О новых представлениях значений бета-функции Дирихле в четных точках

Т. А. Сафонова

Ключевые слова: бета-функция Дирихле, постоянная Каталана.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm14264

1. Следуя [1; гл. 23], символом $\beta(s)$ обозначим сумму ряда

$$\beta(s)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^s}, \qquad \operatorname{Re}s>0.$$

Функцию $\beta(s)$ называют бета-функцией Дирихле (см., например, [2; гл. 1, п. 1.7]), и хорошо известно, что

$$\beta(2n+1)=\frac{(-1)^n(\pi/2)^{2n+1}}{2(2n)!}E_{2n}, \qquad n=0,1,\dots,$$

где E_n – числа Эйлера (см., например, [1; гл. 23, формула 23.2.22]. Из этой формулы следует, что числа $\beta(2n+1)$ являются трансцендентными. Однако различные известные представления для чисел $\beta(2n)$ или их определенных комбинаций, например, интегральное представление

$$\beta(2n)=\frac{(-1)^n\pi^{2n}}{4(2n-1)!}\int_0^1\frac{E_{2n-1}(x)}{\sin(\pi x)}\,dx, \qquad n=1,2,\dots, \tag{1}$$

где $E_n(x)$ – многочлены Эйлера (см., например, [1; гл. 23, формула 23.1.1]), не позволяют судить об их арифметической природе, и об этом мало что известно. В частности, по этой причине отыскание представлений этих чисел или их комбинаций в виде интегралов, рядов и др. представляет особый интерес, а литература, посвященная этой тематике, весьма обширна (см., например, [2] и [3]).

В п. 2 настоящей работы приведены предварительные сведения, используемые в установлении справедливости результатов пп. 3 и 4, в которых сформулированы утверждения о новых представлениях некоторых определенных линейных комбинаций чисел $\beta(2n)$ в виде рядов, содержащих логарифмы (теорема 3), и пределов некоторых числовых последовательностей, содержащих тригонометрические функции (теорема 4).

На протяжении всей работы особое внимание уделяется вопросам применения полученных результатов к различным представлениям чисел $\beta(2)$ ($=: G$ – постоянная Каталана; см., например, [2; гл. 1, п. 1.7]) и $\beta(4)$.

2. Следуя работам [4]–[6], рассмотрим дифференциальный оператор, порожденный выражением

$$l_2[y]=-y''-a^2y, \qquad -1<a<1,$$

и граничными условиями Дирихле $y(0)=y(\pi)=0$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2[0,\pi]$ – пространстве всех классов попарно п.в. равных между собой комплекснозначных измеримых функций y, таких, что $|y|^2$ интегрируема по Лебегу на $[0,\pi]$. Используя метод спектральной теории для него, в упомянутых выше работах получены интегральные представления производящих функций для значений дзета-функции Римана и родственных с ней функций в натуральных точках, в том числе установлена справедливость следующей теоремы для производящих функций чисел $\beta(2n)$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00128, https://rscf.ru/project/24-21-00128/.

Теорема 1. *При $-1 < a < 1$ справедливо равенство*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2 - a^2} = \frac{1}{2a\cos(a\pi/2)} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(ax)}{\sin x}\, dx. \tag{2}$$

Из этой теоремы можно извлечь, что для последовательности

$$\mathcal{A}_m := \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{m-n}}{(2(m-n))!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2(m-n)} \beta(2n), \qquad m = 1, 2, \dots,$$

справедливо равенство

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \mathcal{A}_m a^{2(m-1)} = \frac{1}{2a} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(ax)}{\sin x}\, dx. \tag{3}$$

Разложив правую часть этого равенства в степенной ряд по степеням a и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях в полученном равенстве, после некоторых элементарных преобразований приходим к справедливости равенства

$$\mathcal{A}_m = \frac{(-1)^{m-1}}{2(2m-1)!} \int_0^{\pi/2} \frac{x^{2m-1}}{\sin x}\, dx, \qquad m = 1, 2, \dots, \tag{4}$$

из которого, в частности, при $m = 1$ и $m = 2$ следует справедливость следующих равенств для постоянной Каталана G (см., например, [7; п. 2.5.4, формула 5]) и числа $\beta(4)$

$$G = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin x}\, dx, \qquad \beta(4) = \frac{\pi^2}{8} G - \frac{1}{12} \int_0^{\pi/2} \frac{x^3}{\sin x}\, dx.$$

Легко показать, что формула для G совпадает с равенством (1) при $n = 1$.

Пусть теперь число a является правильной положительной рациональной дробью, т.е. $a = p/q$, где $p, q \in \mathcal{N}$ и $0 < p < q$. Тогда интеграл, стоящий в правых частях равенств (2) и (3), явно вычисляется и

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(ax)}{\sin x}\, dx = 2\cos\frac{p\pi}{2q} \sum_{k=1}^{q} (-1)^k \sin(2k-1)\frac{p\pi}{2q} \ln\sin(2k-1)\frac{\pi}{4q}. \tag{5}$$

Учитывая это равенство в (2), приходим к справедливости следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть $a = \frac{p}{q}$, где $p, q \in \mathcal{N}$ и $0 < p < q$. Тогда справедливо равенство*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2 - a^2} = \frac{q}{p} \sum_{k=1}^{q} (-1)^k \sin(2k-1)\frac{p\pi}{2q} \ln\sin(2k-1)\frac{\pi}{4q}. \tag{6}$$

Отметим также, что интеграл, стоящий в правых частях равенств (2) и (3), можно вычислить в терминах гипергеометрических функций (см. [6; равенство (2.14)]), а интеграл из правой части (4) можно записать в виде суммы достаточно быстро сходящегося ряда, общий член которого содержит значения дзета-функции Римана $\zeta(2n)$ (см. [4; равенство (17)]).

В заключении этого пункта отметим, что формула (2) приведена в [4; равенство (3)] и [5; равенство (3)], равенство (4) приведено в [4; равенство (8)], равенство (5) в [6; лемма 1], а равенство (6) – в [5; теорема 3] и [6; теорема 3].

3. Из разложения

$$\frac{\pi}{2\sin(\pi x/2)} = \frac{1}{x} + 2x\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k)^2-x^2}$$

(см., например, [8; формула 4.22.5]), следует справедливость соотношения

$$\int_0^{\pi/2}\frac{x^j}{\sin x}\,dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^j\left(\frac{1}{j} - 2\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\int_0^1\frac{u^{j+1}}{(2k)^2-u^2}\,du\right), \qquad j=1,2,\dots. \tag{7}$$

Вычислив интеграл, стоящий в правой части этого равенства при $j=2m-1$, находим, что справедлива формула

$$\int_0^1\frac{u^{2m}}{(2k)^2-u^2}\,du = -\frac{1}{2}\left((2k)^{2m-1}\ln\frac{2k-1}{2k+1} + 2\sum_{l=0}^{m-1}\frac{(2k)^{2l}}{2m-2l-1}\right), \qquad m=1,2,\dots. \tag{8}$$

Учитывая далее равенства (7) и (8) в представлении (4), приходим к справедливости следующего утверждения.

Теорема 3. *При $m=1,2,\dots$ справедливо равенство*

$$\mathcal{A}_m = \frac{(-1)^{m-1}\pi^{2m-1}}{4^m(2m-1)!}\left(\frac{1}{2m-1} + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\left((2k)^{2m-1}\ln\frac{2k-1}{2k+1} + 2\sum_{l=0}^{m-1}\frac{(2k)^{2l}}{2m-2l-1}\right)\right).$$

В частности, полагая $m=1$ и $m=2$ в этом равенстве, для постоянной Каталана G и числа $\beta(4)$ получим справедливость соотношений

$$G = \frac{\pi}{4}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\left(1 + k\ln\frac{2k-1}{2k+1}\right)\right), \tag{9}$$

$$\beta(4) = \frac{\pi^2}{8}G - \frac{\pi^3}{288}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\left(1 + 12k^2 + 12k^3\ln\frac{2k-1}{2k+1}\right)\right).$$

Частичные суммы S_n ряда, стоящего в правой части равенства (9), при $n=2m$ и $n=2m+1$ запишутся в виде

$$S_{2m} = \sum_{k=1}^{2m}(-1)^k k\ln\frac{2k-1}{2k+1}, \qquad S_{2m+1} = S_{2m} - 1 - (2m+1)\ln\frac{4m+1}{4m+3}.$$

Таким образом, равенство (9) можно переписать в виде

$$G = \frac{\pi}{4}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k k\ln\frac{2k-1}{2k+1}\right),$$

из которого следует, что

$$\exp\left(\frac{2G}{\pi} - \frac{1}{2}\right) = \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{2}{2k+1}\right)^{(-1)^k k}.$$

Из равенства (9) и известного тождества

$$\ln 2 = 1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty}\left(1 + k\ln\frac{2k-1}{2k+1}\right)$$

(см., например, [7; п. 5.5.1, формула 21]), также можно извлечь, что для величины $e^{G/\pi}$ справедливы равенства

$$e^{G/\pi}=\frac{3\sqrt[4]{2}}{e}\prod_{k=1}^{+\infty}\biggl(e^{-1}\Bigl(1+\frac{2}{4k+1}\Bigr)^{2k+1}\biggr)=\frac{\sqrt{e}}{\sqrt[4]{2}}\prod_{k=1}^{+\infty}\biggl(e\Bigl(1-\frac{2}{4k+1}\Bigr)^{2k}\biggr),$$

возведение в квадрат и перемножение которых приводит к соотношению

$$e\cdot e^{4G/\pi}=9\prod_{k=1}^{+\infty}\Bigl(1+\frac{4}{4k-1}\Bigr)\Bigl(1-\frac{4}{(4k+1)^2}\Bigr)^{4k+1}.$$

Эта формула напоминает тождество

$$\pi\cdot e^{4G/\pi}=8\prod_{k=1}^{+\infty}\Bigl(1-\frac{1}{(2k+1)^2}\Bigr)^{(-1)^k(2k+1)},$$

приписываемое С. Рамануджану. Несколько видоизменив рассуждения, приводящие к доказательству теоремы 3, можно получить ее аналог, из которого при $m=1$ будет следовать это тождество. Однако, это, по-видимому, тема отдельной работы.

Известно, что постоянная $e^{2G/\pi}$ является решением одной классической физической задачи – задачи о димерах – найденным в 1961 г. одновременно в работах [9] и [10], и до сих пор в физической литературе встречаются работы, посвященные приближенным вычислениям этой постоянной (см., например, [11]). Приведенные выше формулы могут оказаться полезными в этом отношении.

Отметим также, что в работе [12] приведены формулы разложения некоторых математических констант, включая число $e^{G/\pi}$, в бесконечные произведения. Однако они получены из других соображений и отличаются от приведенных выше формул.

4. Пусть число a является правильной положительной рациональной дробью, т.е. $a=p/q$, где $p,q\in\mathcal{N}$ и $0<p<q$. Тогда из равенства (5) можно извлечь, что при $m=1,2,\dots$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{(\sin(ax))^{2m-1}}{\sin x}\,dx=\sum_{k=1}^{q-1}(-1)^k\sin^{2m-1}\frac{kp\pi}{q}\ln\frac{\sin((2k-1)\pi/(4q))}{\sin((2k+1)\pi/(4q))}.$$

Положив в этом равенстве $a=a_n=p_n/q_n$, $n=1,2,\dots,$ – последовательность положительных рациональных чисел, такую, что $a_n\to 0$ при $n\to+\infty$, и записав равенство (4) в виде

$$\mathcal{A}_m=\frac{(-1)^{m-1}}{2(2m-1)!}\lim_{a_n\to 0}\frac{1}{a_n^{2m-1}}\int_0^{\pi/2}\frac{(\sin(a_nx))^{2m-1}}{\sin x}\,dx,$$

очевидно, получим представление $\mathcal{A}_m$ в виде предела некоторой числовой последовательности. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть $a_n=p_n/q_n$, $n=1,2,\dots,$ – последовательность положительных рациональных чисел, такая, что $a_n\to 0$ при $n\to+\infty$. Тогда при $m=1,2,\dots$ справедливо равенство*

$$\mathcal{A}_m=\frac{(-1)^{m-1}}{2(2m-1)!}\lim_{n\to+\infty}\Bigl(\frac{q_n}{p_n}\Bigr)^{2m-1}\sum_{k=1}^{q_n-1}(-1)^k\sin^{2m-1}\frac{kp_n\pi}{q_n}\ln\frac{\sin((2k-1)\pi/(4q_n))}{\sin((2k+1)\pi/(4q_n))}.$$

В частности, полагая $a_n=1/(2n)$, получим, что при $m=1,2,\dots$ справедливо равенство

$$\mathcal{A}_m=\frac{(-1)^{m-1}}{2(2m-1)!}\lim_{n\to+\infty}(2n)^{2m-1}\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^k\sin^{2m-1}\frac{k\pi}{2n}\ln\frac{\sin((2k-1)\pi/(8n))}{\sin((2k+1)\pi/(8n))},$$

из которого для постоянной Каталана G (при $m = 1$) и числа $\beta(4)$ (при $m = 2$) следует справедливость соотношений

$$G = \lim_{n\to+\infty} n \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k \sin\frac{k\pi}{2n} \ln\frac{\sin((2k-1)\pi/(8n))}{\sin((2k+1)\pi/(8n))},$$

$$\beta(4) = \frac{\pi^2}{8} G - \frac{2}{3} \lim_{n\to+\infty} n^3 \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k \sin^3\frac{k\pi}{2n} \ln\frac{\sin((2k-1)\pi/(8n))}{\sin((2k+1)\pi/(8n))}.$$

Легко проверяется, что приведенное здесь равенство для G можно преобразовать к виду

$$G = 2 \lim_{n\to+\infty} n \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \sin(2k-1)\frac{\pi}{4n} \ln\sin(2k-1)\frac{\pi}{8n}.$$

Справедливость этой формулы следует из формулы (6), если в ней положить $a = a_n = 1/(2n)$ и перейти к пределу при $n \to \infty$ (см. также [6; следствие 4]).

Различные представления $\zeta(2n+1)$ и родственных с ними чисел в виде пределов некоторых последовательностей, например, соотношение

$$\zeta(2n+1) = \lim_{q\to+\infty} \left(\frac{\pi}{2q}\right)^{2n+1} \sum_{p=1}^{q} \operatorname{ctg}^{2n+1}\left(\frac{p\pi}{2q+1}\right), \tag{10}$$

где $q \in \mathcal{N}$, хорошо известны (см. [13]). Представление последовательностей $\mathcal{A}_m$ из теоремы 4 напоминает равенство (10). Кроме того, если в формуле (4) заменить интеграл на предел соответствующих интегральных сумм, также получим их представления в виде пределов некоторых числовых последовательностей. Однако представление этих последовательностей, сформулированное в теореме 4, принципиально отличается от описанных выше.

Автор выражает искреннюю благодарность проф. К. А. Мирзоеву за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publ., New York, 1972. **[2]** S. R. Finch, *Mathematical Constants*, Encyclopedia Math. Appl., **94**, Cambridge Univ. Press, New York, 2003. **[3]** D. M. Bradley, *Representations of Catalan's Constant*, 2001. **[4]** К. А. Мирзоев, Т. А. Сафонова, *Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр.*, **494** (2020), 48–52. **[5]** К. А. Мирзоев, Т. А. Сафонова, *Матем. заметки*, **108**:4 (2020), 632–637. **[6]** К. А. Мирзоев, Т. А. Сафонова, *Алгебра и анализ*, **35**:2 (2023), 86–106. **[7]** А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды*, т. 1: *Элементарные функции*, Физматлит, М., 2002. **[8]** *NIST Handbook of Mathematcal Functuios*, Cambridge, New York, 2010. **[9]** P. W. Kasteleyn, *Physica*, **27** (1961), 1209–1225. **[10]** H. N. V. Temperlye, M. E. Fisher, *Philos. Mag.* (8), **6** (1961), 1061–1063. **[11]** А. М. Караваев, С. Н. Перепечко, *Информационные процессы*, **13**:4 (2013), 374–400. **[12]** J. Guillera, J. Sondow, *Ramanujan J.*, **16**:3 (2008), 247–270. **[13]** T. M. Apostol, *Amer. Math. Monthly*, **80** (1973), 425–431.

Т. А. Сафонова
Северный (Арктический) федеральный
университет им. М. В. Ломоносова, г. Архангельск
E-mail: `t.Safonova@narfu.ru`

Поступило
19.02.2024
Принято к публикации
25.02.2024