МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 44, № 5 (1988)

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ НЕГОЛОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ НА ГРУППАХ ЛИ

А. П. Веселов, Л. Е. Веселова

Введение. В замечательной работе [1] С. А. Чаплыгин рассмотрел задачу о качении динамически несимметричного уравновешенного шара по горизонтальной плоскости и показал, что она может быть проинтегрирована в θ-функциях. Эта задача, безусловно, входит в золотой фонд классической механики наряду с интегрируемыми задачами Якоби, Неймана, Ковалевской и др. Однако в отличие от последних она не является гамильтоновой, что делает ее интегрируемость еще более удивительной. Неголономность, как правило, противоречит гамильтоновости, но, как открыл С. А. Чаплыгин, вполне допускает более слабое свойство — существование инвариантной меры или интегрирующего множителя.

Этим свойством обладает, в частности, упомянутая задача о качении шара, и этот факт используется при ее интегрировании. Как показали более поздние исследования Е. И. Харламовой [2], В. В. Козлова [3], А. П. Маркеева [4], задача Чаплыгина допускает различные интегрируемые обобщения, причем во всех случаях имеется инвариантная мера. Последний факт получил объяснение в [5] (см. также [6]), где был введен класс систем на группах Ли, для которого доказано существование инвариантной меры. К этому классу относится задача Чаплыгина и ее обобщения, однако наиболее естественный пример найден одним из авторов [7], [8]. В этих работах рассмотрена задача о движении твердого тела с неподвижной точкой при наложении неголономной связи $(a, \Omega) = 0$, где

Ω — угловая скорость тела, a — неподвижный в пространстве вектор. Эта задача также интегрируется в θ-функциях способом, идейно близким к изложенному в [1] (см. [8]). Кроме того, она обладает интегрируемыми обобщениями, аналогичными найденным в работах [3], [4] (см. ниже).

1. Неголономные RL-системы на группах Ли. Пусть $\mathfrak{G}$ — группа Ли, G — ее алгебра Ли, G^* — сопряженное к ней пространство. Рассмотрим на $\mathfrak{G}$ *правоинвариантное* распределение, задаваемое как пространство нулей правоинвариантных форм $\alpha^1 = 0, \ldots, \alpha^k = 0$. Это распределение, вообще говоря, неголономно в силу следующего простого утверждения.

ЛЕММА 1. *Распределение π голономно тогда и только тогда, когда подпространство $\pi(e)$ касательного пространства к $\mathfrak{G}$ в единице, т. е. алгебры Ли G, образует подалгебру в G.*

Доказательство прямо следует из теоремы Фробениуса.

Предположим теперь, что на группе $\mathfrak{G}$ задана *левоинвариантная* риманова метрика, определяемая билинейной формой на G: $\langle x, y\rangle = (x, Iy)$. Здесь $I\colon G \to G^*$ — положительный самосопряженный оператор, а круглые скобки означают естественное спаривание G и G^*.

Нужный нам класс образуют механические системы на группе $\mathfrak{G}$ с неголономной правоинвариантной связью π и кинетической энергией, задаваемой левоинвариантной метрикой. Такие системы мы будем называть RL-системами.

Для записи уравнений движения введем переменные $\omega = (L_g^{-1})_*\dot{g} \in G$, $M = I\omega \in G^*$, $N^i = L_g^*\alpha^i|_e \in G^*$ $(i = 1, \ldots, k)$, где $g(t) \in \mathfrak{G}$ — траектория системы, L_g — левый сдвиг на группе $\mathfrak{G}$: $L_g(h) = gh$. Отметим, что $(N^i, \omega) = (N^i, (L_g^{-1})_*\dot{g}) = (L_g^{-1*}N^i, \dot{g}) = (\alpha^i, \dot{g}) \equiv 0$.

ЛЕММА 2. *Неголономный аналог уравнений Эйлера — Пуанкаре — Арнольда* [9] *для* RL-*систем имеет вид*

$$\begin{cases} \dot{M} = \{\omega, M\} + \lambda_i N^i, \\ \dot{N}^i = \{\omega, N^i\} \qquad (i = 1, \ldots, k), \end{cases} \tag{1}$$

где фигурные скобки обозначают коприсоединенное действие алгебры Ли G на G^*, неопределенные множители λ_i находятся из условий

$$(N^i, \omega) = 0. \tag{2}$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. В случае если на G есть невырожденная инвариантная билинейная форма (например, для полупростой алгебры Ли), то имеется естественный изоморфизм $G^* \approx G$; при этом изоморфизме $\{\omega, M\} = [M, \omega]$, где скобки $[\ ,\ ]$ обозначают коммутатор в алгебре Ли G.

Получим формулы для λ_i. Дифференцируя (2), имеем

$$\begin{aligned}(N^i, \omega)^{\cdot} &= (\dot{N}^i, \omega) + (N_i, \dot{\omega}) = \\ &= (\{\omega, N^i\}, \omega) + (N^i, A\,\{\omega, M\} + \lambda_j A N^j) = \\ &= (AN^i, \{AM, M\}) + \lambda_j\,(AN^j, N^i) \equiv 0,\end{aligned}$$

где $A = I^{-1}$: $G^* \to G$.

Введем матрицу $\Gamma^{ij} = (AN^j, N^i) = \Gamma^{ji}$ и обратную к ней Γ_{ij}: $\Gamma_{ij}\Gamma^{jk} = \delta_i^k$. Тогда

$$\lambda_i = \Gamma_{ij}\varkappa^j, \tag{3}$$

где $\varkappa^j = -(AN^j, \{AM, M\})$.

Как видно из предыдущей выкладки, система (1), (3) описывает динамику системы для всех связей вида $(N^i, \omega) = \alpha^i(\dot{g}) = c^i$, $c^i = \mathrm{const}$. Для дальнейшего нам будет удобно рассматривать именно систему (1), (3), имея в виду, что исходная система относится к специальному уровню ее интегралов. То же относится и к следующим обобщениям наших систем.

Рассмотрим динамику RL-систем при наличии внешних сил. Предположим, что потенциал сил зависит только от $N^1, \ldots, N^k$: $U = U(N^1, \ldots, N^k)$. С механической точки зрения это довольно разумное требование (см. примеры ниже). Введение гироскопических сил будем осуществлять добавлением в выражение для кинетической энергии линейных по M членов: $K = \frac{1}{2}(M, \omega) = \frac{1}{2}(AM, M) + (M, l)$, l — постоянный вектор из G.

Уравнения движения системы в присутствии таких сил имеют вид

$$\begin{cases} \dot{M} = \{\omega, M\} + \left\{\dfrac{\partial U}{\partial N^i}, N^i\right\} + \nu_i N^i, \\ \dot{N}^i = \{\omega, N^i\} \qquad (i = 1, \ldots, k), \end{cases} \tag{4}$$

где $\omega = AM + l$, а ν_i, как и ранее, находятся из условий $(N^i, \omega) = 0$:

$$\nu_i = -\Gamma_{ij}\left[(AN^j, \{\omega, M\}) + \left(AN^j, \left\{\frac{\partial U}{\partial N^s}, N^s\right\}\right)\right]. \tag{5}$$

Прежде чем формулировать основную теорему, напомним одно определение из теории алгебр Ли. Алгебра Ли называется *унитарной*, если форма объема на ней инвариантна относительно присоединенного действия (см., например, [10]). На языке структурных констант это означает, что $c^i_{ik} = 0$, а для группы $\mathfrak{G}$ это влечет существование двусторонне инвариантной меры. Все полупростые и нильпотентные алгебры Ли унитарны.

ТЕОРЕМА 1. *Если алгебра Ли унитарна, то система* (4), (5) *и, в частности, система* (1), (3), *обладают инвариантной мерой* $\mu = \Phi(N)\,\mathrm{d}M\mathrm{d}N^1 \ldots \mathrm{d}N^k$

$$\Phi(N^1, \ldots, N^k) = \sqrt{\det \| (AN^i, N^j) \|}. \tag{6}$$

Доказательство. Для простоты ограничимся случаем системы (1), (3), общий случай отличается лишь длиной формул. Выберем какой-нибудь базис $e^1, \ldots, e^n$ в $\mathfrak{G}^*$ так, что $M = M_k e^k$, $N^i = N^i_k e^k$. Надо доказать, что

$$\frac{\partial (X_k \Phi(N))}{\partial M_k} + \frac{\partial (Y^i_k \Phi(N))}{\partial N^i_k} = 0, \tag{7}$$

где X_k и Y^i_k — правые части уравнений (1), (3) в координатах M_k, N^i_k:

$$\dot M_k = X_k = c^i_{jk}\omega^j M_i + \lambda_i N^i_k, \qquad \dot N^i_k = Y^i_k = c^s_{jk}\omega^j N^i_s.$$

Выражение (7) преобразуем к виду

$$\Phi(N)\left(\frac{\partial X_k}{\partial M_k} + \frac{\partial Y^i_k}{\partial N^i_k}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial N^i_k} Y^i_k.$$

Рассмотрим сначала выражение в скобках: $\frac{\partial X_k}{\partial M_k} + \frac{\partial Y^i_k}{\partial N^i_k} = c^k_{jk}\omega^j + \frac{\partial \lambda_i}{\partial M_k} N^i_k + c^i_{jk}A^{jk}M_i + c^k_{jk}\omega^j = \frac{\partial \lambda_i}{\partial M_k} N^i_k$ в силу унитарности и разных симметрий тензоров c^i_{jk} и A^{jk}. Выделим один член в оставшейся сумме $\frac{\partial \lambda_1}{\partial M_k} \cdot N^1_k$. Для его преобразования удобно рассмотреть систему уравнений

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau_1} M = N^1, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau_1} N^i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Легко видеть, что

$$\frac{d}{d\tau_1}\lambda_1=\frac{\partial\lambda_1}{\partial M_k}N_k^1.$$

Далее,

$$\frac{d}{d\tau_1}\lambda_1=\frac{d}{d\tau_1}\varkappa^i\Gamma_{1i}=-\Gamma_{1i}\frac{d}{d\tau_1}(AN^i,\{AM,M\})=$$
$$=-\Gamma_{1i}\left[(AN^i,\{AN^1,M\})+(AN^i,\{AM,N^1\})\right].$$

Вся сумма принимает вид

$$\frac{\partial\lambda_i}{\partial M_k}N_k^i=-\Gamma_{ij}\left[([AN^i,AN^j],M)+([AN^i,AM]\,N^j)\right]=$$
$$=-\Gamma_{ij}([AN^i,AM],N^j).$$

Здесь мы использовали равенство $(a,\{b,x\})=([a,b],x)$ для любых $a,b\in G$, $x\in G^*$.

Рассмотрим теперь выражение $\frac{\partial\Phi}{\partial N_k^i}Y_k^i=\dot\Phi=\frac{1}{2\Phi}\dot\Gamma$, где $\Gamma=\det\|(AN^i,N^j)\|$ — определитель Грама. Воспользуемся правилом для дифференцирования определителя

$$\dot\Gamma=\dot\Gamma^{ij}\Gamma_{ji}\Gamma:\ \dot\Gamma^{ij}=2(AN^i,\dot N^j)=2(AN^i,\{AM,N^j\}).$$

Итак,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial N_k^i}Y_k^i=\dot\Phi=(AN^i,\{AM,N^j\})\,\Gamma_{ij}\Phi.$$

Теперь все выражение (7) принимает вид: $\frac{\partial X_k}{\partial M_k}+\frac{\partial Y_k^i}{\partial N_k^i}=$ $=\Phi\Gamma_{ij}([AN^i,AM],N^j)+\Phi\Gamma_{ij}(AN^i,\{AM,N^j\})\equiv0$, что и требовалось доказать.

В отличие от обычных уравнений Эйлера их неголономный аналог для RL-систем (1), (3) обладает тем недостатком, что использует в своей записи большое число переменных, являющихся, по существу, избыточными. Эта ситуация типична при работе с многообразием Грассмана. Истинными переменными являются координаты на группе и ее (ко)касательном расслоении. В связи с этим возникает вопрос о мере в исходном фазовом пространстве. Ответ на него дается следующей теоремой 2.

Рассмотрим функцию на группе $\Psi(g)=$ $=\sqrt{\det\|(A\alpha^i(g),\alpha^j(g))\|}$, где, напомним, $\alpha^i(g)\in T_g^*\mathfrak{G}$ $(i=1,\ldots,k)$ — независимые правоинвариантные формы, задающие распределение. Эта функция определена с точностью до постоянного множителя, зависящего от выбора форм α^i. Ее геометрический смысл — объем параллелепипеда, порожденного правоинвариантным набором $\alpha^1, \ldots, \alpha^k$, в левоинвариантной метрике на $T^*\mathfrak{G}$, определяемой кинетической энергией.

На $T^*\mathfrak{G}$ как на любом кокасательном расслоении имеется каноническая мера $\mathrm{d}\sigma$, порожденная канонической симплектической формой.

ТЕОРЕМА 2. *Если на группе Ли $\mathfrak{G}$ имеется двусторонне инвариантная мера $\mathrm{d}g$, то система, описывающая движение неголономной* RL*-системы на группе $\mathfrak{G}$, обладает инвариантной мерой*

$$\mathrm{d}v = \Psi(g)\,\mathrm{d}\sigma. \tag{8}$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную систему уравнений, составленную из (1), (3), и уравнения

$$\dot{g} = (L_g)_*\omega, \tag{9}$$

эквивалентного определению ω.

ЛЕММА 3. *Система* (1), (3), (9) *обладает инвариантной мерой* $\Phi(N)\,\mathrm{d}M\,\mathrm{d}N^1 \ldots \mathrm{d}N^k\mathrm{d}g$, *где* $\Phi(N)$ *задается формулой* (6).

Доказательство леммы вытекает из анализа доказательства теоремы 1 и инвариантности $\mathrm{d}g$ относительно левых сдвигов.

Теперь заметим, что при сдвиге вдоль решений переменные N^i подвергаются лишь коприсоединенному действию $A\mathrm{d}_g^*$, сохраняющему в силу унитарности G меру $\mathrm{d}N^i$. Кроме того, мера $\mathrm{d}M\,\mathrm{d}g$, являясь левоинвариантной, может отличаться от $\mathrm{d}\sigma$ лишь постоянным множителем.

Сопоставляя эти факты, приходим к утверждению теоремы. Легко видеть, что те же рассуждения проходят и для случая силовых полей, рассмотренных выше, так что теорема 2 относится и к этой ситуации.

Замечание. Мера (8) определена для всех групп Ли, однако предложенное доказательство ее инвариантности использует наличие на группе двусторонне инвариантной меры. По-видимому, последнее предположение не является существенным. Точно так же для силовых полей важна лишь их правоинвариантность.

Обсудим теперь вопрос об интегралах. Введем «момент в пространстве» (ср. [9]): $m = A\mathrm{d}_g^*M$. Это элемент G^*, т. е. линейная функция на G. Ее можно ограничить на подпространство $\pi(e) \subset G$, обозначим это ограничение $i^*(m)$. Другими словами, мы рассматриваем ограничение импульса системы как элемента кокасательного пространства к группе на пространство распределения в соответствующей точке. При этом кокасательные пространства в разных точках отождествляются с помощью *правых* сдвигов. Можно показать (например, с помощью (3), (5)), что $\dot{m}$ есть линейная комбинация форм, задающих подпространство $\pi(e)$. Ограничивая это равенство на $\pi(e)$, получаем, что $\frac{d}{dt} i^*(m) = 0$.

ТЕОРЕМА 3. *Ограничение импульса на пространство распределения при движении* RL-*системы на группе остается постоянным*: $i^*(m) = \mathrm{const}$.

Таким образом, у RL-систем на n-мерной группе Ли $\mathfrak{G}$ всегда имеется $(n+1)$ интеграл: k связей, рассматриваемых как интегралы (см. выше), $(n-k)$ законов сохранения момента $i^*(m)$ и интеграл энергии.

Следствие. *Уравнения движения* RL-*системы на трехмерной группе Ли с двусторонне инвариантной мерой интегрируются в квадратурах.*

Это утверждение вытекает из теоремы Якоби об интегрирующем множителе [11]: если система $\dot{x} = v(x)$, $x = (x^1, \ldots, x^n)$ обладает независимыми интегралами $F_1, \ldots, F_{n-2}$ и функцией $M(x)$ такой, что $\mathrm{div}\,(Mv) = 0$, называемой *интегрирующим множителем*, то она интегрируется в квадратурах.

В самом деле, на шестимерном фазовом пространстве мы имеем четыре интеграла, а интегрирующий множитель предъявляется теоремой 2, поскольку условие $\mathrm{div}\,(Mv) = 0$ эквивалентно сохранению потоком формы $M dx^1 \ldots dx^n$.

Наиболее интересный случай группы SO (3) подробно обсуждается в следующем параграфе. Здесь же мы обсудим пример механической неголономной системы, принадлежащий Г. К. Суслову [12], показывающий, что наличие инвариантной меры не является типичным для неголономных систем. С этой точки зрения эта задача, а также ее обобщения на произвольные группы Ли исследуются в [13]. Рассмотрим движение твердого тела с неподвижной точкой при наложенной неголономной связи $(a, \omega) = 0$, где a — постоянный вектор в *подвижной* системе координат. Это означает, что на группе SO(3) рассматривается *левоинвариантное* распределение и левоинвариантная метрика (так сказать, LL-система). Получающиеся уравнения элементарно интегрируются [12], и из ответа видно, что в общем случае имеются притягивающие многообразия ненулевой коразмерности, препятствующие существованию какой бы то ни было меры с непрерывной плотностью [3], [13]. Е. И. Харламова, В. В. Козлов и Я. В. Татаринов получили ряд интересных результатов, касающихся обобщений задачи Суслова, которые показывают, что возникающие здесь задачи хотя иногда и бывают интегрируемы, но отличаются от интегрируемых гамильтоновых систем во многих отношениях.

Как мы сейчас покажем, рассматриваемый нами класс содержит системы, удивительным образом схожие с классическими интегрируемыми гамильтоновыми системами.

2. Примеры интегрируемых механических RL-систем.

Пример 1. Задача С. А. Чаплыгина о качении шара по шероховатой плоскости [1].

Рассмотрим движение динамически несимметричного шара, центр масс которого совпадает с геометрическим центром, по горизонтальной плоскости без проскальзывания. Отсутствие проскальзывания означает наложение неголономной связи

$$\dot{r} + [\Omega, nR] = 0, \tag{10}$$

где r — радиус-вектор центра шара, Ω — вектор угловой скорости, n — нормаль к плоскости в неподвижной системе координат, R — радиус шара.

Покажем, что эта задача относится к классу RL-систем. В качестве группы $\mathfrak{G}$ рассмотрим E (3) — группу движений трехмерного пространства. Связь (10), согласно Арнольду [9], является правоинвариантной, поскольку она имеет постоянный вид в неподвижной системе координат. Кинетическая энергия, напротив, имеет постоянный вид в подвижной системе координат, т. е. левоинвариантна. Таким образом, рассматриваемая задача действительно описывается RL-системой и к ней применимы теоремы 1, 2, гарантирующие наличие инвариантной меры в соответствующих координатах. С. А. Чаплыгин в [1] нашел более удобный способ записи уравнений движения системы, введя момент количеств движения относительно точки контакта M_c:

$$\dot{M}_c = [M_c, \omega], \quad \dot{N} = [N, \omega], \tag{11}$$

где $M_c = I\omega + mR^2 [N, [\omega, N]]$, ω — угловая скорость шара, N — вектор нормали к плоскости в подвижной системе координат, I — тензор инерции шара относительно центра, m — масса шара. Система (11) имеет четыре очевидных интеграла: H, (M_c, N), N^2, M_c^2 и, как показал С. А. Чаплыгин, инвариантную меру

$$d\mu = [(mR^2)^{-1} - (N, (I + mR^2E) N)]^{-1/2} \, dM \, dN.$$

Соответствие этой меры и результатов теорем 1 и 2 можно получить непосредственными вычислениями (Ю. Н. Федоров).

С. А. Чаплыгину с помощью удачного введения эллипсоидальных координат удалось привести задачу к виду, аналогичному полученному Якоби и Ковалевской в известных работах по интегрированию геодезических на эллипсоиде и уравнений движения волчка. Тем самым он показал, что эта задача может быть проинтегрирована в θ-функциях так же, как системы Якоби и Ковалевской.

В. В. Козлов [3] показал, что задача Чаплыгина останется интегрируемой при добавлении силового поля с потенциалом $U(N) = \alpha (IN, N)$, притягивающего точки шара к плоскости пропорционально расстоянию. А. П. Маркеев [4] доказал то же для шара с присоединенным ротором. В обоих случаях инвариантная мера совпадает с мерой Чаплыгина. Отметим, что оба обобщения включаются в рассматриваемый нами класс систем.

Пример 2. Задача о движении твердого тела с неголономной связью $(a, \Omega) = 0$ [7].

Это простейший, и в то же время очень содержательный пример RL-системы. В качестве группы $\mathfrak{G}$ здесь рассматривается SO (3). Уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки при наличии неголономной связи, означающей, что проекция угловой скорости тела на неподвижную ось равна нулю, имеют вид

$$\begin{cases} \dot{M} = [M, AM] + \lambda N, \\ \dot{N} = [N, AM]. \end{cases} \tag{12}$$

Здесь M — момент количеств движения, $\omega = AM$ — угловая скорость тела, N — орт неподвижной оси в подвижной системе координат. Множитель λ находится из условия связи $\Omega_3 = (AM, N) = 0$:

$$\lambda = ([AM, M], AN)/(AN, N). \tag{13}$$

Задача имеет четыре интеграла: $H = \frac{1}{2}(AM, M)$, $N^2 = 1$, $(AM, N) = 0$, $\mathcal{J} = M^2 - (M, N)^2$.

Последний множитель можно получить прямо из теоремы 1: $\Phi(N) = \sqrt{(AN, N)}$. В [8] интегрирование этой системы доведено до явных формул в θ-функциях с помощью введения подходящих координат по аналогии с задачей С. А. Чаплыгина [1]. Те же формулы могут быть получены из следующей довольно неожиданной связи этой задачи с классической задачей Неймана [14] о движении точки по сфере в поле сил с квадратичным потенциалом.

Рассмотрим замену времени $t \to \tau$:

$$d\tau = \mu^{-1}dt, \quad \mu^{-1} = \sqrt{\det A \cdot H}\Phi^{-1}(N).$$

ТЕОРЕМА 4. *В новом времени τ вектор N в системе* (12), (13) *уравнений движения твердого тела с неголономной связью* $(\Omega, a) = 0$ *описывает траекторию точки на единичной сфере под действием силы с квадратичным потенциалом* $U(N) = \frac{1}{2}(IN, N) = \frac{1}{2}(A^{-1}N, N)$.

Доказательство. Уравнения движения точки в задаче Неймана

$$\ddot{q}_i = -I_i q_i + \lambda q_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

можно записать в виде

$$\dot{P} = [q, Iq], \quad \dot{q} = [q, P],$$

где $P = [q, \dot{q}]$. Рассмотрим указанную замену времени и соответствие $q \leftrightarrow N$, $P \leftrightarrow \mu AM$. Легко видеть, что уравнения для q и для N при таком соответствии переходят друг в друга, и остается только проверить, что то же самое верно для оставшихся уравнений. Действительно,

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{dP}{dt}\mu = \frac{d}{dt}(\mu AM)\mu =$$
$$= \mu\dot{\mu}AM + \mu^2 A\dot{M} = \mu^2 A([M, AM] + \lambda N) + \frac{1}{2}(\mu^2)^{\cdot} AM =$$
$$= \frac{1}{\det A}\frac{(AN, N)}{(AM, M)} A[M, AM] + \frac{\lambda}{\det A}\frac{(AN, N)}{(AM, M)} AN +$$
$$+ \frac{(AN, [N, AM])}{(AM, M)\det A} AM = [N, A^{-1}N].$$

Последнее равенство проверяется непосредственно довольно длинными выкладками с использованием уравнения связи $(AM, N) = 0$.

Следствие. *После замены времени система* (12), (13) *линеаризуется на якобианах гиперэллиптических кривых.*

Теорема 4 позволяет получить явные формулы для вектора $N(\tau)$ в θ-функциях рода 2. Покажем, что аналогичные формулы можно получить и для полного репера.

Рассмотрим вектор $S = M - (M, N)\, N$:

$$\begin{aligned}\dot{S} = \dot{M} - (M, N)^{\cdot} N - (M, N)\, \dot{N} &= \\ = [M, AM] + \lambda N - \lambda N - (M, N)\,[N, AM] &= \\ = [M - (M, N)\, N, AM] &= [S, AM].\end{aligned}$$

Итак, вектор S так же, как и N, неподвижен в пространстве. Это можно получить также и из теоремы 3. Из S и N легко образовать неподвижный репер. Записывая координаты векторов репера по строкам, получаем формулы для динамики системы на SO(3) в θ-функциях, т. е. полное описание движения тела.

Рассматриваемая система обладает интегрируемым обобщением, аналогичным найденному в [3] обобщению задачи Чаплыгина. Пусть на тело с неголономной связью $(a, \Omega) = 0$ действует ньютоновское поле притяжения удаленного источника так, что вектор a направлен в его сторону. В первом приближении потенциал сил имеет вид $U(N) = \frac{1}{2}\varepsilon(IN, N)$ [15]. Эта же ситуация может быть проинтерпретирована с механической точки зрения как случай притягивающей плоскости (см. [3]), нормаль к которой совпадает с a.

Уравнения движения системы (4), (5) имеют помимо трех очевидных интегралов четвертый $\mathcal{J} = M^2 - (M, N)^2 - \varepsilon \det I\, (AN, N)$ и в силу теорем 1 и Якоби интегрируются в квадратурах. Для полученной системы имеется аналог теоремы 4, связывающий ее с интегрируемым обобщением задачи Неймана, получаемым добавлением потенциала четвертой степени $U(N) = \beta((IN, N)^2 - \det I\,(AN, N))$, и применимо следствие (см. [8]). Нетрудно убедиться, что присоединение симметричного ротора по аналогии с [4] не меняет интегрируемости системы (см. [8]).

Еще один интегрируемый случай — тяжелый симметричный волчок Лагранжа с той же неголономной связью, движение которого описывается уравнениями

$$\begin{cases}\dot{M} = [M, AM] + mg\,[N, e] + \lambda N, \\ \dot{N} = [N, AM], \quad \lambda = (AN, [AM, M])/(AN, N),\end{cases} \tag{14}$$

$A = \operatorname{diag}(A_1, A_2, A_3)$, $A_1 = A_2 \neq A_3$, $e = (0, 0, z_0)$ — центр тяжести в подвижной системе координат.

Система (14) обладает интегралами

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}_1 &= (N, AM) = 0,\\
\mathcal{J}_2 &= \frac{1}{2}(M, AM) + mg(e, N) = h,\\
\mathcal{J}_3 &= (N, N) = 1,\\
\mathcal{J}_4 &= A_1 M_3^2 + (A_3 - A_1) M_3^2 N_3^2 = k
\end{aligned} \qquad (15)
$$

и последним множителем $\Phi(N) = \sqrt{(AN, N)}$.

Покажем, что она интегрируется в эллиптических функциях. Воспользуемся тождеством $(M_1N_2 - M_2N_1)^2 = (M_1^2 + M_2^2)(N_1^2 + N_2^2) - (M_1N_1 + M_2N_2)^2$. Подставляя его в уравнение для N_3:

$$\dot N_3 = A_1(M_2N_1 - M_1N_2),$$

и пользуясь интегралами (15), приводим это уравнение к виду

$$\dot N_3^2 = A_1(2h - 2\varkappa N_3)(1 - N_3^2) - A_3 k = R(N_3),$$

где $\varkappa = mgz_0$. Отсюда $N_3 = \mathcal{P}(v(t - t_0)) - c$, где $v = \sqrt{\frac{1}{2}A_1\varkappa}$, $c = \frac{1}{3}h\varkappa^{-1}$, а $\mathcal{P}(z)$ — классическая функция Вейерштрасса на эллиптической кривой $y^2 = R(x)$. Дальнейшее интегрирование проводится аналогично обычному волчку Лагранжа.

П р и м е р 3. Задача о качении динамически несимметричного шара по прямой.

Эта задача, насколько известно авторам, ранее не рассматривалась. Предположим, что в задаче Чаплыгина имеется дополнительная связь, вынуждающая шар катиться по прямой (например, поставлены вертикальные абсолютно гладкие стенки, см. рис. на с. 616). Это RL-система на группе $\mathfrak{G} = E(3)$ со связями (ср. пример 1):

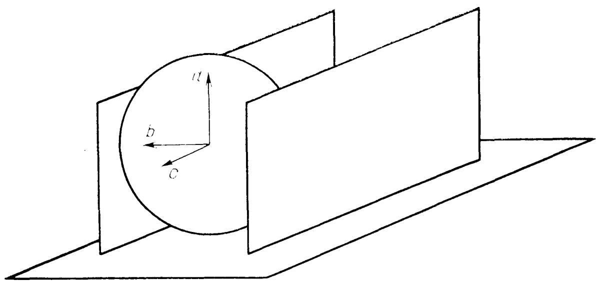
$$
\begin{aligned}
\dot r + [\Omega, a] &= 0,\\
(\dot r, b) &= 0,
\end{aligned}
$$

векторы a и b см. на рисунке.

Уравнения движения системы можно записать в виде

$$
\begin{cases}
\dot M = [M, AM] + \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2,\\
\dot p = \lambda_2,\\
\dot N_1 = [N_1, AM],\\
\dot N_2 = [N_2, AM],
\end{cases} \qquad (16)
$$

где λ_1 и λ_2 находятся из условий связи $(AM, N_1) = 0$, $(AM, N_2) + \frac{1}{m} p = 0$, M — момент количеств движения шара, N_1 и N_2 соответствуют $c = [a, b]$ и b в подвижной системе координат, $p = mv$ — величина импульса. Помимо условий связи, геометрических интегралов $N_1^2 = N_2^2 = 1$, $(N_1, N_2) = 0$ и интеграла энергии $H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} (AM, M)$



имеются еще два интеграла $\mathcal{J}_1 = (M, [N_1, N_2])$ и $\mathcal{J}_2 = M^2 + p^2 - 2p(M, N_2) - (M, N_1)^2$. Интегрирующий множитель имеет вид (6)

$$\Phi = \sqrt{(AN_1, N_1)(AN_2, N_2) - (AN_1, N_2)^2 + \frac{1}{m}(AN_1, N_1)}.$$

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 5. *Задача о качении динамически несимметричного уравновешенного шара по прямой интегрируется в квадратурах.*

Можно показать, что интегрируемость сохранится и после присоединения к шару симметричного ротора.

Обсудим динамические свойства приведенных выше примеров механических систем. Все они обладают инвариантной мерой и набором интегралов, причем размерность интегральных уровней равна двум. Как впервые отметил В. В. Козлов [3], в такой ситуации применима теорема Колмогорова [16]. В самом деле, если уровень компактный и неособый, а векторное поле на нем не обращается в нуль, то связная компонента уровня с необходимостью есть тор T^2. На этом торе возникает динамическая система с инвариантной мерой, индуцированной мерой в объемлющем пространстве. Согласно теореме Колмогорова [16], на таком торе можно ввести координаты φ_1, φ_2 (mod 2π), в которых система принимает вид

$$\dot{\varphi}_1 = c_1 \,/\, \Phi, \quad \dot{\varphi}_2 = c_2 \,/\, \Phi,$$

Φ — гладкая положительная функция на торе, c_1 и c_2 — константы. Это означает, что движение происходит по прямолинейным обмоткам тора, но, вообще говоря, неравномерно.

Таким образом, мы можем дать следующее динамическое определение интегрируемости для неголономных систем [5], [6].

Определение. Назовем негамильтонову систему *интегрируемой*, если для нее выполняется картина Лиувилля, т. е. движение происходит по прямолинейным обмоткам торов, но, возможно, неравномерно.

Отметим, что интегрируемая в том смысле система обязательно имеет инвариантную меру. В самом деле, для таких систем в угловых переменных уравнения имеют вид $\dot{\varphi}_k = c_k \mid \Phi$ и, следовательно, сохраняют меру $\Phi\, d\varphi_1 \ldots \ldots d\varphi_n$. Все приведенные примеры систем являются интегрируемыми в смысле данного определения.

Заключительные замечания. Обсудим некоторые вопросы, оставшиеся неясными. Прежде всего, есть ли примеры интегрируемых RL-систем с торами размерности, большей двух? Если да, то каков механизм их интегрируемости? Отметим, что теорема Колмогорова не обобщается на этот случай. Мы предполагаем, что такие системы, тем не менее, существуют, и в качестве реального кандидата можем указать многомерное обобщение задачи о движении твердого тела со связью $\omega_{ij} = 0$ при $i, j = 1, \ldots \ldots, n-1$, где $\omega = (\omega_{ij})$ — «угловая скорость» — кососимметрическая матрица из алгебры Ли группы SO (n). В качестве возможного доказательства интегрируемости можно предложить сведение задачи с помощью подходящей замены времени к интегрируемой гамильтоновой системе так, как это было сделано в теореме 4. В данном случае такой системой, по-видимому, является n-мерная задача Неймана. Заметим, что, как показал М. А. Елисеев, задача Чаплыгина подходящей заменой времени и координат сводится к интегрируемому случаю Клебша движения тела в жидкости. Естественная гипотеза состоит в том, что это же верно для многомерных обобщений этих систем. Теорема 1 играет здесь решающую роль, подсказывая, какую замену времени нужно сделать. Отметим, что такая замена, вообще говоря, неоднозначна из-за наличия замен времени в гамильтоновых системах, сохраняющих гамильтоновость (см. [17]). Предлагаемый механизм интегрируемости идейно близок теории приводящего множителя Чаплыгина [18], пожалуй, единственного ныне известного метода интегрируемости неголономных систем.

В заключение мы выражаем искреннюю признательность А. М. Вершику и в особенности В. В. Козлову за многочисленные полезные обсуждения рассмотренных здесь задач.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 05.05.88

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Чаплыгин С. А. О катании шара по горизонтальной плоскости // Мат. сборник. 1903. Т. 24, № 1. С. 139—168.
[2] Харламова Е. И. Качение шара по наклонной плоскости // Прикладная математика и механика. 1958. Т. 22, вып. 4. С. 504—509.
[3] Козлов В. В. К теории интегрирования уравнений неголономной механики // Успехи механики. 1985. Т. 8, вып. 3. С. 85—107.
[4] Маркеев А. П. Об интегрируемости задачи о качении шара с многосвязной полостью, заполненной жидкостью // Механика твердого тела. 1985, № 3. С. 3—15.
[5] Веселов А. П. Геодезические потоки на группах Ли с неголономной связью.— УМН. 1985. Т. 40, вып. 5.
[6] Веселов А. П., Веселова Л. Е. Потоки на группах Ли с неголономной связью и интегрируемые негамильтоновы системы // Функцион. анализ и его прил. 1986. Т. 20, вып. 4. С. 65—66.
[7] Веселова Л. Е. Новые случаи интегрируемости уравнений движения твердого тела при наличии неголономной связи // Геометрия, дифференциальные уравнения и механика. М.: МГУ, 1986. С. 64—68.
[8] Веселова Л. Е. Об интегрируемости и аналитических свойствах решений в некоторых задачах динамики твердого тела. Автореф. канд. дисс. М.: МГУ, 1986.
[9] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.
[10] Фукс Д. Б. Когомологии бесконечномерных алгебр Ли. М.: Наука, 1974.
[11] Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: Гостехиздат, 1953.
[12] Суслов Г. К. Теоретическая механика. М.: Гостехиздат, 1946.

[13] К о з л о в В. В. Об инвариантных мерах уравнений Эйлера — Пуанкаре на алгебрах Ли // Функцион. анализ и его прил. 1988. Т. 22, вып. 1. С. 69—71.
[14] N e u m a n n C. De probleme quodam mechanico, quod ad priman integralium ultra-elliptocorum classem revocatum // J. reine und angew. Math. 1859. Вып. 56. S. 46—63.
[15] Б е л е ц к и й В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: МГУ, 1975.
[16] К о л м о г о р о в А. Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // ДАН СССР. 1953. Т. 93, № 5. С. 763—766.
[17] В е с е л о в А. П. Замена времени в интегрируемых системах // Вестн. МГУ. 1987. Сер. мат. С. 25—29.
[18] Ч а п л ы г и н С. А. Исследования по динамике неголономных систем. М.— Л.: Гостехиздат, 1949.