



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Носич, В. П. Шестопапов, Самосогласованное решение задачи дифракции на неоднородности в открытом волноводе, *Докл. АН СССР*, 1985, том 284, номер 2, 337–341

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.170

20 марта 2025 г., 23:55:09



А.И. НОСИЧ, академик АН УССР В.П. ШЕСТОПАЛОВ

САМОСОГЛАСОВАННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ  
НА НЕОДНОРОДНОСТИ В ОТКРЫТОМ ВОЛНОВОДЕ

Рассеяние собственных волн открытых волноводов на неоднородностях представляет большой интерес в физике и технике СВЧ, а также в акустике и гидродинамике. Однако до сих пор это явление исследовалось приближенно и обычно в несамосогласованной постановке (например, в приближении "заданного поля") [1-4]. Самосогласованная же постановка задачи дифракции должна включать требования выполнения точных граничных условий как на неоднородности, так и на поверхности волновода, а также условия на бесконечности, модифицированного с учетом того, что открытый волновод без неоднородности обладает дискретным спектром незатухающих собственных волн.

В настоящей работе развит именно такой строгий самосогласованный подход к плоским задачам рассеяния собственных волн открытых волноводов на идеально проводящих неоднородностях. Он основан на использовании функции Грина волновода как слоистой среды и приводит к интегральным или интегродифференциальным уравнениям, разрешимым методами, развитыми ранее для задач дифракции волн на телах, находящихся в свободном пространстве. В качестве примера методом полуобращения построено решение задачи рассеяния собственной волны плоского диэлектрического волновода на незамкнутом цилиндре.

1. Рассмотрим идеально проводящую цилиндрическую неоднородность, на которую, нормально к ней, слева набегают одна из собственных поверхностных волн типа  $E_i$  диэлектрического волновода (рис. 1), причем вне волновода  $H_z$ -компонента ее магнитного поля имеет вид ( $\sim e^{-i\omega t}$ )

$$(1) \quad H^0 = e^{-\alpha_i k(y+b)} e^{ih_i kx}, \quad y \geq -b,$$

где  $k = \omega/c$ ,  $\alpha_i = \sqrt{h_i^2 - 1}$ ,  $1 < h_i < \sqrt{\epsilon}$  — постоянная распространения, определяемая из соответствующего дисперсионного уравнения [5].

Представим полное поле, установившееся в результате рассеяния, в виде суммы  $H = H^0 + H^s$  и подчиним функцию  $H(r, \varphi)$  следующим условиям: 1) уравнению Гельмгольца всюду вне поверхностей препятствия  $L$  и волновода; 2) краевому условию Неймана на  $L$ ; 3) условиям сопряжения при  $y = -b$ ,  $y = -b - 2d$ ; 4) условию типа Мейкснера в концевых точках  $L$ ; 5) условию на бесконечности, исключающему любые волны, приходящие извне, кроме падающей.

Последнее условие необходимо видоизменить по сравнению с задачами дифракции на телах в свободном пространстве, с учетом дискретного спектра собственных волн диэлектрического волновода. Поэтому, например, при  $y \geq -b$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$

$$(2) \quad H^s = \Psi_i(\varphi) \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr - \pi/4)} + \sum_{j=1}^N \begin{cases} T_{ij} - \delta_{ij}, & x > 0 \\ R_{ij}, & x < 0 \end{cases} e^{-\alpha_j k(y+b) + ih_j k|x|},$$

где  $N \geq 1$  — число собственных волн, являющихся незатухающими при фиксированных параметрах волновода,  $T_{ij}$  и  $R_{ij}$  — коэффициенты трансформации из  $i$ -той волны в  $j$ -тую в зоне прохождения ( $x \rightarrow \infty$ ) и отражения ( $x \rightarrow -\infty$ ),  $\Psi_i(\varphi)$  — диаграмма направленности поля излучения.

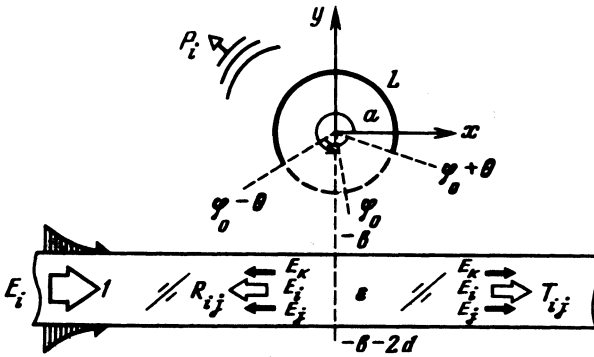


Рис. 1. К задаче дифракции собственной волны открытого волновода на неоднородности в виде незамкнутого экрана

2. Из условий 1)–3), 5) следует, что рассеянное поле целесообразно искать в виде потенциала двойного слоя с ядром – функцией Грина слоистой среды, соответствующей диэлектрическому волноводу

$$(3) \quad H^s = \int_L \mu(r_l) \frac{\partial}{\partial n_l} G(r, r_l) dl, \quad r_l = (x_l, y_l) \in L,$$

где

$$(4) \quad G(r, r_l) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|r - r_l|) + \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(h)}{g} e^{igk(y+y_l+2b)+ihk(x-x_l)} dh,$$

$$(5) \quad R(h) = (\epsilon - 1)(igctgpkd + p)^{-1} (ig \operatorname{tg} pkd - p)^{-1}, \quad g = \sqrt{1 - h^2}, \quad p = \sqrt{\epsilon - h^2},$$

Для отыскания плотности поверхностного тока на неоднородности  $\mu(r_l)$  получаем интегродифференциальное уравнение 1-го рода

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial n} \int_L \mu(r_l) \frac{\partial}{\partial n_l} G(r, r_l) dl = - \frac{\partial H^0}{\partial n}, \quad r, r_l \in L.$$

Уравнения типа (6) можно свести к интегральному и решать одним из известных численных методов. Однако в том случае, когда задача дифракции для аналогичной неоднородности, находящейся в свободном пространстве, допускает строгое решение, оператор уравнения (6) можно частично обратить. Тогда задача сводится к уравнению 2-го рода с матричным или интегральным оператором фредгольмового типа. Это возможно, в частности, для неоднородности в виде незамкнутого кругового цилиндрического экрана (рис. 1).

3. Дополним функцию  $\mu(\varphi_l)$  нулем на интервале  $|\varphi_l - \varphi_0| < \theta$  и представим ее рядом Фурье с коэффициентами  $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ , причем из условия Мейкснера вытекает требование  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\mu_n|^2 |1+n| < \infty$ .

Подставляя в (6) ряды Фурье для функций  $\mu(\varphi_l)$ ,  $G(r, r_l)$  и  $H^0(r)$ , приходим к парным сумматорным уравнениям относительно  $\mu_n$ , статическая часть оператора которых образует задачу Римана–Гильберта, имеющую известное решение [6]. Это позволяет свести парные уравнения к системе линейных алгебраических уравнений

$$(7) \quad \mu_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_{mn} + B_{mn}) \mu_n + C_m, \quad m = 0, \pm 1, \dots,$$

где

$$A_{mn} = (|n| + i\pi k^2 a^2 J'_n H'_n) W_{mn}, \quad C_m = i\pi k^2 a^2 e^{-\alpha_j k b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J'_n e^{in\psi} W_{mn},$$

$$B_{mn} = i\pi k^2 a^2 (-1)^n J'_n \sum_{p=-\infty}^{\infty} J'_p \Omega_{n+p} W_{mp},$$

$$W_{mn} = (-1)^{m+n} e^{i(n-m)\varphi_0} \begin{cases} m^{-1} V_{m-1}^{n-1}(-u), & m \neq 0, \\ n^{-1} V_{n-1}^{-1}(-u), & m=0, \quad n \neq 0, \\ -\ln[(1-u)/2], & m=n=0, \end{cases}$$

$$(8) \quad \Omega_n = \frac{i^n}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{g} R(h) e^{i2gkb} e^{in\psi} dh,$$

где  $J_n = J_n(ka)$ ,  $H_n = H_n^{(1)}(ka)$ ,  $\cos \psi = h$ ,  $\sin \psi = -g = i\alpha$ ,  $u = \cos \theta$ , а функции  $V_{m-1}^{n-1}$  определены в [6].

Можно показать, что оператор  $I - A - B$  фредгольмов, что позволяет обосновать существование единственного решения (7) и возможность его отыскания методом редукции. Из асимптотик функций  $V_{m-1}^{n-1}$  вытекает, что при  $|m| \rightarrow \infty$   $\mu_m = O(|m|^{-3/2})$ , обеспечивая тем самым выполнение условия 4).

Оператор  $A$  отвечает задаче дифракции поля  $H^0$  на цилиндре, находящемся в свободном пространстве, а  $B$  описывает взаимодействие цилиндра со слоем диэлектрика. Поэтому, если решение (7) отыскивать методом последовательных приближений, полагая

$$(9) \quad \mu^{(0)} = A \mu^{(0)} + C, \dots, \quad \mu^{(n)} = A \mu^{(n)} + C + B \mu^{(n-1)},$$

то этот процесс будет соответствовать учету последовательных переотражений поля, рассеянного на цилиндре, от поверхности волновода (приближение с номером  $n$  отвечает  $n$ -му порядку переотражения).

Уравнение  $\text{Det}(I - A - B) = 0$  определяет собственные частоты незамкнутого цилиндрического резонатора, расположенного над слоем диэлектрика. При этом присутствие оператора  $B$  описывает тот факт, что потери энергии в таком резонаторе определяются уже не только излучением через щель, но и связью с поверхностными и вытекающими волнами открытого волновода, постоянные распространения которых совпадают с полюсами подынтегральной функции в  $\Omega_n$  (см. (5), (8)).

4. Вычисление поля  $H$  как функции от  $x$  требует выполнить интегрирование по  $h$  в (3), (4). При этом следует учесть наличие точек ветвления  $h = \pm 1$  и полюсов  $h_j$  функции  $R(h)$ , часть которых с номерами  $j = 1, \dots, i, \dots, N$  лежит на вещественной оси и отвечает собственным волнам, распространяющимся без затухания.

Вычеты в указанных полюсах приводят к следующим коэффициентам трансформации типов волн на незамкнутом цилиндре:

$$(10) \quad \begin{pmatrix} T_{ij} - \delta_{ij} \\ R_{ij} \end{pmatrix} = 4\alpha_j h_j^{-1} e^{-\alpha_j k b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_n (\pm i)^n J'_n (h_j \pm \alpha_j)^n.$$

Кроме полей собственных волн, во всем пространстве еще существует дополнительное поле  $\tilde{H}$ , выражающееся интегралом вдоль разреза от одной из точек ветвления  $h = \pm 1$ . При выполнении условий  $k|x| \gg 1$ ,  $k|x| \gg k^2(y+2b)^2 \tilde{H} = O(k^{-1}|x|^{-1})$ .

Вне указанной области пространства асимптотическое выражение для  $\tilde{H}$  дает метод перевала, например, при  $kr \sin \varphi \rightarrow +\infty$

$$(11) \quad \Psi_j(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_n (-i)^n J'_n [e^{in\varphi} + R(\cos \varphi) e^{i2kb \sin \varphi - in\varphi}].$$

Как следует из (5), (11),  $\Psi(0) = \Psi(\pi) = 0$ , так что поле, рассеянное в виде цилиндрической волны, в этих направлениях полностью гасится излучением "изображения" неоднородности, находящимся на расстоянии  $2b$  под поверхностью волновода. Энергия  $P_i$  цилиндрической волны (11) удовлетворяет, вместе с  $T_{ij}$  и  $R_{ij}$ , уравнению баланса энергии

$$(12) \quad P_i + \sum_{j=1}^N (|R_{ij}|^2 + |T_{ij}|^2) = 1.$$

5. При условии  $ka < 1$  решение системы уравнений (7) можно получить в виде асимптотического ряда, равномерного относительно параметров  $\varphi_0$  и  $\theta$ , т.е. для всех типов неоднородностей малых волновых размеров от замкнутого цилиндра до произвольно расположенной плоской ленты:

$$(13) \quad \begin{pmatrix} T_{ij} - \delta_{ij} \\ R_{ij} \end{pmatrix} = 2i\alpha_j h_j^{-1} e^{-\alpha_j kb} \{ \mu_0 ka [i \pm ka(1+u) \cos(\varphi_0 \mp \psi_j)] \pm \\ \pm \frac{1}{2} \pi (ka)^2 (1+u) e^{-\alpha_j kb} [\cos(\psi_j \pm \psi_j) + (1-u) \cos(2\varphi_0 + \psi_j \mp \psi_j)] \},$$

где

$$(14) \quad \mu_0 = - \frac{i\pi(ka)^2 e^{-\alpha_j kb}}{2D(ka, \theta)} \left\{ ka - (\alpha_i \sin \varphi_0 + ih_i \cos \varphi_0) \frac{1+u}{W_{00}} - \right. \\ \left. - ka [(1+2\alpha_i^2) \cos 2\varphi_0 - 2i\alpha_i h_i \sin 2\varphi_0] \frac{1-2u-3u^2}{16 W_{00}} \right\},$$

$$D(ka, \theta) = W_{00}^{-1} - (ka)^2 [1 + \frac{1}{4} i\pi(ka)^2 (1 + \Omega_0)], \quad \alpha_j = -ig_j.$$

В частности, для замкнутого цилиндра ( $\theta = 0$ )

$$(15) \quad \begin{pmatrix} T_{ij} - \delta_{ij} \\ R_{ij} \end{pmatrix} = \pm i\pi(ka)^2 \frac{\alpha_j}{h_j} e^{-(\alpha_i + \alpha_j) kb} [2(h_i h_j \pm \alpha_i \alpha_j) \mp 1].$$

Построенные равномерные асимптотические выражения охватывают и случай резонансного рассеяния на частоте моды Гельмгольца  $H_{00}$  [7] (щелевой резонанс), когда эффективность отражения и рассеяния резко возрастает:

$$(16) \quad T_{ij}^{\text{рез}} - \delta_{ij} \approx R_{ij}^{\text{рез}} \approx \frac{4\alpha_j}{h_j} e^{-2\alpha_j k_0 b} \frac{1 - 2(k_0 a)^2 (\alpha_i \sin \varphi_0 + ih_i \cos \varphi_0)}{1 + \text{Re } \Omega_0},$$

$$(17) \quad k_0 a = W_{00}^{-1} [1 + \frac{1}{4} i\pi(1 + \Omega_0) W_{00}^{-1}].$$

6. В заключение отметим, что предложенный самосогласованный подход допускает обобщение для случая произвольной плоскопараллельной слоистой среды, а также для конечного числа произвольным образом расположенных неоднородностей, каждая из которых находится целиком внутри некоторого слоя. В последнем случае задача сводится к конечному числу связанных систем линейных алгебраических уравнений типа (7). Аналогичный подход может быть развит и для радиально-слоистых сред, в частности, для круглого диэлектрического волновода.

Полученные результаты, с одной стороны, представляют интерес для оценки и уменьшения нежелательных эффектов при внесении неоднородностей в открытый волновод. С другой стороны, они могут быть полезны для проектирования элементной базы в открытых волноведущих структурах интегральной техники СВЧ.

Институт радиофизики и электроники  
Академии наук УССР, Харьков

Поступило  
23 IV 1985

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Davis M.J., Leppington F.G. — Proc. Roy. Soc. London, 1977, vol. 533-A, 1, p. 55–75.
2. Morita N. — IEE Proc., 1980, vol. 127-H, 5, p. 263–269.
3. Носич А.И. — Изв. вузов. Сер. радиофизика, 1981, т. 23, № 8, с. 1014–1021.
4. Uzunoglu N.K., Pikiotis J.G. — J. Opt. Soc. Amer., 1982, vol. 72, 5, p. 628–637.
5. Взятыхшев В.Ф. Диэлектрические волноводы. М.: Сов. радио, 1970. 216 с.
6. Шестопалов В.П. Сумматорные уравнения в современной теории дифракции. Киев: Наукова думка, 1983. 286 с.
7. Носич А.И., Шестопалов В.П. — ДАН, 1977, т. 234, № 1, с. 53–56.

УДК 533.72

ФИЗИКА

Ю.И. ЯЛАМОВ, М.Ф. БАРИНОВА, Ю.К. ОСТРОВСКИЙ, Е.Р. ЩУКИН  
**ТЕОРИЯ ИСПАРЕНИЯ ДВУХ КАПЕЛЬ, НАХОДЯЩИХСЯ  
НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ РАССТОЯНИЯХ ДРУГ ОТ ДРУГА**

(Представлено академиком И.В. Петряновым-Соколовым 29 VI 1983)

В настоящей работе приведены результаты исследования испарения двух взаимодействующих капель при произвольных перепадах температуры в системе.

При квазистационарном характере процесса испарения капли [1–3] распределения температуры и относительной концентрации  $c_1$  паров летучего вещества капли в газообразной среде, окружающей неподвижные капли, описываются системой уравнений (1), (2) с граничными условиями (3)–(6):

- (1)  $\text{div}(\kappa_e \text{grad } T_e) = 0, \quad \text{div}(\kappa_l \text{grad } T_l) = 0,$
- (2)  $\text{div}(nD \text{grad } c_1) = 0,$
- (3)  $T_e|_{R_1} = T_{1l}|_{R_1}, \quad T_e|_{R_2} = T_{2l}|_{R_2},$
- (4)  $c_1|_{R_1} = c_{1s}(T_{1l}), \quad c_1|_{R_2} = c_{1s}(T_{2l}),$
- (5)  $T_e|_{r \rightarrow \infty} = T_{e\infty}, \quad c_1|_{r \rightarrow \infty} = c_{1\infty},$
- (6)  $\kappa_e(\text{grad } T_e \cdot n_\xi) + Lm_1 nD(\text{grad } c_1 \cdot n_\xi)|_{R_1; R_2} = \kappa_l(\text{grad } T_l \cdot n_\xi)|_{R_1; R_2},$

где  $\kappa_e$  и  $\kappa_l$  — коэффициенты теплопроводности бинарной газовой смеси и вещества капель;  $D$  — коэффициент диффузии;  $T_e$  и  $T_l$  — температуры в газообразной среде и каплях;  $c_1 = n_1/n$ ,  $n = n_1 + n_2$ ;  $n_1$  и  $n_2$  — концентрации молекул паров, испаряющихся (конденсирующихся) с поверхности капель, и молекул второго нелетучего компонента газовой смеси соответственно;  $T_{1l}$  и  $T_{2l}$  — температуры поверхности первой и второй капель;  $c_{1s}(T_{1l}) = n_{1s}(T_{1l})/n$ ;  $c_{1s}(T_{2l}) = n_{2s}(T_{2l})/n$ ;  $n_{1s}(T_{1l})$  и  $n_{2s}(T_{2l})$  — концентрации насыщенных паров вещества капель при температурах  $T_{1l}$  и  $T_{2l}$ ;  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы первой и второй капли;  $n_\xi$  — единичный вектор,