Ю. А. Клоков, Об экстремалях одного функционала на плоскости, *Дифференц. уравнения*, 2004, том 40, номер 3, 324–329

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2004, том 40, № 3, с. 324–329

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.4

ОБ ЭКСТРЕМАЛЯХ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛА НА ПЛОСКОСТИ

© 2004 г. Ю. А. Клоков

В настоящей работе мы рассмотрим вопрос о существовании экстремалей функционала

$$I(l) = \int_0^1 \sqrt{x'^2 + y'^2} v^{-1}(x, y)\, dt, \tag{1}$$

где $v > 0 \ \ \forall (x, y) \in R^2$, $v \in C^1(R^2)$, $x(t), y(t) \in C^2(I)$, $I = [0, 1]$. Так как $v > 0$, то можно положить $v = \exp \varphi(x, y)$, где $\varphi \in C^1(R^2)$. Тогда интересующие нас экстремали функционала (1) будут решениями краевой задачи (см. [1, с. 242])

$$x'' = \varphi_x x'^2 + 2\varphi_y x' y' - \varphi_x y'^2, \tag{2}$$

$$y'' = -\varphi_y x'^2 + 2\varphi_x x' y' + \varphi_y y'^2, \tag{3}$$

$$x(0) = a_0, \quad y(0) = b_0, \quad x(1) = a_1, \quad y(1) = b_1, \tag{4}$$

где $a_0, \ldots, b_1 \in R$, $\varphi_x = (\varphi(x, y))'_x$, $\varphi_y = (\varphi(x, y))'_y$.

Линии l в плоскости x, y, определенные уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in I$, где $x(t), y(t)$ – решение задачи (2)–(4), называются также геодезическими линиями функционала (1).

I. Правые части уравнений (2), (3) имеют квадратичный рост по x', y', что сильно усложняет исследование задачи (2)–(4). Остановимся на этом вопросе более подробно.

Хорошо известно (см. [2, гл. 5] и [3]), что если в краевой задаче

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(0) = x_0, \quad x(1) = x_1 \tag{5}$$

$f \in C(I \times R^{2n})$ и удовлетворяет условиям

A) существуют число $h > 0$ и симметричная, положительно-определенная матрица H такие, что $(Hx, f(t, x, y)) + (Hy, y) \geq 0$ при $|x| > h$, $(Hx, y) = 0 \ \ \forall t \in I$, $x, y \in R^n$;

B) для любого $M > 0$ существуют числа $p > 0$, $\varepsilon > 0$ такие, что $|f(t, x, y)| \leq p(1 + y^2)^{1-\varepsilon}$ $\forall t \in I$, $|x| \leq M \ \ \forall y \in R^n$,

то задача (5) имеет решение для $\forall x_0, x_1 \in R^n$. При этом требование $\varepsilon > 0$ существенно, если $n \geq 2$, так как тогда для любого $M > 0$ существует $N > 0$ (зависящее от p, ε, M) такое, что для любого решения $x(t)$ уравнения (5), удовлетворяющего неравенству $|x(t)| \leq M$ $\forall t \in I$, справедлива оценка $|x'(t)| \leq N \ \ \forall t \in I$. (Априорная оценка первой производной.) При $\varepsilon = 0$ такой оценки, вообще говоря, нет. Как показывает пример системы (x, y – скаляры) $x'' = -x(x'^2 + y'^2)$, $y'' = -y(x'^2 + y'^2)$, которая имеет решение $x = \cos kt$, $y = \sin kt$ такое, что $x^2(t) + y^2(t) = 1$, но $x'^2 + y'^2 = k^2$, и так как число k может быть сколь угодно большим, то априорной оценки первой производной нет.

Заметим, что приведенная система (для x, y), очевидно, не удовлетворяет условию A). Однако можно построить пример функции f, удовлетворяющей условию A) и условию B) с $\varepsilon = 0$ и для которой задача (5) решения не имеет. Этот пример сложен, и мы его не приводим.

Впрочем, можно привести примеры систем, которые удовлетворяют условиям A) и B) с $\varepsilon = 0$ и для которых существуют априорные оценки первых производных и соответственно задача (5) разрешима для $\forall x_0, x_1 \in R^n$. Такой является, например, система $x'' = x(1 + x'^2)$, $x \in R^n$. (В условии A) надо взять $H = E$, где E – единичная матрица.)

В силу сказанного определенный теоретический интерес представляет изучение краевой задачи (4) для системы

$$x'' = A_1x'^2 + A_2x'y' + A_3y'^2, \quad -y'' = B_1x'^2 + B_2x'y' + B_3y'^2, \tag{6}$$

где $A_i(x,y), B_i(x,y) \in C(R^2)$ $(i = 1,2,3)$. Эта система является модельной для случая, когда в условии В) $\varepsilon = 0$.

Рассмотрим сначала случай, когда $A_1, \ldots, B_3$ постоянные. Путем невырожденной замены $x = \alpha u + \beta v$, $y = \gamma u + \delta v$, $\alpha, \ldots, \delta \in R$, всегда можно добиться того, чтобы $A_3 = 0$, что мы и будем предполагать.

Обозначим $Q(s) = B_1 + (B_2 + A_1)s + (B_3 + A_2)s^2$.

Теорема 1. *Пусть хотя бы один из полиномов $Q(s)$ или $s^2Q(s^{-1})$ имеет вещественный корень. Тогда задача (6), (4) имеет решение для любых $a_0, \ldots, b_1$. Если корни $Q(s)$ комплексные, то задача (6), (4) имеет решение, когда $|a_1 - a_0| < H$, $b_0, b_1 \in R$, где $H = \int_{-\infty}^{\infty} |Q(s)|^{-1}ds$. Если же $|a_1 - a_0| \geq H$, то задача решения не имеет.*

Заметим, что решение задачи (6), (4) единственно (доказательство см. в работе [4]).

Далее рассмотрим случай переменных коэффициентов $A_1, \ldots, B_3$.

Теорема 2. *Обозначим через $P_0(k,x,y)$ функцию (кубический полином по k) $P_0(k,x,y) = B_1 + (A_1 + B_2)k + (A_2 + B_3)k^2 + A_3k^3$, где $A_3(x,y) \geq 0$ $\forall (x,y) \in R^2$, и предположим, что полином P_0 представим в виде $P_0(k,x,y) = A_3(k - k_1(x,y))(k - k_2(x,y))(k - k_3(x,y))$, где $k_1, k_2, k_3 \in C(R^2)$, причем существуют $c, d \in R$, $c < d$, такие, что $k_1(x,y) \leq c \leq k_2(x,y) \leq d \leq k_3(x,y)$ $\forall (x,y) \in R^2$. Тогда решение задачи (6), (4) существует для любых $a_0, \ldots, b_1$.*

Доказательство см. в работе [5].

В случае, когда полином P_0 имеет комплексные корни, множество точек $[a_1, b_1]$, $a_0 = b_0 = 0$, для которых задача (6), (4) имеет решение, может быть ограниченным, например, внутренность круга.

Приведем пример. Обозначим $P = 3(1 - x^2 - y^2)^3 + 4(x^2 + y^2)$, $Q = 2(1 - x^2 - y^2) + 4(1 - x^2 - y^2)^2$, $R_0 = (1 - x^2 - y^2)^4 + 4(x^2 + y^2)^2$, $A = R_0^{-1}(-xP + yQ)$, $B = R_0^{-1}(yP + xQ)$. Тогда система имеет вид

$$x'' = A(x'^2 + y'^2), \quad -y'' = B(x'^2 + y'^2).$$

Эта система имеет решение

$$x(t) = (1 + \omega^2t^2)^{-1/2}\omega t \sin(\alpha + \omega^2t^2), \quad y(t) = (1 + \omega^2t^2)^{-1/2}\omega t \cos(\alpha + \omega^2t^2).$$

Очевидно, что $x(0) = y(0) = 0$, $x'(0) = \omega \sin\alpha$, $y'(0) = \omega\cos\alpha$ и $x^2(t) + y^2(t) < 1$ при любых $t, \alpha, \omega \in R$. Соответствующий полином $P_0(k,x,y) = (k^2 + 1)(Ak + B)$ имеет комплексные корни.

II. Обратимся теперь к задаче (2)–(4). Полином $P_0 = (1 + k^2)(\varphi_y - k\varphi_x)$, построенный для системы (2), (3), имеет комплексные корни и условия теоремы 2 в данном случае не выполняются. Для существования решения необходимы дополнительные предположения.

Теорема 3. *Пусть существуют $a, b \in R$ такие, что $(x-a)\varphi_x(x,y) \leq 0$, $(y-b)\varphi_y(x,y) \leq 0$ $\forall (x,y) \in R^2$. Тогда задача (2)–(4) имеет решение для любых $a_0, \ldots, b_1$.*

Доказательство. Пусть $x(t)$, $y(t)$, $t \in I$, есть решение задачи (2)–(4). Найдем априорные оценки. Из уравнения (2) следует, что в тех точках t, где $x'(t) = 0$, имеем $x''(t) \geq 0$ при $x \geq a$ и $x''(t) \leq 0$ при $x \leq a$. Поэтому $|x(t)| \leq \max(|a_0|, |a_1|, |a|)$ $\forall t \in I$.

Аналогично из уравнения (3) находим $|y(t)| \leq \max(|b_0|, |b_1|, |b|)$ $\forall t \in I$. Обозначим через $m > 0$ постоянную, большую чем максимумы в двух последних неравенствах. Тогда

$$\int_0^1 |x'(t)|\,dt \leq 2m, \quad \int_0^1 |y'(t)|\,dt \leq 2m, \quad \int_0^1 (|x'(t)| + |y'(t)|)\,dt \leq 4m$$

и по теореме о среднем существует точка $t_0 \in I$, где $|x'(t_0)| + |y'(t_0)| \le 4m$. Умножая уравнение (2) на x', уравнение (3) на y' и складывая, найдем

$$(x'^2 + y'^2)' = 2(x'^2 + y'^2)(x'\varphi_x + y'\varphi_y), \tag{7}$$

$$x'^2 + y'^2 \le [x'^2(t_0) + y'^2(t_0)]\exp(2)\int\limits_0^1 (|x'||\varphi_x| + |y'||\varphi_y|)\,dt \le 16m^2\exp(4m)M := n^2, \quad t \in I, \tag{8}$$

где $M = \max(|\varphi_x(x,y)|, |\varphi_y(x,y)|, x^2 + y^2 \le 2m^2)$.

Обозначим через $\sigma_0(s)$ нечетную функцию, определенную для $s \ge 0$ условиями $\sigma_0(s) = s$, $0 \le s \le 1$, $\sigma_0(s) = 1$, $s \ge 1$, а через $\sigma(s)$ – функцию, определенную для $s \ge 0$ условиями $\sigma(s) = 1$, $0 \le s \le 1$, $\sigma(s) = s^{-1}$, $s \ge 1$, и рассмотрим вспомогательную систему

$$\begin{gathered} x'' = (\bar\varphi_x x'^2 + 2\bar\varphi_y x'y' - \bar\varphi_x y'^2)\sigma(n^{-2}(x'^2 + y'^2)), \\ y'' = (-\bar\varphi_y x'^2 + 2\bar\varphi_x x'y' + \bar\varphi_y y'^2)\sigma(n^{-2}(x'^2 + y'^2)), \end{gathered} \tag{9}$$

где $\bar\varphi_x = \varphi(\bar x, \bar y)$, $\bar\varphi_y = \varphi_y(\bar x, \bar y)$, $\bar x = m\sigma_0(m^{-1}x)$, $\bar y = m\sigma_0(m^{-1}y)$.

Так как задача $x'' = 0$, $y'' = 0$, $x(0) = y(0) = x(1) = y(1) = 0$ имеет только нулевое решение и правые части системы (9) ограничены некоторыми постоянными, то решение задачи (9), (4) существует (см. [2, с. 25]).

Обозначим его через $x_0(t)$, $y_0(t)$, $t \in I$. Теперь, повторяя предыдущие рассуждения, найдем для этого решения те же самые априорные постоянные, что и для $x(t)$, $y(t)$. Но при выполнении этих оценок системы (2), (3) и (9) совпадают. Следовательно, решение задачи (9), (4) есть решение задачи (2)–(4). Тем самым теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Пусть функции φ_x, φ_y не меняют своих знаков и, кроме того, $|\varphi_x| + |\varphi_y| \to 0$ при $x^2 + y^2 \to \infty$. Тогда решение задачи (2)–(4) существует для любых $a_0, \ldots, b_1$.*

Доказательство. В этой теореме будем считать $a_0 = b_0 = 0$, $a_1 := a$, $b_1 := b$. Кроме того, не уменьшая общности, будем предполагать, что $\varphi_x \ge 0$, $\varphi_y \ge 0$ $\forall (x,y) \in R^2$. (Этого всегда можно добиться заменами x на $-x$, y на $-y$.)

Пусть $x(t)$, $y(t)$, $t \in I$, есть решение задачи (2)–(4). Найдем априорные оценки. Если для некоторого $c \in (0,1)$ $x'(c) = 0$, то из уравнения (2) находим

$$x'(t) = -\int\limits_c^t \varphi_x y'^2(s)\exp\left(\int\limits_s^t (\varphi_x x' + 2\varphi_y y')\,d\tau\right) ds.$$

Отсюда следует, что $(t - c)x'(t) \le 0$, и поэтому точка экстремума функции $x(t)$ может быть только точкой максимума. То же самое справедливо относительно функции $y(t)$. Отсюда находим оценку снизу $x(t) \ge \min(0,a)$, $y(t) \ge \min(0,b)$ $\forall t \in I$.

Найдем оценки сверху. Если $x(t)$, $y(t)$ не имеют экстремумов, то, очевидно, $x(t) \le \max(0,a)$, $y(t) \le \max(0,b)$ $\forall t \in I$.

Рассмотрим теперь случай, когда $x(t)$ монотонно возрастает ($a > 0$), а $y(t)$ имеет максимум при $t_0 \in (0,1)$, $y(t_0) = 1/2 + H_0$.

Покажем, что $H_0 \le y \le H_0 + 1$ $\forall t \in I$, если H_0 настолько велико ($H_0 > \max(a,b)$), что $\varphi_x(x,y) + \varphi_y(x,y) < \varepsilon$ при $y \ge H_0$ $\forall x \in R$, причем выполняются неравенства

$$4a^2\varepsilon\exp(4a\varepsilon + \varepsilon) < 1, \quad (a + \varepsilon\exp(2\varepsilon a + 2\varepsilon))\exp(2\varepsilon a + 2\varepsilon) < 2a. \tag{10}$$

Так как $0 \le x(t) \le a$ $\forall t \in I$, то существует точка $t_1 \in (0,1)$, где $x'(t_1) = a$. Рассмотрим вместо задачи (2)–(4) вспомогательную задачу

$$x'' = (x')^* x'\sigma((2a)^{-1}|x'|)\bar\varphi_x + 2(y')_* x'\sigma((2a)^{-1}|x'|)\bar\varphi_y - ((y')_*)^2\bar\varphi_x, \tag{11}$$

$$y'' = -((x')^*)^2\bar{\varphi}_y + 2(x')^*y'\sigma(|y'|)\bar{\varphi}_x + (y')_*y'\sigma(|y'|)\bar{\varphi}_y, \tag{12}$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = a, \quad y(t_0) = 1/2 + H_0, \quad y'(t_0) = 0, \tag{13}$$

где $\bar{\varphi}_x = \varphi_x(x, \delta(H_0, y, H_0 + 1))$, $\bar{\varphi}_y = \varphi_y(x, \delta(H_0, y, H_0 + 1))$, $(x')^* = \delta(0, x', 2x'(t_1))$, $(y')_* = \delta(-1, y', 1)$, функция $\delta(p, x, q)$ $(p \leq q)$ определяется равенствами $\delta(p, x, q) = p$, $x \leq p$, $\delta(p, x, q) = x$, $p \leq x \leq q$, и $\delta(p, x, q) = q$ при $x \geq q$, функция $\sigma(s)$ определена в теореме 3. Так как задача $x'' = 0$, $y'' = 0$, $x(0) = x(1) = 0$, $y(t_0) = y'(t_0) = 0$ имеет только нулевое решение и правые части уравнений (11), (12) ограничены некоторыми постоянными, то решение задачи (11)–(13) существует (см. [2, с. 25]). Обозначим его через $x_0(t)$, $y_0(t)$, $t \in I$. Из уравнения (12) находим

$$y_0' = -\int\limits_{t_0}^{t} ((x_0')^*)^2\bar{\varphi}_y \exp\int\limits_{s}^{t} (2(x_0')^*\sigma(|y_0'|)\bar{\varphi}_x + (y_0')_*\sigma(|y_0'|)\bar{\varphi}_y)\,d\tau\,ds,$$

$$|y_0'| \leq 4a^2\varepsilon\exp(4a\varepsilon + \varepsilon)|t - t_0| < |t - t_0|$$

и поэтому $H_0 < y_0(t) < H_0 + 1$ $\forall t \in I$. Из уравнения (11) находим

$$x_0' = \left[x_0'(t_1) - \int\limits_{t_1}^{t} ((y_0')_*)^2\bar{\varphi}_x \exp(-1)\int\limits_{t_1}^{s}\left((x_0')^*\sigma\left(\frac{1}{2a}|x_0'|\right)\bar{\varphi}_x + 2(y_0')_*\sigma\left(\frac{1}{2a}|x_0'|\right)\bar{\varphi}_y\right)d\tau\,ds\right]\times$$

$$\times\exp\int\limits_{t_1}^{t}((x_0')^*\bar{\varphi}_x + 2(y_0')_*\bar{\varphi}_y)\sigma\left(\frac{1}{2a}|x_0'|\right)d\tau,$$

откуда следует, что

$$|x_0'| \leq [a + \varepsilon\exp(2a\varepsilon + 2\varepsilon)]\exp(2a\varepsilon + 2\varepsilon) < 2a \quad \forall t \in I.$$

Но при выполнении этих оценок уравнения (11), (12) совпадают с уравнениями (2), (3) и поэтому $x_0(t) = x(t)$, $y_0(t) = y(t)$ $\forall t \in I$. Отсюда следует, что $y_0(0) > H_0 > 0$. Но это противоречит условию $y(0) = 0$.

Полученное противоречие доказывает оценку $y(t) < 1/2 + H_0$ $\forall t \in I$. Если $x(1) = a < 0$, то в неравенствах (10) надо вместо a поставить $|a|$ и тогда получим ту же самую оценку. Аналогично получается априорная оценка, если монотонно изменяется $y(t)$, а $x(t)$ имеет максимум. В неравенствах (10) надо вместо a поставить $|b|$.

Наконец, рассмотрим третий случай, когда обе функции имеют максимумы $x(t_1) = 1/2 + h$, $y(t_0) = 1/2 + H_1$. Для определенности будем считать, что $H_1 \geq h$. Покажем, что $H_1 < y(t) < H_1 + 1$, если H_1 столь велико, что $\varphi_x + \varphi_y < \varepsilon$ при $y \geq H_1$ $\forall x \in I$, причем $\varepsilon\exp(3\varepsilon) < 1$.

Рассмотрим вспомогательную задачу, где $(x')_* = \delta(-1, x', 1)$:

$$x'' = (x')_*x'\sigma(|x'|)\bar{\varphi}_x + 2(y')_*\sigma(|x'|)x'\bar{\varphi}_y - ((y')_*)^2\bar{\varphi}_x, \tag{14}$$

$$y'' = -((x')_*)^2\bar{\varphi}_y + 2(x')_*y'\sigma(|y'|)\bar{\varphi}_x + (y')_*y'\sigma(|y'|)\bar{\varphi}_y, \tag{15}$$

$$x(t_1) = h + 1/2, \quad x'(t_1) = 0, \quad y(t_0) = H_1 + 1/2, \quad y'(t_0) = 0. \tag{16}$$

Так как задача $x'' = 0$, $y'' = 0$, $x(t_1) = x'(t_1) = 0$, $y(t_0) = y'(t_0) = 0$ имеет только нулевое решение и правые части уравнений (14), (15) ограничены некоторыми постоянными, то решение задачи (14)–(16) существует. Обозначим его через $x_1(t)$, $y_1(t)$ $\forall t \in I$. Далее из уравнения (15) имеем

$$y_1' = -\int\limits_{t_0}^{t} ((x_1')_*)^2\bar{\varphi}_y \exp\left(\int\limits_{s}^{t}(2(x_1')_*\sigma(|y_1'|)\bar{\varphi}_x + (y_1')_*\sigma(|y_1'|)\bar{\varphi}_y)\,d\tau\right)ds,$$

откуда $|y_1'| \le \varepsilon\exp(3\varepsilon)|t-t_0| \le |t-t_0|$ $\forall t\in I$, поэтому $H_1 \le y_1(t) \le H_1+1$ $\forall t\in I$. И аналогично

$$x_1' = -\int\limits_{t_1}^{t} ((y_1')_*)^2\bar\varphi_x \exp\biggl(\int\limits_{s}^{t} ((x_1')_*\sigma(|x_1'|)\bar\varphi_x + 2(y_1')_*\bar\varphi_y)\sigma(|x_1'|)\,d\tau\biggr)\,ds,$$

откуда $|x_1'| \le \varepsilon\exp(3\varepsilon)|t-t_1| \le |t-t_1|$ $\forall t\in I$. Поэтому $h < x_1(t) < h+1$ $\forall t\in I$. При выполнении этих оценок уравнения (14), (15) совпадают с уравнениями (2), (3) и поэтому $x_1(t)=x(t)$, $y_1(t)=y(t)$ $\forall t\in I$, откуда следует, что $y_1(0) > H_1 > 0$. Но это противоречит условию $y(0)=0$. Следовательно, $y(t) < H_1+1/2$ $\forall t\in I$.

Пусть H_* постоянная, которая получается, если в (10) вместо a подставлен $\max(|a|,|b|)$. Обозначим $m=\max(H_*+1/2, H_1+1/2, \max(|a|,|b|))$. Тогда имеем $|x(t)|\le m$, $|y(t)|\le m$ $\forall t\in I$. После этого доказательство теоремы 4 заканчивается точно так же, как и теоремы 3.

Замечание. В теореме 4 требуется, чтобы $\varphi_x\to 0$, $\varphi_y\to 0$ при $x^2+y^2\to\infty$. Это требование является существенным.

Приведем пример. Пусть $\varphi_x\equiv 0$, $\varphi_y = q > 0$ $(q\in R)$ $\forall (x,y)\in R^2$, так что функция v в (1) имеет вид $v=\exp(qy)$. Тогда решение задачи Коши $x(0)=y(0)=0$, $x'(0)=x_0'$, $y'(0)=y_0'$ для системы (2), (3) имеет вид $x(t)\equiv 0$, $y=-q^{-1}\ln|1-qy_0't|$, если $x_0'=0$. Если $x_0'\ne 0$, $1-qy_0't>0$, то решение имеет вид

$$x = q^{-1}\operatorname{arctg}((1-qy_0't)^{-1}qx_0't), \quad y=-(2q)^{-1}\ln(q^2x_0'^2t^2+(1-qy_0't)^2).$$

Пусть $1-qy_0't=0$, тогда в формуле для x полагаем $t\to(qy_0')^{-1}$. Соответственно имеем $x(t)=(2q)^{-1}\pi$. Если же $1-qy_0't<0$, то для $x(t)$ имеем формулу

$$x(t) = q^{-1}\pi - q^{-1}\operatorname{arctg}[(qy_0't-1)^{-1}qx_0't], \quad t>(qy_0')^{-1}.$$

Во всех случаях решение задачи $x(0)=y(0)=0$, $x(1)=a_1$, $y(1)=b_1$ существует и единственно, если $|a_1|<q^{-1}\pi$, $b_1\in R$. Если же $|a_1|\ge q^{-1}\pi$, то решение не существует. Исключая из уравнений параметр t, найдем уравнение экстремали в плоскости (x,y)

$$y(x) = q^{-1}\ln|\cos qx + y_x'(0)\sin qx| \quad (y_x'(0)=(x_0')^{-1}y_0').$$

Отсюда следует, что если в оптически прозрачной среде, распространение света в которой подчиняется закону $v=\exp(qy)$, в начале координат помещен источник света, то он будет виден только в полосе $|x|<q^{-1}\pi$, $|y|<\infty$.

Далее рассмотрим частный случай задачи (2)–(4), когда $\varphi(x,y)=f(x^2+y^2)$. Тогда $\varphi_x = f'(x^2+y^2)\cdot 2x$ и $\varphi_y=f'(x^2+y^2)\cdot 2y$, так что если $f'>0$, то φ_x и φ_y меняют свои знаки.

Система (2), (3) примет вид

$$x'' = (2xx'^2+4yx'y'-2xy'^2)f', \quad y''=(-2yx'^2+4xx'y'+2yy'^2)f'.$$

Полагая $x=r\cos\psi$, $y=r\sin\psi$, $r=r(t)$, $\psi=\psi(t)$, получим уравнения

$$r'' = 2f'(r^2)rr'^2 + \psi'^2[1-2r^2f'(r^2)], \tag{17}$$

$$\psi'' = -(2\psi'r'/r)[1-2r^2f'(r^2)]. \tag{18}$$

Пусть функция f такова, что $f'>0$ и $r=r_0>0$ есть корень уравнения $1-2r^2f'(r^2)=0$. Тогда функции $x=r_0\cos\omega t$, $y=r_0\sin\omega t$ будут решениями системы (17), (18). Если в качестве краевых условий взять $x(0)=r_0$, $y(0)=0$, $x(1)=r_0$, $y(1)=0$, то такая краевая задача будет иметь бесконечное множество решений $x=r_0\cos 2k\pi t$, $y=r_0\sin 2k\pi t$ $(k=1,2,\ldots)$, $t\in I$. Очевидно, что $x^2(t)+y^2(t)=r_0^2$, но $x'^2(t)+y'^2(t)=r_0^2\cdot 4k^2\pi^2$ и априорной оценки первой производной не существует.

Далее рассмотрим случай, когда в (4) $a_0 \neq 0$, $a_1 \neq 0$ и $b_0(a_0)^{-1} = b_1(a_1)^{-1}$. Тогда, полагая $\psi = \mathrm{arctg}(b_1 a_1^{-1})$, так что $\psi' = \psi'' \equiv 0$, получим из (17) $r'' = 2rr'^2 f'(r^2)$, $r(0) = \sqrt{a_0^2 + b_0^2} = r_0^2$, $r(1) = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = r_1^2$.

Очевидно, что $\alpha(t) = \min(r_0, r_1)$ – нижняя функция нашей задачи и $\beta(t) = \max(r_0, r_1)$ – верхняя функция, поэтому решение задачи существует. Более того, из предложения работы [6] следует, что это решение единственно.

Пусть $F(x,u) \in C(R^2)$ и решение $u(x)$ задачи Коши $u' = F(x,u)$, $u(x_0) = u_0$ единственно $\forall (x_0, u_0) \in R^2$. Тогда решение краевой задачи $u'' = F(u,u')u'$, $u(0) = A$, $u(\tau) = B$ единственно для любых $A, B, \tau \in R$. При этом требование единственности решения задачи Коши является существенным (см. [6]).

В заключение рассмотрим пример, когда функция φ разрывна. Пусть $\varphi = -2^{-1}\ln y$, $y > 0$. Тогда $\varphi_x \equiv 0$, $\varphi_y = -(2y)^{-1}$. Из уравнения (2), которое принимает вид $x'' = -y^{-1}x'y'$, следует, что $x'(t)$ сохраняет свой знак, и если $x(0) = 0$, $x(1) = a_1 > 0$, то $x'(t) > 0$ и $x'(t) < 0$, если $a_1 < 0$. Пусть $a_1 = 0$, тогда $x(t) \equiv 0$ $\forall t \in I$, и из уравнения (3) следует $y'' = -(2y)^{-1}y'^2$. Интегрируя это уравнение, находим единственное решение задачи (4) $y(t) = ((b_1^{3/2} - b_0^{3/2})t + b_0^{3/2})^{2/3}$, $b_0 > 0$, $b_1 > 0$.

Пусть теперь $a_1 > 0$, соответственно $x'(t) > 0$. Возьмем в качестве независимой переменной x, так что t будет монотонно возрастающей функцией x, $t = t(x)$. Обозначим $z(x) = y(t(x))$, тогда

$$z' = (x'(t))^{-1}y'(t), \qquad z'' = (x'^3(t))^{-1}(y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)).$$

Используя систему (2), (3), где $\varphi_x \equiv 0$, $\varphi_y = -(2y)^{-1}$, найдем уравнение $z'' = (2z)^{-1}(1 + z'^2)$, $x \geq 0$, для которого решение задачи Коши $z(0) = b_0$, $z'(0) = \gamma$ имеет вид

$$z(x) = b_0 + \gamma x + (4b_0)^{-1}x^2(1 + \gamma^2). \tag{19}$$

При фиксированном b_0 это семейство парабол (γ – параметр) имеет огибающую $z = (4b_0)^{-1}x^2$. Из (4) имеем $z(0) = b_0$, $z(a_1) = b_1$. Используя (19), находим, что если $4b_0b_1 > a_1^2$, то краевая задача имеет два решения. При этом источник света, находящийся в точке $(0, b_0)$, будет виден в точке (a_1, b_1) по двум различным направлениям. Если $4b_0b_1 = a_1^2$, решение единственно, а если $4b_0b_1 < a_1^2$, то задача решения не имеет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 4. М.; Л. 1951.
2. *Васильев Н.И., Клоков Ю.А.* Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига, 1978.
3. *Кигурадзе И.Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Тбилиси, 1975.
4. *Клоков Ю.А., Лепин Л.А.* // Латв. мат. ежегодник. 1976. Т. 19. С. 123–132.
5. *Клоков Ю.А., Лепин Л.А.* // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 12. С. 2149–2157.
6. *Клоков Ю.А.* // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6. № 2. С. 276–282.

Институт математики и информатики
Латвийского университета, г. Рига

Поступила в редакцию
15.01.2003 г.