



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Е. Маренич, Границы значений функции
Мёбиуса,
Матем. заметки, 1988, том 44, вы-
пуск 4, 469–487

<https://www.mathnet.ru/mzm4236>

Использование Общероссийского математического портала
Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны
с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.86

22 апреля 2025 г., 08:48:57



ГРАНИЦЫ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ МЁБИУСА

Е. Е. Маренич

Введение. 1) Для комбинаторики представляет большой интерес изучение значений μ -функций Мёбиуса для частично упорядоченных множеств. В этом направлении результаты получены, в основном, в тех случаях, когда частично упорядоченное множество является решеткой. Известно, [1, с. 203], как выглядят функции Мёбиуса для классических классов локально-конечных решеток. В работе Рота [2], и в работах его последователей получено много результатов о функциях Мёбиуса локально-конечных частично упорядоченных множеств. Вопрос о границах для значений функций Мёбиуса даже решеток, по-видимому, мало исследован. Такие результаты известны [3] для решеток, содержащих сечения мощности k .

В § 1 доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Для любого частично упорядоченного множества с 0 и 1 мощности $n + 2$, $n \in \mathbb{N}$, справедливы неравенства:

$$-\beta(n) \leq \mu(0, 1) \leq \alpha(n),$$

где $\alpha(n)$, $\beta(n)$ определены следующим образом: $\alpha(n) = \max (n_1 - 1) \cdot (n_2 - 1) \cdot \dots \cdot (n_k - 1)$, \max берется по всем натуральным k , n_1, n_2, \dots, n_k таким, что $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, k — нечетно; $\beta(n) = \max (n_1 - 1) (n_2 - 1) \cdot \dots \cdot (n_k - 1)$, \max берется по всем натуральным k , n_1, n_2, \dots, n_k таким, что $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, k — четно.

Границы для значений функции μ , указанные в теореме 1, являются точными. В работе найдены частично упо-

рядоченные множества, на которых достигаются граничные значения. Для вычисления $\alpha(n)$, $\beta(n)$ установлены простые формулы.

2) В [4], [5] показано, что при изучении бинарных отношений R на множестве U большую роль играют множества АИК (U, R) . Для этих множеств в [4], [5] предметом Мёбиус-теории определена задача эффективного вычисления Мёбиус-функций несингулярных бинарных отношений R .

В § 2 рассматриваются рефлексивные бинарные отношения R на множестве U , которые можно продолжить до некоторого порядка на U и для которых (U, R) локально-конечно. Рассматривается множество АИ1 (U, R) . Для левой Мёбиус-функции μ , соответствующей этому множеству, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Для любого интервала $[a, b]$, $a, b \in U$, мощности $n + 2$, $n \geq 3$, справедливы неравенства:*

$$-\varphi_{n-1} + 1 \leq \mu(a, b) \leq \varphi_{n-1} + 1,$$

где $(\varphi_n)_1^\infty$ — последовательность Фибоначчи, т. е. $\varphi_1 = \varphi_2 = 1$, для $n \geq 3$, $\varphi_n = \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2}$.

Границы для значений функции μ , указанные в теореме 2, являются точными. Из приведенных доказательств видно, как нужно задать отношение R для того, чтобы достигались граничные значения.

§ 1. Границы значений функции Мёбиуса для частично упорядоченных множеств. **Обозначения и терминология.** U — локально-конечное частично упорядоченное множество (ч.у.м.), с порядком \leq ; P — поле характеристики 0 (или область целостности, содержащая рациональные дроби); $\mathcal{Y}(U, P)$ — алгебра инцидентности; ζ — дзета-функция; μ — функция Мёбиуса; $a \cdot \geq b$ — обозначает, что a покрывает b ; если $U_1 \subseteq U$, то порядок, индуцируемый на U_1 порядком \leq , называется *индуцированным порядком*; если A — конечное множество, то $|A|$ — мощность множества A ; если $B = (b_{ij})$ — квадратная матрица порядка n , то $\text{adj } B$ — присоединенная матрица, т. е. $\text{adj } B = (B_{ij})^t$, где B_{ij} — алгебраическое дополнение элемента b_{ij} матрицы B , $|B|$ — определитель матрицы B ; $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ — множество натуральных чисел; для $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}_k = \{k, k + 1, k + 2, \dots\}$; n — натуральное число. Другие комбинаторные термины, использованные в работе, соответствуют терминологии [1].

1. Полные продолжения частичного порядка. Пусть \leq, \leq_1 — частичные порядки на U . Будем говорить, что порядок \leq_1 продолжает порядок \leq , если для всех $a, b \in U$, из того, что $a \leq b$ следует $a \leq_1 b$. Хорошо известна теорема Шпильрайна, [1, с. 29; 6], о том, что любой частичный порядок $<$ не может быть продолжен до отношения полного порядка $<$.

ЛЕММА 1.1. Пусть U_1 — конечное ч. у. м. с порядком \leq . Существует строгий линейный порядок $<$, продолжающий порядок $<$ и обладающий свойством: для всех $x, y \in U_1$, если

$$|\{z \mid z \in U_1, z \leq x\}| < |\{z \mid z \in U_1, z \leq y\}|, \quad (1.1)$$

то $x < y$.

Доказательство. Рассмотрим для всех $x \in U_1$ множества: $A_x = \{z \mid z \in U_1, z \leq x\}$, $M = \{|A_x|, x \in U_1\}$. Для каждого $t \in M$, на множестве всех $x \in U_1$ таких, что $|A_x| = t$ зададим произвольный строгий линейный порядок $<$. Если $|A_x| \neq |A_y|$, то положим $x < y$ при $|A_x| < |A_y|$.

Отношение $<$ задано на U_1 . Отношение $<$ антирефлексивно. Проверим, что оно транзитивно. Пусть $x < y$, $y < z$, возможны следующие случаи: $|A_x| = |A_y|$, $|A_y| = |A_z|$; $|A_x| = |A_y|$, $|A_y| < |A_z|$; $|A_x| < |A_y|$, $|A_y| = |A_z|$; $|A_x| < |A_y|$, $|A_y| < |A_z|$. В каждом из вышеперечисленных случаев легко проверяется, что $x < z$.

Порядок $<$ продолжает порядок $<$ и для него выполнено условие (1.1). Лемма доказана.

Следствие 1.1. Для произвольного интервала $U_1 = [a, b]$, $a, b \in U$ мощности $n + 2$ элементы U_1 можно обозначить целыми числами $a = 0, 1, \dots, n, n + 1 = b$, так что:

1) для всех $i, j \in \{0, 1, \dots, n + 1\}$, если $i \leq j$, то $i \leq_1 j$;

2) если $i, j \in \{1, \dots, n + 1\}$, i — атом, j — не атом, то $i < j$;

3) если $c, d \in U_1$ и c покрывает только один элемент d , то порядок $<$, описанный в лемме 1.1, можно выбрать так, что при некотором $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $d = i$, $c = i + 1$.

2. Функции $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$. Функция α_1 определена равенством: $\alpha_1(n) = \max(n_1 - 1)(n_2 - 1) \dots (n_k - 1)$, где \max берется по всем натуральным k, n_1, n_2, \dots, n_k

таким, что $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, k и n имеют одинаковую четность.

Функция α_1 определена на \mathbb{N} , $\alpha_1(1) = 0$, $\alpha_1(2) = 0$, $\alpha_1(3) = 2$, $\alpha_1(4) = 1$, $\alpha_1(5) = 4$, $\alpha_1(6) = 4$, $\alpha_1(7) = 6$, $\alpha_1(8) = 9$, $\alpha_1(9) = 8$, $\alpha_1(10) = 16$ и т. д.

Функция β_1 определена равенством: $\beta_1(n) = \max(n_1 - 1)(n_2 - 1) \dots (n_k - 1)$, где \max берется по всем натуральным k, n_1, n_2, \dots, n_k таким, что $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, k и n имеют разную четность.

Функция β_1 определена на \mathbb{N}_2 , $\beta_1(2) = 1$, $\beta_1(3) = 0$, $\beta_1(4) = 3$, $\beta_1(5) = 2$, $\beta_1(6) = 5$, $\beta_1(7) = 6$, $\beta_1(8) = 7$, $\beta_1(9) = 12$, $\beta_1(10) = 12$ и т. д.

ЛЕММА 1.2. *Справедливы неравенства:*

- 1) для $n \geq 3$, $\beta_1(n-1) < \alpha_1(n)$;
- 2) для $n \geq 2$, $\alpha_1(n-1) \leq \beta_1(n)$;
- 3) для нечетных $s \geq 1$, $n-s \geq 1$, $(s-1)\alpha_1(n-s) \leq \alpha_1(n)$;
- 4) для нечетных $s \geq 1$, $n-s \geq 2$, $(s-1)\beta_1(n-s) \leq \beta_1(n)$;
- 5) для четных $s \geq 2$, $n-s \geq 2$, $(s-1)\beta_1(n-s) \leq \alpha_1(n)$;
- 6) для четных $s \geq 2$, $n-s \geq 1$, $(s-1)\alpha_1(n-s) \leq \beta_1(n)$;
- 7) для нечетного $n \geq 1$, $\alpha_1(n) \geq n-1$;
- 8) для четного $n \geq 2$, $\beta_1(n) \leq n-1$.

Доказательство. Докажем неравенство 1). Так как $n \geq 3$, то $\alpha_1(n) \neq 0$. Имеем

$$\alpha_1(n) = \max(n_1 - 1)(n_2 - 1) \dots (n_k - 1)$$

на множестве k, n_1, n_2, \dots, n_k таких, что $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, k и n имеют одинаковую четность. Так как $\alpha_1(n) \neq 0$, то можно считать, что $n_1 > 1$. Получаем

$$\alpha_1(n) = \max n_1(n_2 - 1) \dots (n_k - 1),$$

на множестве натуральных k, n_1, n_2, \dots, n_k таких, что

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n - 1,$$

k и $n - 1$ имеют разную четность. Поэтому

$$\alpha_1(n) > \beta_1(n-1).$$

Неравенство 2) доказывается аналогично. Докажем неравенство 3). Рассмотрим случаи: $n - s$ — четно и $n - s$ — нечетно.

Таблица значений $\alpha(n)$, $\beta(n)$

n	$\alpha(n)$	$\beta(n)$
1	0=0	0
2	1=1	0=0.0
3	2=2	0=0.1
4	3=3	1=1.1
5	4=4	2=1.2
6	5=5	4=2 ²
7	6=6	6=2.3
8	7=7	9=3 ²
9	8=8	12=3.4
10	12=2 ² .3	16=4 ²
11	18=2.3 ²	20=4.5
12	27=3 ³	25=5 ²
13	36=3 ² .4	30=5.6
14	48=3.4 ²	36=3 ² .2 ²
15	64=4 ³	54=2.3 ³
16	80=4 ² .5	81=3 ⁴
17	100=4.5 ²	108=3 ³ .4
18	125=5 ³	144=3 ² .4 ²
19	162=2.3 ⁴	192=3.4 ³
20	243=3 ⁵	256=4 ⁴
21	324=3 ⁴ .4	320=4 ³ .5
22	432=3 ³ .4 ²	400=4 ² .5 ²
23	576=3 ² .4 ³	500=4.5 ³
24	768=3.4 ⁴	729=3 ⁶
25	1024=4 ⁵	972=3 ⁵ .4
26	1280=4 ⁴ .5	1296=3 ⁴ .4 ²
27	1600=4 ³ .5 ²	1728=3 ³ .4 ³
28	2187=3 ⁷	2304=3 ² .4 ⁴
29	2916=3 ⁶ .4	3072=3.4 ⁵
30	3888=3 ⁵ .4 ²	4096=4 ⁶
31	5184=3 ⁴ .4 ³	5120=4 ⁵ .5
32	6912=3 ³ .4 ⁴	6561=3 ⁸
33	9216=3 ² .4 ⁵	8748=3 ⁷ .4
34	12 288=3.4 ⁶	11 664=3 ⁶ .4 ²
35	16 384=4 ⁷	15 552=3 ⁵ .4 ³
36	20 480=4 ⁶ .5	20 736=3 ⁴ .4 ⁴
37	26 244=3 ⁸ .4	27 648=3 ³ .4 ⁵
38	34 992=3 ⁷ .4 ²	36 684=3 ² .4 ⁶
39	46 656=3 ⁶ .4 ³	49 152=3.4 ⁷
40	62 202=3 ⁵ .4 ⁴	65 536=4 ⁸

Если n четно, то

$$\alpha_1(n) = \max(n_1 - 1)(n_2 - 1) \dots$$

на множестве k, n_1, n_2, \dots, n_k таких, что

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n,$$

k — четно. Тогда для нечетного s ,

$$\alpha_1(n) \geq (s-1) \max(n_2-1) \dots (n_k-1)$$

на множестве $k-1, n_2, \dots, n_k$ таких, что

$$n_2 + \dots + n_k = n - s, \quad k-1, \quad n-s$$

имеют одинаковую четность. Поэтому

$$\alpha_1(n) \geq (s-1) \alpha_1(n-s).$$

Для нечетного n неравенство 3) доказывается аналогично.

Неравенства 4) — 6) доказываются так же как неравенство 3).

Неравенства 7) — 8) легко доказываются. Лемма доказана.

Таблицей нужно пользоваться следующим образом: например, $\alpha(22) = 432 = 3^3 \cdot 4^2$, т. е. $\max(n_1-1)(n_2-1) \dots (n_k-1)$, где $n_1 + n_2 + \dots + n_k = 22$, k — нечетно, достигается при $k = 3 + 2 = 5$, $n_1 = n_2 = n_3 = 3 + 1 = 4$, $n_4 = n_5 = 4 + 1 = 5$ и равен 432.

ЛЕММА 1.3. Пусть $\gamma(n) = 4^{2\lfloor n/10 \rfloor}$ для $n \geq 1$. Значения $\alpha(n)$ определены формулами:

1) для $n \equiv 0 \pmod{10}$, $n \geq 20$, $\alpha(n) = 3^5 \cdot 4^{-4} \gamma(n)$;

2) для $n \equiv 1 \pmod{10}$, $n \geq 21$, $\alpha(n) = 3^4 \cdot 4^{-3} \gamma(n)$;

3) для $n \equiv 2 \pmod{10}$, $n \geq 12$, $\alpha(n) = 3^3 \cdot 4^{-2} \gamma(n)$;

4) для $n \equiv 3 \pmod{10}$, $n \geq 13$, $\alpha(n) = 3^2 \cdot 4^{-1} \gamma(n)$;

5) для $n \equiv 4 \pmod{10}$, $\alpha(n) = 3\gamma(n)$;

6) для $n \equiv 5 \pmod{10}$, $\alpha(n) = 4\gamma(n)$;

7) для $n \equiv 6 \pmod{10}$, $\alpha(n) = 5\gamma(n)$;

8) для $n \equiv 7 \pmod{10}$, $n \geq 37$, $\alpha(n) = 3^8 \cdot 4^{-5} \gamma(n)$;

9) для $n \equiv 8 \pmod{10}$, $n \geq 28$, $\alpha(n) = 3^7 \cdot 4^{-4} \gamma(n)$;

10) для $n \equiv 9 \pmod{10}$, $n \geq 29$, $\alpha(n) = 3^6 \cdot 4^{-3} \gamma(n)$.

Значения $\beta(n)$ определены формулами:

11) для $n \equiv 0 \pmod{10}$, $\beta(n) = \gamma(n)$;

12) для $n \equiv 1 \pmod{10}$, $n \geq 11$, $\beta(n) = 5 \cdot 4^{-1} \gamma(n)$;

13) для $n \equiv 2 \pmod{10}$, $n \geq 32$, $\beta(n) = 3^8 \cdot 4^{-6} \gamma(n)$;

14) для $n \equiv 3 \pmod{10}$, $n \geq 33$, $\beta(n) = 3^7 \cdot 4^{-5} \gamma(n)$;

15) для $n \equiv 4 \pmod{10}$, $n \geq 24$, $\beta(n) = 3^6 \cdot 4^{-4} \gamma(n)$;

16) для $n \equiv 5 \pmod{10}$, $n \geq 25$, $\beta(n) = 3^5 \cdot 4^{-3} \gamma(n)$;

17) для $n \equiv 6 \pmod{10}$, $n \geq 16$, $\beta(n) = 3^4 \cdot 4^{-2} \gamma(n)$;

18) для $n \equiv 7 \pmod{10}$, $n \geq 17$, $\beta(n) = 3^3 \cdot 4^{-1} \gamma(n)$;

19) для $n \equiv 8 \pmod{10}$, $\beta(n) = 3^2 \gamma(n)$;

20) для $n \equiv 9 \pmod{10}$, $\beta(n) = 3 \cdot 4 \gamma(n)$.

Доказательство. Обозначим через \bar{n} тот класс вычетов по $\text{mod } 10$, которому принадлежит n . Запишем

$\alpha(n)$, $\beta(n)$ в виде: $\alpha(n) = a(n) \cdot 4^{n/5}$, $\beta(\bar{n}) = b(\bar{n}) \cdot 4^{n/5}$, где $a(0) = 3^5 \cdot 4^{-4}$, $a(1) = 3^4 \cdot 4^{-16/5}$, $a(2) = 3^3 \cdot 4^{-12/5}$, $a(3) = 3^2 \cdot 4^{-8/5}$, $a(4) = 3 \cdot 4^{-4/5}$, $a(5) = 1$, $a(6) = 5 \cdot 4^{-6/5}$, $a(7) = 3^8 \cdot 4^{-32/5}$, $a(8) = 3^7 \cdot 4^{-24/5}$, $a(9) = 3^6 \cdot 4^{-24/5}$ и $b(\bar{n}) = a(\bar{n} + 5)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. При соответствующих n эти равенства совпадают с равенствами 1) — 20).

Справедливы неравенства: $a(7) < a(8) < a(9) < a(0) < a(1) < a(2) < a(3) < a(4) < a(5) > a(6) > a(7)$, $a(7) = 0,919 \dots$

Будем рассматривать значения выражения

$$(n_1 - 1)(n_2 - 1) \dots (n_k - 1), \quad (2.1)$$

где k, n_1, n_2, \dots, n_k — натуральные числа, $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

Докажем, что \max выражения (2.1) при $n \geq 10$ и нечетных k достигается при $k > 1$. Для $10 \leq n \leq 27$ это следует из таблицы значений $\alpha(n)$. Докажем это утверждение для $n > 27$. Рассмотрим число $a(\bar{n}) \cdot 4^{n/5}$, нетрудно видеть, что оно является значением выражения (2.1) при нечетном k . Например, при $n \equiv 1 \pmod{10}$, $a(\bar{1}) \cdot 4^{n/5} = 3^4 \cdot 4^{2[n/10]-3}$, выберем $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 4$, $n_5 = \dots = n_k = 5$,

$$k = 4 + 2 \left[\frac{n}{10} \right] - 3 = 2 \left[\frac{n}{10} \right] + 1, \quad n_1 + n_2 + \dots + n_k = 4 \cdot 4 + 5 \left(\frac{n-1}{5} - 3 \right) = n.$$

Справедливо неравенство: $a(\bar{n}) \cdot 4^{n/5} > 0,9 \cdot 4^{n/5}$. По индукции легко доказать, что $0,9 \cdot 4^{n/5} \geq n - 1$ для $n \geq 7$. Поэтому число $a(\bar{n}) \cdot 4^{n/5}$ больше значения выражения (2.1) при $k = 1$, следовательно, \max выражения (2.1) при нечетных k и $n \geq 10$ достигается при $k > 1$. Справедливо равенство:

$$\alpha(n) = \max \{ \alpha(s) \beta(t) \}, \quad (2.2)$$

для $n \geq 10$, где \max берется по всем натуральным s, t таким, что $s + t = n$.

Докажем, что \max выражения (2.1) при $n \geq 14$ и четных k достигается при $k > 2$. Для $14 \leq n \leq 22$ это следует из таблицы значений $\beta(n)$. Докажем это утверждение для $n > 22$. Рассмотрим число $b(\bar{n}) \cdot 4^{n/5}$, нетрудно видеть, что оно является значением выражения (2.1) при четном k . Справедливо неравенство $b(\bar{n}) \cdot 4^{n/5} > 0,9 \cdot 4^{n/5}$. По индукции легко доказать, что $0,9 \cdot 4^{n/5} > \left(\frac{n}{2} - 1 \right)^2$ для $n \geq$

≥ 12 . Поэтому число $b(\bar{n}) \cdot 4^{n/5}$ больше значения выражения (2.1), при $k = 2$, следовательно, тах выражения (2.1) при четных k и $n \geq 14$ достигается при $k > 2$. Справедливо равенство

$$\beta(n) = \max \{ \alpha(s) \alpha(t), \beta(s) \beta(t) \}, \quad (2.3)$$

для $n \geq 14$, где тах берется по всем натуральным s, t таким, что $s + t = n$.

Для всех $n, m \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства:

$$a(\bar{n}) a(\bar{m}) \leq b(\bar{n} + \bar{m}), \quad (2.4)$$

$$a(\bar{n}) b(\bar{m}) \leq a(\bar{n} + \bar{m}), \quad (2.5)$$

$$b(\bar{n}) b(\bar{m}) \leq b(\bar{n} + \bar{m}). \quad (2.6)$$

Справедливость неравенств (2.4) проверяется непосредственным вычислением. Неравенства (2.5), (2.6) являются следствием неравенства (2.4).

Докажем теперь равенства 1) — 20). Доказательство будем проводить индукцией по числу n . Для $n \leq 37$ справедливость 1) — 20) проверяется непосредственным вычислением. Также непосредственным вычислением проверяется, что $\alpha(n) \leq a(\bar{n}) \cdot 4^{n/5}$, $\beta(n) \leq b(\bar{n}) \cdot 4^{n/5}$ для всех $n \leq 37$. Предположим теперь, что равенства 1) — 20) доказаны для всех натуральных чисел, меньших n , $n > 37$, и докажем их для числа n . Из (2.2) следует, что $a(\bar{n}) \cdot 4^{n/5} \leq \alpha(n) = \max \{ \alpha(s) \beta(t) \}$, где тах берется по всем натуральным s, t таким, что $s + t = n$. Используя индукционное предположение, неравенство (2.5) и сделанное выше замечание, находим, что

$$\alpha(s) \beta(t) \leq a(\bar{s}) \cdot 4^{s/5} \cdot b(\bar{t}) \cdot 4^{t/5} \leq a(\bar{n}) \cdot 4^{n/5}.$$

Поэтому

$$\alpha(n) = a(\bar{n}) \cdot 4^{n/5}.$$

Из (2.3) следует, что

$$b(\bar{n}) \cdot 4^{n/5} \leq \beta(n) = \max \{ \alpha(s) \alpha(t), \beta(s) \beta(t) \},$$

где тах берется по всем натуральным s, t таким, что $s + t = n$. Имеем

$$\alpha(s) \alpha(t) \leq a(\bar{s}) \cdot 4^{s/5} \cdot a(\bar{t}) \cdot 4^{t/5} \leq b(\bar{n}) \cdot 4^{n/5},$$

$$\beta(s) \beta(t) \leq b(\bar{s}) \cdot 4^{s/5} \cdot b(\bar{t}) \cdot 4^{t/5} \leq b(\bar{n}) \cdot 4^{n/5}.$$

Ниже будут определены \max и \min значения определителей $\Delta_n (\leq)$ при различных порядках \leq на интервале $[a; b]$ мощности $n + 2$.

ЛЕММА 3.2. *Справедливы утверждения:*

1) если интервал $[a; b]$ мощности $n + 2$ содержит только один атом или только один коатом (относительно индуцированного порядка), то $\Delta_n (\leq) = 0$;

2) пусть в интервале $[a; b]$ мощности $n + 2$ существует элемент $c \neq b$, не являющийся атомом, и покрывающий только один элемент интервала. Рассмотрим множество $U_2 = [a; b] \setminus \{c\}$, относительно индуцированного порядка \leq_1 , $U_2 = [a; b]$ мощности $(n - 1) + 2$. Справедливо равенство $\Delta_n (\leq) = -\Delta_{n-1} (\leq_1)$.

Доказательство. 1) Если интервал $[a; b]$ содержит только один атом, то в силу следствия 1.1 этот атом будет обозначаться 1, $\zeta_{12} = \zeta_{13} = \dots = \zeta_{1n} = 1$ и $\Delta_n (\leq) = 0$. В случае единственного коатома этот коатом будет обозначен n , $\zeta_{1n} = \zeta_{2n} = \dots = \zeta_{n-1n} = 1$ и снова $\Delta_n (\leq) = 0$.

2) Пусть элемент c (обозначим его через $i + 1$) покрывает единственный элемент d , который можно обозначить через i (по следствию 1.1). Рассмотрим i -ю и $(i + 1)$ -ю строки определителя $\Delta_n (\leq)$, они имеют вид:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \zeta_{1i} & \zeta_{2i} & \dots & \zeta_{i-1i} & 1 & \\ 1 & \zeta_{1i+1} & \zeta_{2i+1} & \dots & \zeta_{n-1i+1} & 1 & 1. \end{array}$$

Для этих строк справедливо условие: для $j \in \{1, \dots, \dots, i - 1\}$, $\zeta_{ji} = 1$ тогда и только тогда, когда $\zeta_{ji+1} = 1$. В определителе $\Delta_n (\leq)$ из $(i + 1)$ -й строки вычтем i -ю строку и получившийся определитель разложим по $(i + 1)$ -й строке. Нужно равенство доказано. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.3 *Для любого порядка \leq для $n \geq 2$ справедливы неравенства:*

$$-\beta_1(n) \leq \Delta_n (\leq) \leq \alpha_1(n). \quad (3.4)$$

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по n . Для $n = 2$, $\Delta_n (\leq) = \zeta_{12} - 1$, $-1 \leq \Delta_n (\leq) \leq 0$.

Предположим, что неравенства (3.4) доказаны для всех чисел меньших n , $n \geq 3$. Докажем их для числа n .

Среди всех порядков \leq , на которых достигается \max (\min) $\Delta_n (\leq)$, выберем некоторый порядок \leq . Пусть ин-

проверить, что \leq — частичный порядок, удовлетворяющий выше перечисленным условиям.

Пусть \max (\min) определителей $\Delta_{n-s}(\gamma, \leq_1)$ достигается при некотором порядке \leq_1 и некотором векторе γ , имеющем нулевые компоненты, например, $c_i - 1 = 0$ для некоторого $i \in \{s+1, \dots, n\}$. Отсюда следует, что существует только один атом a_1 такой, что $a_1 < i$. Поэтому существует $c \in [a; b]$, покрывающий только один элемент a_1 , $c \cdot \geq a_1$. Тогда по лемме 3.2 $\Delta_n(\leq) = -\Delta_{n-1}(\leq_2)$ для некоторого \leq_2 . Имеем $-\alpha_1(n-1) \leq \Delta_n(\leq) \leq \beta_1(n-1)$. Из этих неравенств и леммы 1.2 следуют неравенства (3.4).

Пусть \max (\min) определителей $\Delta_{n-s}(\gamma, \leq_1)$ достигается при некоторых порядках \leq_1 и некоторых векторах γ , причем, в каждом таком векторе γ ни одна из компонент не равна 0. По лемме 3.1 \max (\min) определителей $\Delta_{n-s}(\gamma, \leq_1)$ достигается при $c_{s+1} - 1 = c_{s+2} - 1 = \dots = c_n - 1 = c - 1$. Из равенства (3.5) следует: для нечетных s $\Delta_n(\leq) = (s-1)\Delta_{n-s}(\leq_1)$, $-(s-1)\beta_1(n-s) \leq \Delta_n(\leq) \leq (s-1)\alpha_1(n-s)$; для четных s $\Delta_n(\leq) = -(s-1)\Delta_{n-1}(\leq_1)$, $-(s-1)\alpha_1(n-s) \leq \Delta_n(\leq) \leq (s-1)\beta_1(n-s)$. Из этих неравенств и леммы 2.1 следуют неравенства (3, 4). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Из равенства (3.2) и леммы 3.4 при нечетном n следует, что $-\beta(n) = -\beta_1(n) \leq \mu(a, b) \leq \alpha_1(n) = \alpha(n)$; при четном n следует, что

$$-\beta(n) = -\alpha_1(n) \leq \mu(a, b) \leq \beta_1(n) = \alpha(n).$$

Теорема доказана.

4. Ч.у.м., на которых достигаются верхние и нижние границы. Пусть n_1, n_2, \dots, n_k — некоторые натуральные числа. Обозначим U_{n_1, n_2, \dots, n_k} — ч.у.м. с 0 и 1 мощности $n_1 + n_2 + \dots + n_k + 2$ и порядком \leq , который задан следующим образом: элементы множества U_{n_1, n_2, \dots, n_k} , отличные от 0 и 1, разбиты на непустые непересекающиеся классы K_1, K_2, \dots, K_k мощности n_1, n_2, \dots, n_k , соответственно, элементы класса K_1 покрывают 0; элементы класса K_2 покрывают каждый элемент класса K_1 ; элементы класса K_3 покрывают каждый элемент класса K_2 и т. д.; элементы класса K_k покрывают каждый элемент класса K_{k-1} ; 1 покрывает каждый элемент класса K_k ; ч.у.м. U_{n_1, n_2, \dots, n_k} обладает ранговой функцией.

ЛЕММА 1.1. Для $n \in \mathbb{N}$ и для всех $x_n \in X_n$ справедливо неравенство:

$$|\det x_n| \leq \varphi_n. \quad (1.2)$$

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по n . Для $n = 1, 2$ справедливость неравенства (1.2) легко проверяется. Предположим, что неравенство (1.2) доказано для чисел $n - 2, n - 1$. Докажем неравенство (1.2) для числа $n, n \geq 3$.

Рассмотрим матрицу x_n , заданную равенством (1.1). Если оба числа x_{11}, x_{12} равны 0, то $\det x_n = 0$ и неравенство (1.2) доказано. Если только одно из чисел x_{11}, x_{12} равно 0, то $\det x_n = \pm \det x_{n-1}$, где $x_{n-1} \in X_{n-1}$ и поэтому неравенство (1.2) доказано. Осталось доказать справедливость неравенства (1.2) для $x_{11} = x_{12} = 1$.

Рассмотрим элементы 2-й строки матрицы $x_n: x_{21}, x_{22}, x_{23}$. Если все они равны 0, то $\det x_n = 0$ и неравенство (1.2) доказано. Если только один из элементов 2-й строки равен 1, то $\det x_n = \pm \det x_{n-1}$, где $x_{n-1} \in X_{n-1}$, и неравенство (1.2) выполнено. Если все три элемента 2-й строки равны 1, то прибавим ко 2-й строке 1-ю, умноженную на -1 , и разложим получившийся определитель по 2-й строке. Получим $\det x_n = -\det x'_{n-1}$, где $x'_{n-1} \in X_{n-1}$. Неравенство (1.2) в случае $x_{21} = x_{22} = x_{23}$ доказано. Осталось рассмотреть три случая: $\alpha) x_{21} = x_{22} = 1, x_{23} = 0$; $\beta) x_{21} = 1, x_{22} = 0, x_{23} = 1$; $\gamma) x_{21} = 0, x_{22} = 1, x_{23} = 1$.

В случае $\alpha)$, $\det x_n = 0$.

В случае $\beta)$ разложим определитель по 1-й строке:

$$\begin{aligned} \det x_n &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & x_{n4} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n2} & x_{n3} & x_{n4} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_{31} & x_{33} & x_{34} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n3} & x_{n4} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} = \\ &= - \begin{vmatrix} x_{32} & x_{34} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n2} & x_{n4} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_{31} & x_{33} & x_{34} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n3} & x_{n4} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Получили $\det x_n = -\det x'_{n-2} - \det x'_{n-1}$, где $x'_{n-2} \in X_{n-2}$,

$x_{n-1} \in X_{n-1}$. Отсюда по индукционному предположению следует, что $|\det x_n| \leq \varphi_{n-2} + \varphi_{n-1} = \varphi_n$.

В случае γ) доказательство проводится аналогично. Лемма доказана.

Рассмотрим $n \times n$ матрицы A_n вида:

$$A_n = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & - \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Если в матрице A_n переставить местами 1-й и 2-й столбцы, а остальные оставить на месте, то получим матрицу, которую обозначим A'_n .

ЛЕММА 2.1. *Справедливы утверждения:*

- 1) для $n \in \mathbb{N}$, $\det A_n = \varphi_n$;
- 2) для $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\det A'_n = -\varphi_n$.

Доказательство. 1) Доказательство проводится индукцией по числу n . Для $n = 1$, $n = 2$ утверждение справедливо. Предположим, что утверждение доказано для чисел $n - 2$, $n - 1$. Докажем его для числа n , $n \geq 3$. Разложим $\det A_n$ по 1-й строке, после несложных вычислений получим, что $\det A_n = \det A_{n-2} + \det A_{n-1} = \varphi_n$. Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы 2. Пусть R — рефлексивное бинарное отношение на множестве U , которое можно продолжить до некоторого частичного порядка на U (а значит, в силу известной теоремы Шпильрайна [6] до полного линейного порядка на U). Ясно, что отношение R антисимметрично.

Рассмотрим множество $\text{AI1}(U, R)$. В силу известных из [4] результатов функция e является единичной функцией, $\text{AI1}(U, R)$ — несингулярно. Элементы $\text{AI1}(U, R)$ можно представить ниже треугольными матрицами. Используя это матричное представление, найдем выражение для значений μ функций Мёбиуса множества $\text{AI1}(U, R)$ через определители некоторых $(0,1)$ матриц.

Рассмотрим произвольный интервал $U_1 = [a; b]$, $a, b \in U$ мощности $n + 2$. Так как отношение R продолжаемо до порядка, то можно считать, что элементы множества U_1 обозначены целыми числами $a = 0, 1, \dots, n, n + 1 = b$ так, что для всех $x, y \in \{0, 1, \dots, n + 1\}$, если $x \leq y$, то $x \leq y$.

