношениям*

$$\Omega h_a=-\sqrt{2\pi}\,g_a \tag{12}$$

при h_a, g_a, *определенных формулами* (8), (11) *соответственно. Для функции* $\varphi(s)=\frac{1}{s}$ *имеем*

$$(\Omega\varphi)(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin 2\pi x}{x}. \tag{13}$$

Доказательство. Для s, у которых $\operatorname{Re}s=\frac{1}{2}$, можно записать

$$\omega(s)=\frac{1-s}{s}\cdot\frac{\zeta(s)}{\zeta(1-s)}.$$

Чтобы установить соотношение (13), нужно доказать формулу

$$\frac{1}{s}=\frac{1-s}{s}\cdot\frac{\zeta(s)}{\zeta(1-s)}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty x^{s-1}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin 2\pi x}{x}\,dx.$$

Эта формула, очевидно, равносильна следующей:

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{s-2}\sin 2\pi x\,dx=\frac{\pi}{1-s}\cdot\frac{\zeta(1-s)}{\zeta(s)},$$

левая часть которой совпадает с левой частью формулы (4). По соотношениям

$$(s-1)\,\Gamma(s-1)=\Gamma(s),\quad \Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s},$$

и функциональному уравнению (6), правая часть (4) равна

$$-(2\pi)^{1-s}\,\Gamma(s-1)\,\cos\frac{\pi s}{2}=-\frac{1}{(2\pi)^{s-1}}\cdot\frac{\Gamma(s)}{s-1}\cdot\frac{\sin\pi s}{2\sin\frac{\pi s}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{(1-s)\,2^s\pi^{s-1}\,\sin\frac{\pi s}{2}\cdot\Gamma(1-s)}=\frac{\pi}{1-s}\cdot\frac{\zeta(1-s)}{\zeta(s)},$$

что и требовалось; соотношение (13) доказано. Далее, делая подстановку $y = \frac{1}{ax}$, используя соотношение (9) для $1-s$ вместо s, получаем

$$\begin{aligned}(\mathcal{M}g_a)(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty x^{s-1} \frac{\rho(ax)}{ax}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a^s} \int\limits_0^\infty y^{(1-s)-1} \rho\left(\frac{1}{y}\right) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a^s} \cdot \frac{-\zeta(1-s)}{1-s}.\end{aligned} \tag{14}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}(\Omega^* g_a)(s) &= \frac{1-s}{s} \cdot \frac{\zeta(s)}{\zeta(1-s)} \times (\mathcal{M}g_a)(s) \\ &= \frac{1-s}{s} \cdot \frac{\zeta(s)}{\zeta(1-s)} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a^s} \cdot \frac{-\zeta(1-s)}{1-s} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\zeta(s)}{s\, a^s} = \frac{-h_a(s)}{\sqrt{2\pi}},\end{aligned}$$

откуда вытекает соотношение (12). □

Модели на полуоси выглядят похоже, однако их сходство скорее связано с симметрией дзета-функции, отраженной в функиональном уравнении, и они не связаны между собой простым унитарным преобразованием так, как, например,

$$u \mapsto \frac{1}{x} u\left(\frac{1}{x}\right). \tag{15}$$

Из унитарной эквивалентности, которая описана выше, получается, что при $a > 0$ функции $\rho(\frac{1}{ax})$ на первой из моделей соответствуют $\frac{\rho(ax)}{ax}$ на второй. Связь между этими моделями осуществляется унитарным преобразованием в $L^2(0, +\infty)$, которое есть композиция унитарного оператора (15) и унитарного (и в то же время самосопряженного) оператора, определенного (изначально на функциях u с компактным носителем) формулой

$$u \mapsto \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\sin 2\pi xt}{\pi xt} - 2\cos 2\pi xt\right) u(t)\, dt.$$

Различные свойства унитарных операторов в $L^2(0, +\infty)$, относящихся к гипотезе Римана, изучались в [1].

§4. Формула Дэвенпорта

В [7] Х. Дэвенпорт доказал следующую формулу:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\mu(n)}{n} \rho(nx) = -\frac{\sin 2\pi x}{\pi}, \tag{16}$$

где $\mu(\,\cdot\,)$ — функция Мебиуса, определяемая следующим образом: если натуральное число n является произведением k различных простых чисел, то $\mu(n) = (-1)^k$ (в частности, $\mu(1) = 1$); иначе $\mu(n) = 0$. Частичные суммы ряда в левой части равномерно ограничены и сходятся к функции из правой части для почти всех x на вещественной оси. На самом деле Дэвенпорт рассматривал функцию $\rho(\,\cdot\,) - \frac{1}{2}$ вместо ρ, но соответствующие формулы равносильны из-за известного соотношения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0.$$

Функция $\frac{1}{\zeta}$ допускает представление рядом Дирихле, а именно,

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}. \tag{17}$$

Ряд сходится при $\operatorname{Re} s > 1$; по теореме XIV.25.2 из [10] сходимость для всех s, для которых $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$, равносильна гипотезе Римана. Соотношение (17) переписывается как

$$\frac{1}{s} = \frac{\zeta(s)}{s} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)\, h_n(s) \tag{18}$$

для функций h_n, определенных соотношением (8). Применяя почленно унитарное преобразование Ω, определенное формулой (10), к этой формуле, по теореме 6 получаем формальное соотношение

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin 2\pi x}{x} = -\sqrt{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)\, g_n(s) = -\sqrt{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)\, \frac{\rho(nx)}{nx}, \quad x \in (0, +\infty),$$

совпадающее с формулой Дэвенпорта (16).

Аналог этих формул для модели Берлинга–Нимана также существует и хорошо известен:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)\, \rho\left(\frac{1}{nx}\right) = -\chi_{(0,1)}(x), \quad x \in (0, +\infty).$$

По предложению 5 гипотеза Римана равносильна утверждению, что $\frac{1}{s}$ принадлежит замкнутой линейной оболочке в $L^2(\frac{1}{2} + i\mathbb{R})$ функций h_a при всех вещественных $a \geqslant 1$. Формула (18) (вместе с аналогичными формулами для двух других унитарно эквивалентных моделей) дает повод для вопроса, следует ли из гипотезы Римана то, что функцию $\frac{1}{s}$ можно приблизить конечными линейными комбинациями слагаемых из этой формулы,

то есть функций h_n лишь с натуральными n. На самом деле, гипотеза Римана верна тогда и только тогда, когда

$\frac{1}{s}$ принадлежит замкнутой линейной оболочке в $L^2(\frac{1}{2}+i\mathbb{R})$ функций h_n, $n=1,2,\dots$.

Этот результат установлен в [2], где он формулируется в терминах подхода Берлинга и Нимана, для которого он допускает довольно симпатичную переформулировку в терминах последовательностей [3]. Из этого результата вытекает наша теорема 1.

Доказательство теоремы 1. По теореме 6 только что упомянутый критерий для гипотезы Римана может быть сформулирован следующим образом.

Функция $\frac{\sin 2\pi x}{x}$ принадлежит замкнутой линейной оболочке в $L^2(0,+\infty)$ функций g_n, $n=1,2,\dots$,

что равносильно включению $\sin 2\pi x \in \mathcal{K}_*$. Теперь оставшаяся часть теоремы вытекает из леммы 3. □

§5. Расходимость

Доказательство результата статьи [2], которое использовалось для доказательства теоремы 1, требует специальной техники, которая будет обсуждаться ниже в параграфе 6. Здесь будет показано, что два простых естественных метода не годятся для требуемой аппроксимации.

Если бы ряд в левой части (16) сходился в пространстве $L^2_{1/x^2}(0,+\infty)$, то правая часть принадлежала бы $\mathcal{K}_*$, и гипотеза Римана следовала бы из формулы (4) и предложения 2. В доказательстве теоремы 2.2 из статьи [1] показано, что такой сходимости нет. Действительно, для N-ной частичной суммы S_N и для $x\in(0,\frac{1}{N})$ имеем

$$S_N(x)=\sum_{n=1}^{N}\frac{\mu(n)}{n}\cdot nx = x\cdot\sum_{n=1}^{N}\mu(n)=x\cdot M(N),$$

где M обозначает функцию Мертенса $M(N)=\sum_{n=1}^{N}\mu(n)$. Следовательно,

$$\int\limits_0^{1/N}\Big(S_N(x)^2\Big)\frac{dx}{x^2}=\frac{M(N)^2}{N},$$

что должно стремиться к нулю, если бы S_n сходились в $L^2_{1/x^2}(0,+\infty)$. Но по теореме XIV.26.2 из [10] $\frac{M(N)}{N^{1/2}}$ не стремятся к нулю при $N\to\infty$. (Отметим,

что, однако, это рассуждение не опровергает слабую сходимость ряда в $L^2_{1/x^2}(0,+\infty)$.)

В безвесовом пространстве $L^2(0,1)$ функция $\sin 2\pi x$ принадлежит замкнутой линейной оболочке $\rho(nx)$, $n = 1, 2, \ldots$. (Следовательно, как и в доказательстве леммы 3, замкнутая линейная оболочка $\rho(nx)$ содержит $\sin 2\pi mx$ для любого натурального m и, таким образом, совпадает с подпространством всех $f \in L^2(0,1)$, удовлетворяющих (1).) Рассмотрим разложение Фурье по синусам функции $\rho(\,\cdot\,) - \frac{1}{2}$:

$$\rho(x) - \frac{1}{2} = -\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi mx}{\pi m}.$$

Следовательно, для любого натурального n имеем

$$\frac{1}{n}\left(\rho(nx) - \frac{1}{2}\right) = -\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi mnx}{\pi mn} = -\sum_{m \vdots n} \frac{\sin 2\pi mx}{\pi m},$$

то есть слагаемые — те же самые, что и в разложении для $\rho(x) - \frac{1}{2}$, но сумма берется лишь по подмножеству индексов, делящихся на n. Теперь возьмем конечный набор $\mathfrak{p}$ простых чисел и определим

$$\Xi = \prod_{p \in \mathfrak{p}} p.$$

Получаем

$$\sum_{n|\Xi} \mu(n) \cdot \frac{1}{n}\left(\rho(nx) - \frac{1}{2}\right) = -\sum_{m \wedge \Xi = 1} \frac{\sin 2\pi mx}{\pi m},$$

или, что равносильно,

$$\begin{aligned} \sum_{n|\Xi} \frac{\mu(n)}{n}\,\rho(nx) &= \frac{1}{2}\sum_{n|\Xi} \frac{\mu(n)}{n} - \sum_{m \wedge \Xi = 1} \frac{\sin 2\pi mx}{\pi m} \\ &= \frac{1}{2}\prod_{p \in \mathfrak{p}}\left(1 - \frac{1}{p}\right) - \sum_{m \wedge \Xi = 1} \frac{\sin 2\pi mx}{\pi m}. \end{aligned} \tag{19}$$

Слагаемые в левой части (19) — такие же, как в левой части формулы Дэвенпорта (16), но сумма берется только по всем делителям Ξ. Ряд в правой части (19) всегда содержит слагаемое с индексом $m = 1$. Если взять достаточно большое множество $\mathfrak{p}$, то в правой части произведение будет малым, а сумма будет близка в $L^2(0,1)$ к слагаемому при $m = 1$. Таким образом, эти выражения приближают в $L^2(0,1)$ функцию $-\frac{\sin 2\pi x}{\pi}$ из правой части формулы Дэвенпорта.

Теперь покажем, что этот метод аппроксимации не годится в весовом пространстве $L^2_{1/x^2}(0,1)$. Нормы 1-периодических функций в пространствах $L^2_{1/x^2}(0,+\infty)$ и $L^2_{1/x^2}(0,1)$ эквивалентны; мы будем работать в первом пространстве. Деление на x отображает $L^2_{1/x^2}(0,+\infty)$ в безвесовое пространство $L^2(0,+\infty)$ и действует как унитарный оператор между этими пространствами. Деля функции из $L^2_{1/x^2}(0,+\infty)$ на x и затем применяя унитарный оператор Ω^*, определенный формулой (10), получаем функции в пространстве $L^2(\frac{1}{2}+i\mathbb{R})$.

Возьмем конечный набор $\mathfrak{p}$ различных простых чисел, и пусть Ξ — их произведение. Рассмотрим функцию, определенную левой частью (19), как элемент постранства $L^2_{1/x^2}(0,+\infty)$, имея в виду аппроксимацию функции из правой части формулы Дэвенпорта (16). Деля на x, получаем функции

$$\sum_{n|\Xi}\mu(n)\frac{\rho(nx)}{nx}=\sum_{n|\Xi}\mu(n)g_n(x),$$

рассматриваемые как элементы $L^2(0,+\infty)$, с функциями g_n, определенными формулами (11). Умножая на $-\sqrt{2\pi}$ и применяя оператор Ω^*, определенный формулой (10), по теореме 6 получаем функции

$$\sum_{n|\Xi}\mu(n)h_n(s)=\sum_{n|\Xi}\mu(n)\frac{\zeta(s)}{s\,n^s}=\frac{\zeta(s)}{s}\cdot\sum_{n|\Xi}\frac{\mu(n)}{n^s}=\frac{\zeta(s)}{s}\cdot\prod_{p\in\mathfrak{p}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)$$

в $L^2(\frac{1}{2}+i\mathbb{R})$. Если умножить эти функции на $\frac{s-1}{s}$, получим функции из $H^2(\frac{1}{2}-i\mathbb{C}_+)$, что позволяет говорить об их значениях в точках s при $\operatorname{Re}s>\frac{1}{2}$, кроме $s=1$.

Если набор $\mathfrak{p}$ расширяется и в конце концов исчерпывает множество всех простых чисел, то произведение в правой части стремится к $\frac{1}{\zeta(s)}$ при $\operatorname{Re}s>1$, и к 0 — для $s\in(\frac{1}{2},1)$. Следовательно, если существует слабый предел для последовательности наборов $\mathfrak{p}$ или даже для их усреднений для некоторого регулярного метода суммирования, то предельная функция должна обращаться в нуль на $(\frac{1}{2},1)$ и совпадать с $\frac{1}{s}$ в $\{s:\ \operatorname{Re}s>1\}$. Поскольку предельная функция должна принадлежать $\frac{s}{s-1}\cdot H^2(\frac{1}{2}-i\mathbb{C}_+)$, то такое невозможно.

Установлен следующий факт.

Предложение 7. *Пусть $\mathfrak{p}_k$, $k=1,2,\dots,$ — последовательность конечных наборов простых чисел. Предположим, что $\mathfrak{p}_k\subset\mathfrak{p}_{k+1}$ и что объединение всех $\mathfrak{p}_k$ совпадает с множеством всех простых чисел. Для каждого k построим соответствующую функцию, как в левой части* (19)*, рассматриваемую как элемент $L^2_{1/x^2}(0,1)$. Тогда для любого регулярного метода*

суммирования, примененного к этой последовательности, усреднения не имеют слабого предела.

§6. Аппроксимация функциями из более узких подпространств

Обсуждение в этом параграфе связано с частными случаями следующей более общей задачи.

Рассмотрим аддитивную полугруппу A, являющуюся подмножеством полуоси $\{t : \operatorname{Re} t \geqslant 0\}$; предположим, что $0 \in A$. Возьмем вес $w \in L^1(\mathbb{R})$, такой, что $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log w(x)}{1+x^2}\, dx < \infty$. Будем говорить, что замкнутое подпространство весового пространства

$$L^2_w = \left\{ u : \int\limits_{\mathbb{R}} |u(x)|^2 w(x)\, dx < \infty \right\}$$

A-инвариантно, если оно инвариантно относительно умножения на все функции вида $\exp(itz)$ при $t \in A$. Обозначим через H_A A-инвариантное подпространство класса Харди в верхней полуплоскости, порожденное функцией, тождественно равной 1, то есть замкнутую линейную оболочку функций $\exp(itz)$, $t \in A$. Естественно спрашивать, при каких условиях A-инвариантное подпространство, содержащееся в H_A, определяется набором всех общих нулей в верхней полуплоскости (или, более общо, общим внутренним делителем) своих элементов.

Ситуация с гипотезой Римана соответствует весу $w(x) = \frac{1}{x^2+\frac{1}{4}}$ и полугруппе $A = \{\log n : n = 1, 2, 3, \dots\}$. А именно, тогда для $t = \log n$ и для $z = i(s - \frac{1}{2})$ имеем $\exp(itz) = \sqrt{n} \cdot \frac{1}{n^s}$. (Однако формулировку следует слегка изменить, так как дзета-функция имеет полюс в точке 1. Надо рассмотреть подпространство L^2_w, порожденное функцией $\zeta(\frac{1}{2} - ix)$, которая не принадлежит H_A. Чтобы свести дело к виду как выше, можно, например, умножить все функции на функцию $1 - 2^{\frac{1}{2}+ix}$, которая ограничена в замкнутой верхней полуплоскости, ограниченно обратима на вещественной оси и стирает полюс.) Для этой особой ситуации ответ получен в [2]. Ниже будут также рассмотрены и некоторые другие конструкции, вкладывающиеся в описанную выше схему.

В терминах функций h_a, определенных формулой (8), по предложению 5 гипотеза Римана равносильна тому, что функция $\frac{1}{s}$ принадлежит замкнутой линейной оболочке в $L^2(\frac{1}{2} + i\mathbb{R})$ функций h_a, $a \geqslant 1$. Согласно результату из [2], если гипотеза Римана верна, то для аппроксимации функции $\frac{1}{s}$ в $L^2(\frac{1}{2} + i\mathbb{R})$ достаточно взять только линейные комбинации функций h_n, $n = 1, 2, \dots$. Для доказательства сначала функция $\frac{1}{\zeta(s+\varepsilon)}$ при достаточно

малом $\varepsilon > 0$ приближается частичными суммами ряда

$$\frac{1}{\zeta(s+\varepsilon)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^{s+\varepsilon}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^{\varepsilon}} \cdot \frac{1}{n^s}$$

(что, очевидно, было бы невозможным, если бы у ζ был нуль и, следовательно, у $\frac{1}{\zeta}$ был бы полюс в $\{s : \operatorname{Re} s > \frac{1}{2} + \varepsilon\}$). А именно, показано, что частичные суммы стремятся к $\frac{1}{\zeta(s+\varepsilon)}$ поточечно, и их модули равномерно ограничены величиной $\mathrm{const} \cdot |s|^{\delta}$, где δ может быть выбрано сколь угодно малым. Умножая на $\frac{\zeta(s)}{s}$, получаем частичные суммы ряда

$$\frac{\zeta(s)}{s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^{\varepsilon}} \cdot \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^{\varepsilon}} \cdot h_n(s),$$

который сходится в $L^2(\frac{1}{2} + i\mathbb{R})$. Действительно, из гипотезы Римана следует гипотеза Линделефа, согласно которой $|\zeta(s)| \leqslant \mathrm{const} \cdot |s|^{\delta}$, $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, для любого $\delta > 0$ (либо имеем безусловную оценку $|\zeta(s)| \leqslant \mathrm{const} \cdot |s|^{\frac{1}{6}+\delta}$, см. [10, теорема V.10]; с того времени показатель $\frac{1}{6}$ был улучшен, но здесь его вполне достаточно); для всего выражения получаем мажоранту $\mathrm{const} \cdot \frac{|s|^{2\delta}}{|s|}$, которая принадлежит L^2 при малых δ, и поточечная сходимость влечет сходимость в $L^2(\frac{1}{2} + i\mathbb{R})$. Следовательно, предельная функция $\frac{\zeta(s)}{s \cdot \zeta(s+\varepsilon)}$ принадлежит замкнутой линейной оболочке h_n в $L^2(\frac{1}{2} + i\mathbb{R})$. Наконец, эти функции стремятся к $\frac{1}{s}$ поточечно при $\varepsilon \searrow 0$, а переход к пределу в L^2-норме оправдан оценкой

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(s+\varepsilon)} \leqslant \mathrm{const} \cdot |s|^{\varepsilon/2}, \quad \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}, \tag{20}$$

с константой, не зависящей от ε, см. [3, доказательство теоремы 2].

Результат статьи [2] означает, что гипотеза Римана равносильна тому, что левая часть (18) принадлежит замкнутой линейной оболочке слагаемых из правой части. Мы установим несколько более сильный результат с ещё более узким пространством функций, осуществляющих аппроксимацию. Например, можно попробовать сгруппировать слагаемое с нечетным индексом n вместе со слагаемым с индексом $2n$ в соотношении (18); получим

$$\mu(n)h_n + \mu(2n)h_{2n} = \mu(n)\Big(h_n - h_{2n}\Big).$$

(Отметим, что ненулевых слагаемых с индексом, делящимся на 4, нет.) Естественно возникает следующий вопрос.

Если гипотеза Римана верна, принадлежит ли функция $\frac{1}{s}$ *замкнутой линейной оболочке в* $L^2(\frac{1}{2}+i\mathbb{R})$ *функций* $h_n - h_{2n}$ *при нечетных* n?

Это свойство может представлять интерес, в частности, потому, что в терминах унитарно эквивалентной модели, связанной с формулой Дэвенпорта (16), соответствующая группировка дает ступенчатые функции. Действительно, если n нечетное, то сумма слагаемых с индексами n и $2n$ в (16) равна

$$\frac{\mu(n)}{n}\,\rho(nx) + \frac{\mu(2n)}{2n}\,\rho(2nx) = \frac{\mu(n)}{2n}\Big(2\rho(nx) - \rho(2nx)\Big),$$

и выражение в скобках в правой части совпадает с индикатором множества $\{x:\ \frac{1}{2} \leqslant \rho(nx) < 1)\}$.

Вопрос, поставленный выше, привязан к простому числу 2; можно задавать подобный вопрос для любого другого простого числа, для любого конечного набора простых чисел, и даже для некоторых "редких" бесконечных наборов простых чисел. А именно, пусть $\mathfrak{p}$ — набор простых чисел, либо конечный, либо бесконечный со свойством

$$\sum_{p\in\mathfrak{p}} \frac{1}{p^{1/2}} < \infty. \tag{21}$$

Обозначим через $\mathfrak{p}^*$ и $\mathfrak{p}^\perp$ соответственно множество всех натуральных чисел, являющихся конечными произведениями простых чисел из $\mathfrak{p}$, и множество натуральных чисел, не делящихся ни на какое $p \in \mathfrak{p}$. Определим

$$\Psi(s) = \prod_{p\in\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \sum_{m\in\mathfrak{p}^*} \frac{\mu(m)}{m^s}, \quad \operatorname{Re} s \geqslant \frac{1}{2}.$$

Из (21) следует, что функция Ψ ограничена и ограниченно обратима в замкнутой полуплоскости $\{s:\ \operatorname{Re} s \geqslant \frac{1}{2}\}$. При $\operatorname{Re} s > 1$ имеем

$$\Psi(s) \cdot \sum_{n\in\mathfrak{p}^\perp} \frac{\mu(n)}{n^s} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\mu(l)}{l^s} = \frac{1}{\zeta(s)},$$

откуда получаем аналог сотношения (18):

$$\frac{1}{s} = \frac{\zeta(s)\,\Psi(s)}{s} \cdot \sum_{n\in\mathfrak{p}^\perp} \frac{\mu(n)}{n^s} = \sum_{n\in\mathfrak{p}^\perp} \mu(n)\cdot h_n(s)\,\Psi(s),$$

где, как и выше,

$$h_n(s) = \frac{\zeta(s)}{s\,n^s}.$$

Для любого n имеем

$$h_n \cdot \Psi \in H^2\Big(\frac{1}{2} - i\mathbb{C}_+\Big),$$

и, если множество $\mathfrak{p}$ бесконечно, то каждая функция $h_n \cdot \Psi$ приближается в $L^2(\frac{1}{2} + i\mathbb{R})$ линейными комбинациями h_{mn} при $m \in \mathfrak{p}^*$. Действительно, если для $h_n \cdot \Psi$ заменить Ψ частичными произведениями из ее определения, то получим последовательность конечных линейных комбинаций h_{mn}, сходящуюся к $h_n \cdot \Psi$.

Опять же, гипотеза Римана допускает переформулировку, в том смысле, что сумма ряда (существующая в некотором более слабом смысле) принадлежит замкнутой линейной оболочке слагаемых.

Теорема 8. *Гипотеза Римана верна тогда и только тогда, когда функция $\frac{1}{s}$ принадлежит замкнутой линейной оболочке в $L^2(\frac{1}{2} + i\mathbb{R})$ функций $h_n \cdot \Psi$ при $n \in \mathfrak{p}^\perp$.*

Результат статьи [2] является частным случаем этой теоремы в случае, когда $\mathfrak{p}$ — пустое множество. Для доказательства теоремы 8 приспособим доказательство из [2] к нашему случаю. Оно основано на следующей лемме из [4], где результат установлен только для $F = \frac{1}{\zeta}$ при предположении, что гипотеза Римана верна.

Лемма 9. *Пусть $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ — ряд Дирихле, где $|a_n| \leqslant 1$. Предположим, что F допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\{\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}\}$, и что при $\operatorname{Re} s \geqslant \frac{1}{2} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, имеем оценку*

$$|F(s)| \leqslant c\,(1 + |\operatorname{Im} s|)^\delta \tag{22}$$

при $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда существует константа C, такая, что для $x \geqslant 2$ и при $\frac{1}{2} + \varepsilon \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant 1$ имеем

$$\left| \sum_{n \leqslant x} \frac{a_n}{n^s} - F(s) \right| \leqslant C \cdot \frac{(1 + |\operatorname{Im} s|)^\delta}{x^{\varepsilon/3}}. \tag{23}$$

Доказательство леммы 2 из [4] работает, если заменить в нем $\frac{1}{\zeta}$ на F. В частности, формула Перрона применима при предположении $|a_n| \leqslant 1$, и можно положить $T = x^{1/2}$.

Доказательство теоремы 8. Часть “тогда” является следствием предложения 5. Теперь предпложим, что гипотеза Римана верна. Возьмем

$$F(s) = \frac{1}{\zeta(s) \cdot \Psi(s)} = \sum_{n \in \mathfrak{p}^\perp} \frac{\mu(n)}{n^s};$$

то есть $F(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ при

$$a_n = \begin{cases} \mu(n), & n \in \mathfrak{p}^\perp \\ 0, & n \notin \mathfrak{p}^\perp \end{cases}.$$

Как и в [2], сначала приблизим функцию

$$F(s+\varepsilon) = \sum_{n \in \mathfrak{p}^\perp} \frac{\mu(n)}{n^{s+\varepsilon}} = \sum_{n \in \mathfrak{p}^\perp} \frac{\mu(n)}{n^\varepsilon} \cdot \frac{1}{n^s}$$

частичными суммами ее ряда. Гипотеза Римана влечет оценку (22) с любым $\delta > 0$ для $\frac{1}{\zeta}$ вместо F; см. формулу (XIV.2.6) в [10]. Поскольку функция Ψ ограниченно обратима, то $F = \frac{1}{\zeta\Psi}$ удовлетворяет предположениям леммы 9, которая дает оценку (23). Умножая на $\frac{\zeta(s)}{s} \cdot \Psi(s)$, получаем сходимость

$$\begin{aligned} \sum_{n \leqslant x} \frac{a_n}{n^\varepsilon}\, h_n(s)\Psi(s) &= \frac{\zeta(s)}{s} \cdot \Psi(s) \cdot \left(\sum_{n \leqslant x} \frac{a_n}{n^{s+\varepsilon}} \right) \\ &\longrightarrow \frac{\zeta(s)}{s} \cdot \Psi(s) \cdot F(s+\varepsilon) = \frac{\zeta(s)\Psi(s)}{s\,\zeta(s+\varepsilon)\,\Psi(s+\varepsilon)} \end{aligned} \tag{24}$$

в $L^2(\frac{1}{2} + i\mathbb{R})$, поскольку $\left|\frac{\zeta(s)}{s}\right| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{|s|^{1-\delta}}$. Таким образом, остается установить существование предела в $L^2(\frac{1}{2} + i\mathbb{R})$ у этих функций при $\varepsilon \searrow 0$.

Если гипотеза Римана верна, то оценка (20) выполнена при $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$. Поскольку Ψ ограничена и ограниченно обратима в $\frac{1}{2} - i\mathbb{C}_+$, то модули функций в правой части (24) равномерно мажорируются квадратично суммируемой функцией $\mathrm{const} \cdot |s|^{\frac{\varepsilon}{2}-1}$ (если ε достаточно мало). Теперь поточечная сходимость функций $\zeta(s+\varepsilon)$ и $\Psi(s+\varepsilon)$ к $\zeta(s)$, $\Psi(s)$ соответственно влечет сходимость функций в правой части (24) к $\frac{1}{s}$ в $L^2(\frac{1}{2} + i\mathbb{R})$.

Теорема доказана. □

Список литературы

[1] Báez-Duarte L., *A class of invariant unitary operators*, Adv. Math. **144** (1999), no. 1, 1–12.

[2] Báez-Duarte L., *A strengthening of the Nyman–Beurling criterion for the Riemann hypothesis*, Atti Acad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. **14** (2003), no. 1, 5–11.

[3] Bagchi B., *On Nyman, Beurling and Baez-Duarte's Hilbert space reformulation of the Riemann hypothesis*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **116** (2003), no. 2, 137–146.

[4] Balazard M., Saias E., *Notes sur la fonction ζ de Riemann, 1*, Adv. Math. **139** (1998), no. 2, 310–321.

[5] Бейтмен Г., Эрдейи А., *Высшие трансцендентные функции*. Т. 1, Наука, М., 1973.
[6] Beurling A., *A closure problem related to the Riemann zeta function*, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **41** (1955), 312–314.
[7] Davenport H., *On some infinite series involving arithmetical functions*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **8** (1937), no. 1, 8–13.
[8] Lax P., *Translation invariant subspaces*, Acta Math. **101** (1959), 163–178.
[9] Nyman B., *On some groups and semi-groups of translations*, Ph.D. Thesis, Uppsala Univ., 1950.
[10] Титчмарш Е. К., *Теория дзета-функции Римана*, Изд-во иностр. литературы, М., 1953.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: kapustin@pdmi.ras.ru

Поступило 07 декабря 2017 г.