Н. П. Белякова, Определяемость конечно порожденных абелевых групп структурой подгрупп, инвариантных относительно инволютивного автоморфизма, *Дискрет. матем.*, 1990, том 2, выпуск 3, 120–127

Дискретная математика

том 2 выпуск 3 * 1990

УДК 512

ОПРЕДЕЛЯЕМОСТЬ КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП СТРУКТУРОЙ ПОДГРУПП, ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ИНВОЛЮТИВНОГО АВТОМОРФИЗМА

Н. П. Белякова

В работе найдено каноническое задание инволютивного автоморфизма конечно порожденной абелевой группы без элементов четного порядка. Этот результат используется для доказательства определяемости абелевой группы решеткой подгрупп, инвариантных относительно инволютивного автоморфизма, в классе всех конечно порожденных абелевых групп без элементов четного порядка.

В работах [1, 2] рассматривался вопрос об определяемости группы G структурой (решеткой) $L(G, \alpha)$ всех ее подгрупп, инвариантных относительно инволютивного автоморфизма α (α-допустимых подгрупп) в классе $\mathfrak{A}$ всех свободных абелевых групп конечных рангов. Сформулируем некоторые результаты из [1], [2], используемые в дальнейшем.

А. Если $G \in \mathfrak{A}$ и α — инволютивный автоморфизм группы G, то группу G можно представить в виде прямой суммы $G = \sum_{i=1}^{n} G_i$, где G_i — циклическая подгруппа вида $\langle g \rangle$, $\alpha g = \pm g$, либо подгруппа вида $\langle g \rangle + \langle \alpha g \rangle$.

Б. Пусть $G, G' \in \mathfrak{A}$, и α, β — инволютивные автоморфизмы групп G, G' соответственно. Решетки $L(G, \alpha)$, $L(G', \beta)$ изоморфны тогда и только тогда, когда существует изоморфизм γ группы G на группу G', такой, что $\alpha = \gamma^{-1}\lambda\beta\gamma$, где $\lambda = \pm 1$.

В. Пусть $G \in \mathfrak{A}$,

$$G = \langle a_1 \rangle + \ldots + \langle a_{n_1} \rangle + \langle b_1 \rangle + \ldots + \langle b_{n_2} \rangle + \langle c_1 \rangle + \langle d_1 \rangle + \ldots + \langle c_m \rangle + \langle d_m \rangle,$$

α — инволютивный автоморфизм группы G такой, что $\alpha a_i = a_i$, $i \in \overline{1, n_1}$, $\alpha b_j = -b_j$, $j \in \overline{1, n_2}$, $\alpha c_k = d_k$, $k \in \overline{1, m}$, и $L(G, \alpha) \cong L(G', \beta)$ для некоторой группы $G' \in \mathfrak{A}$ с инволютивным автоморфизмом β. Если $l(G) = n_1 + n_2 + m \geqslant 2$ и $n_1, n_2 \neq 1$ при $m = 0$, то всякий изоморфизм решетки $L(G, \alpha)$ на $L(G', \beta)$ индуцируется ровно четырьмя изоморфизмами группы G на G' при $\alpha \neq \pm\varepsilon$ и двумя при $\alpha = \pm\varepsilon$ (ε — тождественный автоморфизм).

Данная работа является естественным продолжением работ [1, 2]. В ней решается задача определяемости абелевой группы G решеткой $L(G, \alpha)$ подгрупп, инвариантных относительно инволютивного автоморфизма α, в классе всех конечно порожденных абелевых групп без элементов четного порядка.

Заметим, что указанная задача представляет интерес не только для групп. К ней сводится также и задача об определяемости конечно порожденных квазигрупп с тождеством $(ab)c=(cb)a$ и левой единицей решетками их подквазигрупп.

Самостоятельный интерес представляет также и полученный в работе вспомогательный результат о каноническом задании инволютивных автоморфизмов рассматриваемых групп.

Теорема 1. *Если G — конечная абелева группа нечетного порядка и α — ее инволютивный автоморфизм, то G можно разложить в прямую сумму примарных циклических групп, на каждой из которых α совпадает с ε или $-\varepsilon$.*

Доказательство. Так как G разлагается в прямую сумму силовских подгрупп и последние α-допустимы, то теорему достаточно доказать для конечных абелевых p-групп при нечетных простых p. В свою очередь, любая такая p-группа по теореме Грюна [3] представляется в виде прямой суммы α-допустимых p-групп, каждая из которых есть прямая сумма циклических подгрупп одного и того же порядка. Значит, при доказательстве теоремы можно ограничиться случаем, когда G есть прямая сумма

$$G=\langle a_1\rangle_{p^k}+\ldots+\langle a_n\rangle_{p^k}$$

циклических подгрупп порядка p^k.

В этом случае автоморфизм α определяется системой равенств $\alpha a_i = c_{i1}a_1+\ldots+c_{in}a_n$, $i\in\overline{1,n}$, или матрицей $C=(c_{ij})_{n\times n}$. Так как $a_1, \ldots, a_n$ — элементы порядка p^k, то можно считать, что C есть матрица над кольцом $\mathbf{Z}/p^k$, и для доказательства теоремы достаточно преобразованиями подобия привести матрицу C к диагональному виду (и учесть, что при нечетном p в кольце $\mathbf{Z}/p^k$ с единицей e уравнение $x^2=e$ имеет лишь два решения $x_1=e$, $x_2=-e$).

Заметим, что матрица C в силу инволютивности автоморфизма α удовлетворяет условию

$$C^2=E, \tag{1}$$

где E — единичная матрица. Отсюда, в частности, следует, что матрица C обратима в кольце всех $n\times n$-матриц над $\mathbf{Z}/p^k$, и поэтому в каждой ее строке и в каждом ее столбце имеется хотя бы один обратимый элемент, т. е. элемент из мультипликативной группы $(\mathbf{Z}/p^k)^*$ кольца $\mathbf{Z}/p^k$.

Напомним, что преобразованиями подобия для матрицы над кольцом R являются:

$t_{ij}(r)$ — прибавление i-го столбца, умноженного на r, к j-му с последующим прибавлением j-й строки, умноженной на $-r$, к i-й;

$s(i, j)$ — перестановка i-го и j-го столбцов с последующей перестановкой i-й и j-й строк.

Теперь индукцией по n докажем, что любая $n\times n$-матрица над кольцом $\mathbf{Z}/p^k$, удовлетворяющая условию (1), подобна диагональной матрице. При $n=1$ это утверждение очевидно. При $n=2$ рассмотрим ряд случаев.

1) $c_{12}\in(\mathbf{Z}/p^k)^*$ или $c_{21}\in(\mathbf{Z}/p^k)^*$. Пусть, например, $c_{12}\in(\mathbf{Z}/p^k)^*$. Тогда преобразованием подобия $t_{21}(-c_{12}^{-1}c_{11})$ матрица C приводится к виду

$$C'=\begin{pmatrix}0 & b\\ c & d\end{pmatrix}.$$

Из условия (1) легко следует, что $d=0$ и $c=b^{-1}$. Найдем обратимую матрицу $T=\begin{pmatrix}x & y\\ u & v\end{pmatrix}$ над $\mathbf{Z}/p^k$ такую, что

$$T^{-1}C'T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \quad \text{или} \quad C'T=T\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Из последнего равенства получаем соотношения

$$bu=x,\quad bv=-y,\quad b^{-1}x=u,\quad b^{-1}y=-v,$$

которым, очевидно, удовлетворяют значения

$$u=e, \quad x=b, \quad v=e, \quad y=-b.$$

При этом в силу нечетности числа p матрица $T=\begin{pmatrix} b & -b \\ e & e \end{pmatrix}$ обратима. В случае $c_{21} \in (\mathbf{Z}/p^k)^*$ рассуждения аналогичны.

2) $c_{12}, c_{21} \notin (\mathbf{Z}/p^k)^*$. Тогда $c_{11}, c_{22} \in (\mathbf{Z}/p^k)^*$, и из условия (1) следует, что $c_{11}^2+c_{12}c_{21}=c_{22}^2+c_{12}c_{21}=e$, и потому

$$(c_{11}-c_{22})(c_{11}+c_{22})=0. \tag{2}$$

Так как p нечетно и c_{11}, c_{22} обратимы, то из условия (2) легко следует, что один из элементов $c_{11}-c_{22}$, $c_{11}+c_{22}$ обратим, а один нулевой. Поэтому выполняется одно из равенств: $c_{22}=c_{11}$ или $c_{22}=-c_{11}$. В первом случае из (1) следует, что $2c_{11}c_{12}=2c_{11}c_{21}=0$, т. е. $c_{12}=c_{21}=0$ и матрица C диагональна. Рассмотрим случай, когда $c_{22}=-c_{11}$. Применив к C преобразование $t_{12}(e)$, получим матрицу

$$C''=\begin{pmatrix} c_{11}-c_{21} & c_{12}-c_{21}+2c_{11} \\ c_{21} & c_{21}-c_{11} \end{pmatrix}.$$

Так как $2c_{11} \in (\mathbf{Z}/p^k)^*$, а $c_{12}-c_{21} \notin (\mathbf{Z}/p^k)^*$, то $c_{12}-c_{21}+2c_{11} \in (\mathbf{Z}/p^k)^*$, и в силу доказанного в случае 1) матрица C'' (а потому и C) подобна диагональной. Таким образом, при $n=2$ утверждение верно.

Пусть $n>2$. Рассмотрим ряд случаев.

1) $c_{1n} \in (\mathbf{Z}/p^k)^*$. Применяя к C преобразования

$$t_{n\,n-1}(-c_{1n}^{-1}c_{1\,n-1}), \ \ldots, \ t_{n\,2}(-c_{1n}^{-1}c_{12}), \ t_{21}(c_{1n}^{-1}c_{2n}), \ \ldots, \ t_{n-1\,1}(c_{1n}^{-1}c_{n-1\,n}),$$

получим матрицу вида

$$C'=\begin{pmatrix} c'_{11} & 0 & \ldots & 0 & c_{1n} \\ c'_{21} & c'_{22} & \ldots & c'_{2\,n-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c'_{n-1\,1} & c'_{n-1\,2} & \ldots & c'_{n-1\,n-1} & 0 \\ c'_{n\,1} & c'_{n\,2} & \ldots & c'_{n\,n-1} & c'_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Умножая 1-ю строку матрицы C' на столбцы с номерами $2, \ldots, n-1$, а строки с номерами $2, \ldots, n-1$ на n-й столбец, и учитывая условие $(C')^2=E$, получим $c'_{21}=\ldots=c'_{n-1,1}=c'_{n2}=\ldots=c'_{n,n-1}=0$. Теперь, применяя к C' преобразование $s(2, n)$, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{cc|c} c'_{11} & c_{1n} & 0 \ldots 0 \\ c'_{n1} & c'_{nn} & 0 \ldots 0 \\ \hline 0 & 0 & \\ \cdot & \cdot & B \\ 0 & 0 & \end{array}\right),$$

которая подобна диагональной по предположению индукции. Аналогично доказывается этот факт при условии $c_{n1} \in (\mathbf{Z}/p^k)^*$.

2) $c_{12}=\ldots=c_{1n}=c_{2n}=\ldots=c_{n-1,n}=0$, т. е.

$$C=\left(\begin{array}{c|ccc|c} c_{11} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \hline c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2,n-1} & 0 \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot \\ c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & \ldots & c_{n-1,n-1} & 0 \\ \hline c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{n\,n-1} & c_{nn} \end{array}\right).$$

Тогда по предположению индукции матрица C подобна матрице вида

$$B=\left(\begin{array}{c|ccc|c} e_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \hline b_{21} & e_2 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot\cdot\cdot & & \cdot & & \vdots \\ b_{n-1,1} & 0 & \cdot & e_{n-1} & 0 \\ \hline b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{n,n-1} & e_n \end{array}\right),$$

$e_1, \ldots, e_n \in \{e, -e\}$. Если при $i \neq 1$ $e_i = e_1$, то, умножая i-ю строку матрицы B на ее 1-й столбец и учитывая условие $B^2 = E$, получим $b_{i1} = 0$. Если же $e_i = -e_1$, то, применив к B преобразование $t_{i1}(r)$, где r находится из условия $2re_i = -b_{i1}$, мы заменим элемент b_{i1} на нуль, не изменив остальных элементов множества $b_{21}, \ldots, b_{n-1,1}$. Применяя эти рассуждения при $i = 2, \ldots, n-1$, мы придем к матрице вида

$$\begin{pmatrix} e_1 & 0 & \ldots 0 & 0 \\ 0 & e_2 & \ldots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots e_{n-1} & 0 \\ d_{n1} & d_{n2} & \ldots d_{n\,n-1} & e_n \end{pmatrix}.$$

Теперь, сравнивая элементы e_i, $i = 1, \ldots, n-1$, с e_n, мы точно таким же образом заменим нулями элементы $d_{n1}, d_{n2}, \ldots, d_{n\,n-1}$ и получим искомую матрицу.

3) Среди элементов $c_{12}, \ldots, c_{1n}, c_{2n}, \ldots, c_{n-1\,n}$ есть ненулевые. Тогда выберем среди них такой элемент c, который удовлетворяет условию $c = p^l c_1$, $c_1 \in (\mathbf{Z}/p^k)^*$ при наименьшем натуральном l. Если $c = c_{1i}$, где $i \neq n$, или $c = c_{in}$, где $i \neq 1$, то, применив к C соответственно преобразования $s(i, n)$, $s(1, i)$, мы переместим элемент c на место $(1, n)$. Следовательно, не теряя общности, можно считать, что $c = c_{1n}$. Из условия выбора элемента c видно, что существуют элементы r_i, $k_i \in \mathbf{Z}/p^k$, удовлетворяющие условиям

$$c_{1n} r_i = -c_{1i}, \qquad c_{1n} k_i = -c_{in}, \qquad i \in \overline{2, n-1}.$$

Применяя к матрице C преобразования

$$t_{n2}(r_2), \ \ldots, \ t_{n,\,n-1}(r_{n-1}), \ t_{21}(-k_2), \ \ldots, \ t_{n-1,\,1}(-k_{n-1}),$$

получим матрицу вида (3). Если в ней элемент c_{1n} или c'_{n1} обратим, то она подобна диагональной по доказанному в п. 1).

Пусть c_{1n}, c'_{n1} не обратимы. Умножая в матрице (3) 1-ю строку на 1-й столбец и n-ю строку на n-й столбец, мы из условия (1), как и в случае 2) при $n = 2$, получим $c'_{nn} = c'_{11}$ или $c'_{nn} = -c'_{11}$. Если $c'_{nn} = c'_{11}$, то умножая 1-ю строку на n-й столбец и учитывая условие (1), получим $2c_{1n}c'_{11} = 0$, т. е. $c_{1n} = 0$, и приходим к случаю 2). Если же $c'_{nn} = -c'_{11}$, то применив преобразование $t_{1n}(e)$, мы, как и в случае 2) при $n = 2$, придем к случаю 1). Теорема доказана.

Заметим, что для групп четного порядка аналогичное утверждение в общем случае неверно. Например, нетрудно убедиться в том, что группу $G = \langle a \rangle_4 + \langle b \rangle_2$ нельзя представить в виде прямой суммы α-допустимых циклических групп, если инволютивный автоморфизм α задается равенствами $\alpha a = a + b$, $\alpha b = b$.

Теорема 2. *Пусть G — конечно порожденная группа без элементов второго порядка, и α — ее инволютивный автоморфизм. Тогда группа G разлагается в прямую сумму $G = F + H$, где F — свободная абелева группа, инвариантная относительно автоморфизма α, а H — периодическая часть группы G.*

Доказательство. Пусть

$$G = \langle g_1 \rangle + \ldots + \langle g_m \rangle + \langle h_1 \rangle + \ldots + \langle h_n \rangle$$

— разложение группы G в прямую сумму циклических групп, $\langle g_1 \rangle + \ldots + \langle g_m \rangle = F_1$ — свободная абелева группа и $\operatorname{ord} h_i = m_i$, $i \in \overline{1, n}$. Так как H инвариантна относительно α, то в силу теоремы 1 можно считать, что

$$\alpha h_i = \delta_i h_i, \qquad \delta_i \in \{1, -1\}, \qquad i \in \overline{1, n}.$$

Пусть

$$\alpha g_i = a_{i1}g_1 + \ldots + a_{im}g_m + b_{i1}h_1 + \ldots + b_{in}h_n, \tag{4}$$

где $a_{ij} \in \mathbf{Z}$, $b_{ij} \in \overline{0,\ m_j - 1}$.

Введем в рассмотрение матрицы $A = (a_{ij})_{m\times m}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$, определяющие вместе с числами $\delta_1, \ldots, \delta_n$ автоморфизм α. Если изменять систему $g_1, \ldots, g_m$ с помощью преобразований Нильсена [4, с. 17], то матрица A будет подвергаться преобразованиям подобия [1]. Следовательно, в силу теоремы из [1], не теряя общности, можно считать, что матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \varepsilon_k & & & & \\ & & & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon_i \in \{1,\ -1\}$, $i \in \overline{1,\ k}$.

Покажем, что можно подобрать целые числа x_{ij} так, чтобы элементы

$$g'_i = g_i + x_{i1}h_1 + \ldots + x_{in}h_n, \qquad i \in \overline{1,\ m}, \tag{5}$$

удовлетворяли условиям

$$\begin{gathered} \alpha g'_i = \varepsilon_i g'_i, \quad i \in \overline{1,\ k}, \\ \alpha g'_{k+1} = g'_{k+2}, \quad \alpha g'_{k+2} = g'_{k+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha g'_{m-1} = g'_m, \quad \alpha g'_m = g'_{m-1}. \end{gathered} \tag{6}$$

Тогда элементы $g'_1, \ldots, g'_m$ и будут порождать искомую группу F.

Рассмотрим два случая.

1) $i \leqslant k$. В этом случае с учетом равенств (4), (5) условие (6) можно записать в виде

$$\varepsilon_i g_i + b_{i1}h_1 + \ldots + b_{in}h_n + x_{i1}\delta_1 h_1 + \ldots + x_{in}\delta_n h_n = \\ = \varepsilon_i g_i + x_{i1}\varepsilon_i h_1 + \ldots + x_{in}\varepsilon_i h_n.$$

Отсюда видно, что (6) эквивалентно системе сравнений относительно неизвестных x_{ij}:

$$(\varepsilon_i - \delta_j)\, x_{ij} \equiv b_{ij} \pmod{m_j}, \qquad j \in \overline{1,\ n}. \tag{7}$$

Если $b_{ij} = 0$, то можно положить $x_{ij} = 0$. Пусть $b_{ij} \neq 0$. Так как α — инволютивный автоморфизм, то $\alpha^2 g_i = g_i$, т. е.

$$\varepsilon_i (\varepsilon_i g_i + b_{i1}h_1 + \ldots + b_{in}h_n) + b_{i1}\delta_1 h_1 + \ldots + b_{in}\delta_n h_n = g_i,$$

и потому

$$(\varepsilon_i + \delta_j)\, b_{ij} \equiv 0 \pmod{m_j}, \quad j \in \overline{1,\ n}. \tag{8}$$

Из (8) при $b_{ij} \neq 0$ получим $\varepsilon_i = -\delta_j$, и следовательно, j-е сравнение системы (7) разрешимо.

2) $i > k$. В этом случае можно считать, что

$$\alpha g_i = g_{i+1}, \qquad \alpha g_{i+1} = g_i,$$

и g'_i, g'_{i+1}, выбираются из условия

$$\alpha g'_i = g'_{i+1}, \quad \alpha g'_{i+1} = g'_i. \tag{9}$$

Из (4) и (9) имеем

$$g_{i+1} + b_{i1}h_1 + \ldots + b_{in}h_n + x_{i1}\delta_1 h_1 + \ldots + x_{in}\delta_n h_n = \\ = g_{i+1} + x_{i+1,1}h_1 + \ldots + x_{i+1,n}h_n,$$

$$g_i + b_{i+1,1}h_1 + \ldots + b_{i+1,n}h_n + x_{i+1,1}\delta_1 h_1 + \ldots + x_{i+1,n}\delta_n h_n = \\ = g_i + x_{i1}h_1 + \ldots + x_{in}h_n.$$

Отсюда для неизвестных x_{ij}, $x_{i+1,j}$, $j \in \overline{1, n}$, получаем систему сравнений

$$\begin{aligned} x_{i+1,j} - x_{ij}\delta_j &\equiv b_{ij} \pmod{m_j}, \\ x_{ij} - x_{i+1,j}\delta_j &\equiv b_{i+1,j} \pmod{m_j}. \end{aligned} \tag{10}$$

Как и в случае 1), из условия $\alpha^2 g_i = g_i$ получим

$$b_{ij}\delta_j = -b_{i+1,j} \pmod{m_j}.$$

Из этого соотношения следует, что в системе (10) второе сравнение является следствием первого, которое, очевидно, разрешимо. Теорема доказана.

Объединяя утверждение А и теоремы 1, 2, получим следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $G = F + H$ — конечно порожденная абелева группа с периодической частью H нечетного порядка и α-инволютивный автоморфизм группы G. Тогда в G можно выбрать систему образующих $a_1, \ldots, a_{n_1}$, $b_1, \ldots, b_{n_2}$, c_1, $d_1, \ldots, c_m$, d_m, $h_1, \ldots, h_k$ таким образом, что группа G представляется в виде*

$$G = \langle a_1\rangle + \ldots + \langle a_{n_1}\rangle + \langle b_1\rangle + \ldots + \langle b_{n_2}\rangle + \langle c_1\rangle + \langle d_1\rangle + \ldots \\ \ldots + \langle c_m\rangle + \langle d_m\rangle + \langle h_1\rangle + \ldots + \langle h_k\rangle, \tag{11}$$

где $a_1, \ldots, a_{n_1}$, $b_1, \ldots, b_{n_2}$, c_1, $d_1, \ldots, c_m$, $d_m \in F$, $h_1, \ldots, h_k \in H$, $\operatorname{ord} h_i = p_i^{t_i}$, $p_1, \ldots, p_k$ — нечетные простые числа, $i \in \overline{1, k}$, и

$$\begin{gathered} \alpha a_i = a_i, \quad i \in \overline{1, n_1}, \quad \alpha b_i = -b_i, \quad i \in \overline{1, n_2}, \\ \alpha c_i = d_i, \quad \alpha d_i = c_i, \quad i \in \overline{1, m}, \\ \alpha h_i = \varepsilon_i h_i, \quad \varepsilon_i \in \{1, -1\}, \quad i \in \overline{1, k}. \end{gathered}$$

Теорема 4. *Пусть группа G представлена в виде (11). Если*

$$n_1 + n_2 + m \geqslant 2 \qquad (n_1,\ n_2 \neq 1 \text{ при } m = 0) \tag{12}$$

и α не совпадает с ε и $-\varepsilon$ на F, то решетка $L(G, \alpha)$ изоморфна решетке $L(G', \beta)$, где G' — абелева группа, не содержащая элементов порядка 2, β — инволютивный автоморфизм группы G', тогда и только тогда, когда существует изоморфизм $\overline{\varphi}$ группы G на группу G' такой, что $\alpha = \overline{\varphi}^{-1}\lambda\beta\overline{\varphi}$, где $\lambda = \pm 1$.

Доказательство. Пусть $L(G, \alpha) \overset{\varphi}{\cong} L(G', \beta)$. Тогда по утверждению Б $G' = F' + H'$, где

$$F' = \langle a'_1\rangle + \ldots + \langle a'_{n_1}\rangle + \langle b'_1\rangle + \ldots + \langle b'_{n_2}\rangle + \langle c'_1\rangle + \langle d'_1\rangle + \ldots + \langle c'_m\rangle + \langle d'_m\rangle$$

— свободная абелева группа, $H' = \langle h'_1\rangle + \ldots + \langle h'_k\rangle$ — конечная группа, $\operatorname{ord} h'_i = q_i^{t_i}$, $i \in \overline{1, k}$, $q_1, \ldots, q_k$ — простые числа, причем

$$\begin{gathered} \langle a_i\rangle^{\varphi} = \langle a'_i\rangle, \quad i \in \overline{1, n_1}, \quad \langle b_i\rangle^{\varphi} = \langle b'_i\rangle, \quad i \in \overline{1, n_2}, \\ (\langle c_i\rangle + \langle d_i\rangle)^{\varphi} = \langle c'_i\rangle + \langle d'_i\rangle, \quad i \in \overline{1, m}, \quad \langle h_i\rangle^{\varphi} = \langle h'_i\rangle, \quad i \in \overline{1, k}, \\ \beta a'_i = \lambda a'_i, \quad \lambda \in \{1, -1\}, \quad i \in \overline{1, n_1}, \quad \beta b'_i = -\lambda b'_i, \quad i \in \overline{1, n_2}, \\ \beta c'_i = d'_i, \quad \beta d'_i = c'_i, \quad i \in \overline{1, m}, \quad \beta h'_i = \mu_i h'_i, \quad i \in \overline{1, k}. \end{gathered}$$

Изоморфизм φ: $L(G, \alpha) \to L(G', \beta)$ порождает изоморфизм φ: $L(F, \alpha) \to L(F', \beta)$ (мы будем обозначать одной буквой изоморфизм группы и его ограничение на любой подгруппе).

По утверждению В изоморфизм φ: $L(F, \alpha) \to L(F', \beta)$ индуцируется четырьмя изоморфизмами группы F на группу F'. Как показано в [2], одним из этих изоморфизмов является изоморфизм $\bar{\varphi}$, определяемый соотношениями $\bar{\varphi}a_i = a'_i$, $i \in \overline{1, n_1}$, $\bar{\varphi}b_i = b'_i$, $i \in \overline{1, n_2}$, $\bar{\varphi}c_i = c'_i$, $\bar{\varphi}d_i = \lambda d'_i$, $i \in \overline{1, m}$.

Покажем, что изоморфизм $\bar{\varphi}$ можно продолжить до изоморфизма группы G на G' так, что будет выполнено соотношение $\alpha = \bar{\varphi}^{-1}\lambda\beta\bar{\varphi}$.

Рассмотрим два случая.

1) $m \neq 0$, т. е. в группе F есть α-допустимая подгруппа $\langle c_1 \rangle + \langle d_1 \rangle$ такая, что $\alpha c_1 = d_1$, $\alpha d_1 = c_1$.

Рассмотрим α-допустимые подгруппы $A = \langle c_1 + \varepsilon_i d_1 \rangle + \langle h_i \rangle$ и $B = \langle c_1 + \varepsilon_i d_1 + r h_i \rangle$, $0 < r < p_i^{t_i}$. Так как $A = B + \langle h_i \rangle$, то $A^\varphi = B^\varphi + \langle h'_i \rangle$. Но $A^\varphi = \langle c'_1 + \varepsilon_i \lambda d'_1 \rangle + \langle h'_i \rangle$. Следовательно, $B^\varphi = \langle c'_1 + \varepsilon_i \lambda d'_1 + s h'_i \rangle$, $0 < s < q_i^{t_i}$. Подгруппа B^φ должна быть β-допустимой, т. е. должно быть выполнено соотношение $\beta B^\varphi = B^\varphi$. Поскольку $\beta B^\varphi = \langle d'_1 + \lambda\varepsilon_i c'_1 + s\mu_i h'_i \rangle$, то должно существовать число $z \in \mathbf{Z}$ такое, что

$$d'_1 + \lambda\varepsilon_i c'_1 + s\mu_i h'_i = z\,(c'_1 + \lambda\varepsilon_i d'_1 + s h'_i).$$

Следовательно, $z = \lambda\varepsilon_i$ и $\lambda\varepsilon_i s \equiv s\mu_i \left(\operatorname{mod} q_i^{t_i}\right)$. Отсюда,

$$\lambda\varepsilon_i\mu_i s \equiv s \left(\operatorname{mod} q_i^{t_i}\right), \text{ т. е. } s(\lambda\varepsilon_i\mu_i - 1) \equiv 0 \left(\operatorname{mod} q_i^{t_i}\right);$$

и так как $s \not\equiv 0 \left(\operatorname{mod} q_i^{t_i}\right)$ и q_i нечетно, то $\lambda\varepsilon_i\mu_i = 1$, т. е. $\mu_i = \lambda\varepsilon_i$.

В решетке $L(G, \alpha)$ существует $p_i^{t_i} - 1$ подгрупп типа $B = \langle c_1 + \varepsilon_i d_1 + r h_i \rangle$, $0 < r < p_i^{t_i}$ (при фиксированном i). Следовательно, в решетке $L(G', \beta)$ должно быть столько же подгрупп типа $B^\varphi = \langle c'_1 + \lambda\varepsilon_i d'_1 + s h'_i \rangle$, $0 < s < q_i^{t_i}$. Отсюда следует, что $p_i = q_i$.

2) $m = 0$. Тогда, как следует из условия (12), в F существуют подгруппы $\langle a_1 \rangle$, $\langle b_1 \rangle$ такие, что $\alpha a_1 = a_1$, $\alpha b_1 = -b_1$. Возьмем любой из элементов h_i, $i \in \overline{1, k}$. Возможны два случая.

а) $\alpha h_i = h_i$ (т. е. $\varepsilon_i = 1$). Рассматривая α-допустимые подгруппы $A = \langle a_1 \rangle + \langle h_i \rangle$ и $B = \langle a_1 + r h_i \rangle$, $0 < r < p_i^{t_i}$, как и в случае 1), получим $\mu_i = \lambda$ и $p_i = q_i$.

б) $\alpha h_i = -h_i$ (т. е. $\varepsilon_i = -1$). Совершенно аналогично, рассматривая α-допустимые подгруппы $A = \langle b_1 \rangle + \langle h_i \rangle$ и $B = \langle b_1 + r h_i \rangle$, $0 < r < p_i^{t_i}$, получим $\mu_i = -\lambda$ и $p_i = q_i$.

Таким образом, показано, что если $\langle h_i \rangle^\varphi = \langle h'_i \rangle$, то порядки элементов h_i и h'_i равны. Следовательно, можно продолжить изоморфизм $\bar{\varphi}$ на всю группу G, положив $\bar{\varphi}h_i = h'_i$, $i \in \overline{1, k}$. Из доказанного видно, что $\alpha = \bar{\varphi}^{-1}\lambda\beta\bar{\varphi}$.

Пусть $\alpha = \bar{\varphi}^{-1}\lambda\beta\bar{\varphi}$, $\lambda = \pm 1$, $\bar{\varphi}$ — некоторый изоморфизм группы G на группу G'. Тогда структуры $L(G, \alpha)$ и $L(G', \lambda\beta)$ изоморфны, а так как структуры $L(G', \lambda\beta)$ и $L(G', \beta)$ совпадают, то $L(G, \alpha) \cong L(G', \beta)$. Теорема доказана.

Замечание. Условие $\alpha \neq \pm\varepsilon$ на F существенно.

В самом деле, если, например, $G = \langle a_1 \rangle + \langle a_2 \rangle + \langle h \rangle$, где a_1, a_2 — элементы бесконечного порядка, h — элемент простого нечетного порядка p и $\alpha a_1 = \delta a_1$, $\alpha a_2 = \delta a_2$, $\alpha h = -\delta h$, $\delta \in \{1, -1\}$, то, очевидно, α-допустимыми подгруппами в G будут: любая подгруппа из $\langle a_1 \rangle + \langle a_2 \rangle$, группа $\langle h \rangle$, их прямые суммы и только они. Отсюда следует, что если $G' = \langle a'_1 \rangle + \langle a'_2 \rangle + \langle h' \rangle$, где a'_1, a'_2 — элементы бесконечного порядка, а h' — элемент простого нечетного порядка q, $q \neq p$, и $\beta a'_1 = \lambda\delta a'_1$, $\beta a'_2 = \lambda\delta a'_2$, $\beta h' = -\lambda\delta h'$, $\lambda \in \{1, -1\}$, то $L(G', \beta) \cong L(G, \alpha)$, хотя $G' \not\cong G$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белякова Н. П. Определяемость свободных абелевых групп конечного ранга структурой подгрупп, инвариантных относительно инволютивного автоморфизма // Изв. вузов. Математика.— 1971.— № 6.— С. 9—14.
2. Белякова Н. П. Об изоморфизмах структур α-допустимых подгрупп абелевых групп без кручения // Изв. вузов. Математика.— 1973.— № 10.— С. 3—13.
3. Grun O. Einige Satze uber automorphismen abelscher p-Gruppen // Abhaudl. Math. Seminar Univ., Hamburg.— 1960.— V. 24.— P. 54—58.
4. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп.— М.: Мир, 1980.

Статья поступила 27.11.89