В. Е. Шемарулин, Высшие симметрии и законы сохранения уравнения одномерных плоских изэнтропических течений политропного газа,
*Матем. заметки*, 1990, том 47, выпуск 3, 138–140

# ВЫСШИЕ СИММЕТРИИ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ПЛОСКИХ ИЗЭНТРОПИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ ПОЛИТРОПНОГО ГАЗА

**В. Е. Шемарулин**

Рассматривается квазилинейное уравнение для потенциала скоростей, к которому сводится система уравнений, описывающая одномерные плоские изэнтропические течения политропного газа с показателем адиабаты $k > 1$ [1]

$$\varphi_{tt} + 2\varphi_x \cdot \varphi_{xt} + \left[(k-1)\varphi_t + \frac{k+1}{2}\varphi_x^2\right] \cdot \varphi_{xx} = 0, \tag{1}$$

где $\varphi(x, t)$ — потенциал скоростей, $\varphi_x$ — скорость газа, $k = \mathrm{const}$. Область существования физически осмысленных решений

$$\varphi_t + \varphi_x^2/2 < 0 \tag{2}$$

совпадает с областью гиперболичности уравнения (1). Применяя к (1) преобразование Лежандра

$$\tilde{u} = \varphi_x, \quad \tilde{v} = \varphi_t, \quad U = -\varphi + x \cdot \varphi_x + t\varphi_t, \quad x = U_{\tilde{u}}, \quad t = U_{\tilde{v}},$$

получим линейное уравнение для потенциала Лежандра $U$ на плоскости переменных годографа $(\tilde{u}, \tilde{v})$

$$U_{\tilde{u}\tilde{u}} - 2\tilde{u} \cdot U_{\tilde{u}\tilde{v}} + \left[(k-1)\tilde{v} + \frac{k+1}{2}\tilde{u}^2\right] \cdot U_{\tilde{v}\tilde{v}} = 0. \tag{3}$$

Область (2) переходит в область гиперболичности $d \equiv \tilde{v} + \tilde{u}^2/2 < 0$ уравнения (3). В гиперболической области в характеристических переменных

$$\xi = \frac{1}{2}\sqrt{k-1} \cdot \tilde{u} + \sqrt{-d}, \quad \eta = -\frac{1}{2}\sqrt{k-1} \cdot \tilde{u} + \sqrt{-d}$$

уравнение (3) принимает удобный для исследования вид

$$F \equiv u_{\xi\eta} - \frac{n}{\xi + \eta} \cdot (u_\xi + u_\eta) = 0, \quad n = (k-3)/2(k-1). \tag{4}$$

Физическое требование $k > 1$ эквивалентно неравенству $n < 1/2$. Здесь высшие симметрии и законы сохранения уравнения (4) вычисляются для любого вещественного значения параметра $n \notin \mathbf{Z}$.

Обозначения и терминология, используемые ниже, соответствуют принятым в [2—3].

Пусть $J^\infty(2,1)$ — многообразие бесконечных джетов гладких функций переменных $\xi$ и $\eta$. $\mathscr{Y} = \{F = 0\}$ — уравнение (4), $\mathscr{Y}_\infty$ — его бесконечное продолжение. $\mathscr{Y}_\infty \subset J^\infty(2,1)$. В качестве внутренних координат на $\mathscr{Y}_\infty$ выберем функции

$$\begin{gathered} \xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta, \ldots, u_{m\xi}, u_{m\eta}, \ldots; \\ u_{m\xi} \equiv \frac{\partial^m u}{\partial \xi^m}, \quad u_{m\eta} \equiv \frac{\partial^m u}{\partial \eta^m}; \quad m = 0, 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{5}$$

Симметрии уравнения (4) отождествляются с функциями $\varphi$ переменных (5), являющимися решениями следующего уравнения [2]:

$$\bar{l}_F(\varphi) = 0, \quad l_F = D_\xi \cdot D_\eta - \frac{n}{\xi + \eta} \cdot (D_\xi + D_\eta),$$

 

где $l_F$ — ограничение оператора универсальной линеаризации $l_F$ на $\mathcal{Y}_\infty$; $D_\xi$, $D_\eta$ — операторы полного дифференцирования по $\xi$ и $\eta$.

ТЕОРЕМА 1. *Контактные симметрии* $\varphi = \varphi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \in C^\infty(J^1(2,1))$ *уравнения* (4) *при* $n \neq 0, -1$ ($k \neq 3, 5/3$) *имеют вид*

$$\varphi = A(\xi, \eta) + [n\cdot a\cdot(\xi - \eta) + d]\cdot u + (a\eta^2 + b\eta + c)\cdot u_\eta + (-a\xi^2 + b\xi - c)\cdot u_\xi,$$

*где* $a, b, c, d = \mathrm{const}$, $A(\xi, \eta)$ — *произвольное решение уравнения* (4).

В частности, симметриями являются

$$\varphi_0 = u_\xi - u_\eta,\quad \varphi_1 = -\xi^2\cdot u_\xi + \eta^2\cdot u_\eta + n\cdot(\xi - \eta)\cdot u. \tag{6}$$

В дальнейшем нам потребуется также симметрия $\varphi_2$

$$\varphi_2 = \xi\cdot u_{2\xi} - \eta\cdot u_{2\eta} + \frac{2n}{\xi + \eta}\cdot(-\xi\cdot u_\xi + \eta\cdot u_\eta). \tag{7}$$

Следствие. $L_{-1} = D_\xi - D_\eta$; $L_0 = \xi\cdot D_\xi + \eta\cdot D_\eta$; $L_{+1} = \xi^2 D_\xi - \eta^2 D_\eta + n\cdot(\eta - \xi)\cdot I$ *являются операторами рекурсии для уравнения* (4).

По индукции доказывается

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $\varphi \equiv \varphi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta, \ldots, u_{l\xi}, u_{l\eta}) \in C^\infty(J^l(2,1))$ — *симметрия уравнения* (4); $n \neq 0, \pm 1, \ldots, \pm l$. *Тогда* $\varphi$ — *линейна по переменным* $u, u_\xi, u_\eta, \ldots, u_{l\xi}, u_{l\eta}$;

$$\varphi \equiv A(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta, \ldots, u_{(l-1)\xi}, u_{(l-1)\eta}) + C(\eta)\cdot u_{l\eta} + B(\xi)\cdot u_{l\xi};$$

$B(\xi)$, $C(\eta)$ — *полиномы степени* $\leqslant 2l$, $C(\xi) \equiv (-1)^l\cdot B(-\xi)$.

Пусть $\{\varphi, \psi\}$ — скобка Якоби функций $\varphi$ и $\psi$ [2]. Коммутируя $\varphi_0$ $l-1$ раз с $\varphi_2$ и $m$ раз с $\varphi_1$ (см. (6)—(7)), получим функцию

$$\varphi_l^m \equiv \{\ldots\{\{\ldots\{\varphi_0, \varphi_2\}\ldots\varphi_2\}\varphi_1\}\ldots\varphi_1\}.$$

Символом $L_1^\infty$ обозначим пространство решений (4). Из теоремы 2 следует

ТЕОРЕМА 3. *Алгебра высших симметрий* $\mathrm{Sym}\,\mathcal{Y}$ *уравнения* (4) *при* $n \notin \mathbf{Z}$ *является прямой суммой идеала* $L_1^\infty$ *и подалгебры* $L_2^\infty$: $\mathrm{Sym}\,\mathcal{Y} = L_1^\infty \oplus L_2^\infty$. $L_2^\infty$ *как векторное пространство порождена элементами* $u$, $\varphi_l^m$, $0 \leqslant m \leqslant 2l$, $l = 1, 2, 3, \ldots$; *а как алгебра Ли — элементами* $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, u$.

Из существования лагранжиана для уравнения (4) следует

ЛЕММА 1. $l_F^* \circ b^{-1} = b^{-1} \circ l_F$, *где* $b \equiv (\xi + \eta)^{2n}$.

Производящими функциями $g$ законов сохранения $\mathcal{Y}$ являются те и только те решения уравнения $l_F^*(\bar{g}) = 0$, для которых выполнено операторное равенство

$$\bar{l}_g + \bar{\Delta}^* = \bar{B}\circ \bar{l}_F, \tag{8}$$

где $\Delta(F) \equiv l_F^*(g)$, $B^* = B$ [3]. В силу леммы 1 $b\cdot g \in \mathrm{Sym}\,\mathcal{Y}$. Проверка условия (8) приводит к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 4. *Линейное пространство* $G$ *производящих функций законов сохранения уравнения* (4) *при* $n \notin \mathbf{Z}$ *является прямой суммой* $G = b^{-1}L_1^\infty \oplus b^{-1}\tilde{L}_2^\infty$; *где* $b = (\xi + \eta)^{2n}$, $b^{-1}L_1^\infty = \left\{ b^{-1}\cdot f(\xi, \eta) \,\middle|\, f_{\xi\eta} - \frac{n}{\xi + \eta}(f_\xi + f_\eta) = 0 \right\}$, $b^{-1}\tilde{L}_2^\infty$ — *векторное пространство, порожденное функциями* $b^{-1}\cdot\tilde{\varphi}_{2r+1}^m$, $0 \leqslant m \leqslant 2\cdot(2r+1)$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, $\tilde{\varphi}_{2r+1}^m = \{\ldots\{\square^{2r+1}(u), \varphi_1\}\ldots, \varphi_1\}$ ($\varphi_1$ *повторяется* $m$ *раз*), $\square$ $D_\xi - D_\eta$.

Закон сохранения для уравнения (4) с производящей функцией $g$ получается из тождества Грина

$$D_\xi \left\{-\frac{n}{\xi+\eta} u\cdot g + \frac{1}{2} D_\eta(u)\cdot g - \frac{1}{2} D_\eta(g)\cdot u\right\} + \\ + D_\eta\left\{-\frac{n}{\xi+\eta} u\cdot g + \frac{1}{2} D_\xi(u)\cdot g - \frac{1}{2} D_\xi(g)\cdot u\right\} = 0.$$

Рассмотрим теперь случай целочисленного $n = 0, \pm 1, +2, \ldots$ Пусть $u(\xi, \eta)$ — решение уравнения (4) и $v = (\xi+\eta)^{-(2n+1)}\cdot u(\xi, \eta)$. Тогда $v_{\xi\eta} + \frac{n+1}{\xi+\eta}(v_\xi + v_\eta) = 0$. Следовательно, уравнение (4) с параметром $n$ переходит в аналогичное уравнение с параметром $n' = -(n+1)$ и достаточно рассмотреть случай $n \geqslant 0$. Если $n > 0$, то $n$-кратным $\eta$-преобразованием Лапласа с последующим преобразованием эквивалентности по функции [4] уравнение (4) приводится к виду

$$[w_\xi\cdot(\xi+\eta)^{-2n}]_\eta = 0. \tag{9}$$

Кроме того, из сказанного выше следует, что при $n = -1$ уравнение (4) эквивалентно волновому $w_{\xi\eta} = 0$. В итоге доказана

ТЕОРЕМА 5. *При* $n \in \mathbf{Z}$; $n \neq 0, -1$ *уравнение* (4) *эквивалентно уравнению* (9), *а при* $n = -1$ — *волновому уравнению* $w_{\xi\eta} = 0$.

Поскольку высшие симметрии волнового уравнения хорошо известны [5], то, в силу теоремы 5, вычисление высших симметрий и законов сохранения уравнения (4) сводится к более простой аналогичной задаче для уравнения (9) и вычислению производящих функций высших законов сохранения волнового уравнения. Подробнее это будет изложено в другом месте.

В заключение автор выражает благодарность А. М. Виноградову за внимание к работе и полезные обсуждения.

Поступило
18.05.89

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 2. Виноградов А. М., Красильщик И. С., Лычагин В. В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986. 3. Vinogradov A. M. // Acta Appl. Math. 1984. V. 2, N 1. P. 21—78. 4. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 5. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.