УДК 511

А. А. Карацуба

Аналоги сумм Клоостермана

Получены нетривиальные оценки верхней грани абсолютных величин аналогов сумм Клоостермана, количество слагаемых в которых много меньше модуля.

Библиография: 6 наименований.

В теории чисел *суммами Клоостермана* называются тригонометрические суммы вида

$$S = {\sum_{x=1}^{m}}' \exp\left(2\pi i \frac{ax^* + bx}{m}\right),$$

где штрих означает суммирование по числам x, взаимно простым с m, $x^*x \equiv 1 \pmod{m}$. Если число слагаемых в S меньше, чем m, то S называется *неполной суммой Клоостермана.* Такие суммы появляются в самых разных проблемах теории чисел (см., например, [1]–[3]).

В настоящей статье изучаются аналоги S, подобные соответствующим суммам из [3], но несколько более общего вида. Из-за этого возникают свои специфические трудности, которые немного ухудшают оценки верхней грани их модуля. Однако такого вида суммы встречаются чаще и находят больше применений, чем соответствующие суммы из [3]. Отмечу, что результаты статьи могут быть несколько усилены за счет более тонких и более громоздких вычислений.

Выражаю глубокую благодарность Г. И. Архипову за полезную дискуссию и оригинальную идею использовать при доказательстве леммы введенную им функцию $\alpha_k(n)$.

Обозначения. Употребляются стандартные математические обозначения: символом (a, b) при целых a и b обозначаем наибольший общий делитель a и b; символом $[x_1, \dots, x_k]$ при целых положительных $x_1, \dots, x_k$ обозначаем наименьшее общее кратное $x_1, \dots, x_k$; при натуральном числе $m > 1$ и целом x, взаимно простом с m, символом x^* обозначаем натуральное число, не превосходящее m и такое, что $xx^* \equiv 1 \pmod{m}$; постоянные в знаках O абсолютные.

Лемма. *Пусть J_k – количество решений следующего сравнения*:

$$\begin{gathered} x_1 \dots x_k \equiv 0 \pmod{[x_1^2, \dots, x_k^2]}, \\ 0 < x_j \leqslant X_j, \quad X_j \geqslant 3, \quad j = 1, \dots, k. \end{gathered} \tag{1}$$

Тогда для J_k справедлива оценка

$$J_k \leqslant (2k^8)^{k^3} \sqrt{X} (\log X)^{k^2}, \tag{2}$$

где $X = X_1 \dots X_k$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 94-01-00002).

Доказательство. Введем в рассмотрение предложенную Г. И. Архиповым функцию $\alpha_k(n)$. По определению $\alpha_k(n)$ при натуральном числе n равняется количеству решений системы

$$\begin{cases} n = x_1 \dots x_k \\ n \equiv 0 \pmod{[x_1^2, \dots, x_k^2]}. \end{cases} \tag{3}$$

Тогда очевидно, что выполняется неравенство

$$J_k \leqslant \sum_{n \leqslant X} \alpha_k(n), \quad X = X_1 \dots X_k. \tag{4}$$

Из определения $\alpha_k(n)$ имеем

$$0 \leqslant \alpha_k(n) \leqslant \tau_k(n). \tag{5}$$

Докажем, прежде всего, что функция $\alpha_k(n)$ мультипликативная, т.е. при $(n,m) = 1$

$$\alpha_k(nm) = \alpha_k(n)\alpha_k(m).$$

Действительно, пусть $(n,m) = 1$, выполняется (3) и, кроме того,

$$\begin{cases} m = y_1 \dots y_k \\ m \equiv 0 \pmod{[y_1^2, \dots, y_k^2]}. \end{cases} \tag{6}$$

Каждой паре наборов $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$ и $\bar{y} = (y_1, \dots, y_k)$, удовлетворяющих соответственно (3) и (6), отвечает набор $\bar{z} = (z_1, \dots, z_k)$, $z_j = x_j y_j$, $j = 1, \dots, k$, такой, что

$$\begin{cases} mn = z_1 \dots z_k \\ mn \equiv 0 \pmod{[z_1^2, \dots, z_k^2]}, \end{cases} \tag{7}$$

так как $[x_1^2 y_1^2, \dots, x_k^2 y_k^2] = [x_1^2, \dots, x_k^2][y_1^2, \dots, y_k^2]$ в силу того, что $(x_1 \dots x_k, y_1 \dots y_k) = 1$. Разным парам $(\bar{x}, \bar{y})$ и $(\bar{x}', \bar{y}')$ отвечают разные $\bar{z}$ и $\bar{z}'$. Действительно, в противном случае имеем

$$x_j y_j = x_j' y_j', \quad j = 1, \dots, k.$$

Так как $(y_j, x_j') = (x_j, y_j') = 1$, то

$$x_j \equiv 0 \pmod{x_j'}, \quad x_j' \equiv 0 \pmod{x_j},$$

т.е. $x_j = x_j'$, $y_j = y_j'$, $j = 1, \dots, k$, а значит, $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}', \bar{y}')$. С другой стороны, если $\bar{z} = (z_1, \dots, z_k)$ удовлетворяет (7), то, определяя x_j, y_j равенствами $x_j = (n, z_j)$, $y_j = (m, z_j)$, находим

$$x_j y_j = z_j.$$

Следовательно, $\bar{z}$ отвечает пара $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_k)$, $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_k)$, удовлетворяющая соответственно (3) и (6). Тем самым, $\alpha_k(nm) = \alpha_k(n)\alpha_k(m)$. Поэтому если $n = p_1^{\beta_1} \ldots p_s^{\beta_s}$ – каноническое разложение n на простые сомножители, то

$$\alpha_k(n) = \alpha_k(p_1^{\beta_1}) \ldots \alpha_k(p_s^{\beta_s}).$$

Из определения $\alpha_k(n)$ легко видеть, что $\alpha_k(p) = 0$, p – простое число, т.е. в сумме (4) останутся слагаемые, для которых n имеет вид

$$n = p_1^{\beta_1} \ldots p_s^{\beta_s}, \quad \beta_1 \geqslant 2, \ldots, \beta_s \geqslant 2.$$

Разбивая сомножители n на две группы: с четными и нечетными β_j, получаем (после переобозначения сомножителей)

$$n = p_1^{\beta_1} \ldots p_t^{\beta_t} p_{t+1}^{\beta_{t+1}} \ldots p_s^{\beta_s},$$

где β_j – четные числа, если $j \leqslant t$, и β_j – нечетные числа, если $j > t$. Следовательно,

$$n = p_1^{\beta_1} \ldots p_t^{\beta_t} p_{t+1}^{\beta_{t+1}-3} \ldots p_s^{\beta_s - 3} p_{t+1}^3 \ldots p_s^3 = m^2 r^3.$$

Тем самым, из (4) и (5) приходим к неравенству

$$J_k \leqslant \sum_{m^2 r^3 \leqslant X} \alpha_k(m^2 r^3) \leqslant \sum_{m^2 r^3 \leqslant X} \tau_k(m^2 r^3).$$

Так как $\tau_k(ab) \leqslant \tau_k(a)\tau_k(b)$, то

$$J_k \leqslant \sum_{r \leqslant \sqrt[3]{X}} \tau_k^3(r) \sum_{m \leqslant \sqrt{X r^{-3}}} \tau_k^2(m).$$

Для оценки последней двойной суммы воспользуемся неравенством К..К. Марджанишвили [4]:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \tau_k^l(n) < A_k^{(l)} (\log N + k^l - 1)^{k^l - 1}, \quad A_k^{(l)} = k^l (k!)^{-\frac{k^l - 1}{k-1}}.$$

Имеем

$$\sum_{m \leqslant \sqrt{X r^{-3}}} \tau_k^2(m) < k^2 (k!)^{-(k+1)} \sqrt{X r^{-3}} \big(\log \sqrt{X r^{-3}} + k^2 - 1\big)^{k^2 - 1}$$
$$< k^{2k^2} \sqrt{X} (\log X)^{k^2} r^{-3/2},$$

$$\sum_{r \leqslant \sqrt[3]{X}} \tau_k^3(r) r^{-3/2} < 3k^3 + \sum_{3 < r \leqslant \sqrt[3]{X}} \tau_k^3(r) r^{-3/2}$$
$$= 3k^3 + \frac{3}{2} \int_3^{\sqrt[3]{X}} \mathbb{C}(u) u^{-5/2}\, du + \mathbb{C}(\sqrt[3]{X}) X^{-3/2},$$

где

$$\mathbb{C}(u) = \sum_{3<r\leqslant u} \tau_k^3(r) < u(\log u + k^3 - 1)^{k^3-1} < k^{3k^3} u(\log u)^{k^3-1},$$

$$\int_1^{\sqrt[3]{X}} u^{-3/2}(\log u)^{k^3-1}\,du < \int_1^{+\infty} u^{-1/2}(\log u)^{k^3-1}\,d\log u$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{-v/2}v^{k^3-1}\,dv < 2^{k^3}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{k^3}\,dt = 2k^3(k^3)!$$

Тем самым, для J_k получаем

$$J_k < (2k^8)^{k^3}\sqrt{X}(\log X)^{k^2},$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Методом комплексного интегрирования можно получить асимптотическую формулу для суммы

$$\Gamma_k(X) = \sum_{n\leqslant X} \alpha_k(n),$$

подобную формуле для $T_k(X)$ из [5].

Теорема 1. *Пусть $m > 1$ – целое число, k – натуральное число, X, X_1 таковы, что*

$$X \geqslant 3, \quad k < X < X_1 \leqslant 2X, \quad k2^{2k-1}X^{2k-1} < m.$$

Рассмотрим сравнение

$$x_1^* + \dots + x_k^* \equiv x_{k+1}^* + \dots + x_{2k}^* \pmod m, \tag{8}$$

где $X < x_j \leqslant X_1$, $(x_j, m) = 1$, $j = 1, \dots, 2k$.

Тогда для количества $I = I_k(X)$ его решений справедлива оценка:

$$I \leqslant (2k)^{80k^3} X^k (\log X)^{4k^2}.$$

Доказательство. Будем считать $k \geqslant 2$, так как при $k = 1$ утверждение теоремы тривиально. Пусть набор $(x_1, \dots, x_{2k})$ удовлетворяет (8). Умножая обе части (8) на произведение $x_1 \dots x_{2k}$ и пользуясь тем, что $x_j x_j^* \equiv 1 \pmod m$, получим

$$y_1 + \dots + y_k \equiv y_{k+1} + \dots + y_{2k} \pmod m, \tag{9}$$

где $y_j x_j = x_1 \dots x_{2k}$, $j = 1, \dots, 2k$. Из условий на x_j имеем

$$0 < y_j \leqslant X_1^{2k-1} \leqslant 2^{2k-1}X^{2k-1},$$

т.е. левая и правая части сравнения (9) положительны и не превосходят

$$k2^{2k-1}X^{2k-1} < m.$$

Таким образом, сравнение (9) является равенством, т.е.

$$y_1 + \cdots + y_k = y_{k+1} + \cdots + y_{2k}. \tag{10}$$

Из определения величин y_j следует, что каждое y_ν, $\nu \neq j$, делится на x_j. Поэтому в силу равенства (10) на x_j делится также y_j, т.е.

$$y_j \equiv 0 \pmod{x_j}, \quad j = 1, \ldots, 2k. \tag{11}$$

Умножая обе части сравнения (11) и его модуль на x_j, находим

$$x_1 \ldots x_{2k} \equiv 0 \pmod{x_j^2}, \quad j = 1, \ldots, 2k,$$

т.е.

$$x_1 \ldots x_{2k} \equiv 0 \pmod{[x_1^2, \ldots, x_{2k}^2]}. \tag{12}$$

Итак, каждый набор $(x_1, \ldots, x_{2k})$, удовлетворяющий (8), удовлетворяет (12), т.е.

$$I \leqslant J_{2k},$$

где J_{2k} – количество решений сравнения (1) леммы с очевидными заменами соответствующих параметров. Пользуясь оценкой леммы, получаем утверждение теоремы:

$$I \leqslant \left(2(2k)^8\right)^{8k^3} 2^k X^k (\log 2X)^{4k^2} < (2k)^{80k^3} X^k (\log X)^{4k^2}.$$

Теорема 2. *Пусть $m > 1$ – целое число, k и s – натуральные числа, вещественные числа X, X_1, Y, Y_1 удовлетворяют неравенствам*

$$\begin{aligned} &3 \leqslant X, \quad k < X < X_1 \leqslant 2X, \quad k2^{2k-1}X^{2k-1} < m; \\ &3 \leqslant Y, \quad s < Y < Y_1 \leqslant 2Y, \quad s2^{2s-1}Y^{2s-1} < m; \end{aligned}$$

a и b – целые числа, причем $(a, m) = d \geqslant 1$. Обозначим через A множество натуральных чисел n вида $n = xy$, где $X < x \leqslant X_1$, $Y < y \leqslant Y_1$, $(xy, m) = 1$. Тогда для тригонометрической суммы

$$S = \sum_{n \in A} \exp\left(2\pi i \frac{an^* + bn}{m}\right)$$

справедлива следующая оценка:

$$|S| \leqslant XY\Delta, \tag{13}$$

где

$$\Delta = (2s)^{40s^2/k} (2k)^{40k^2/s} (smdY)^{1/(2ks)} (\log Y)^{2s/k} (\log X)^{2k/s} X^{-1/(2s)} Y^{-1/(2k)}.$$

Доказательство. Будем следовать доказательству теоремы 3 из [3]. Пользуясь неравенством Гёльдера, получаем

$$
\begin{aligned}
|S|^s &\leqslant X^{s-1} \sum_{X<x\leqslant X_1} \left| \sum_{Y<y\leqslant Y_1} \exp\left(2\pi i \frac{ax^*y^* + bxy}{m}\right)\right|^s \\
&= X^{s-1} \sum_{X<x\leqslant X_1} \left| \sum_{\lambda=1}^{m} \sum_{sY<\mu\leqslant sY_1} J_s(\lambda,\mu) \exp\left(2\pi i \frac{ax^*\lambda + bx\mu}{m}\right)\right|, \qquad (14)
\end{aligned}
$$

где $J_s(\lambda,\mu)$ – количество решений системы сравнений вида

$$
\begin{cases} y_1^* + \dots + y_s^* \equiv \lambda \pmod m \\ y_1 + \dots + y_s \equiv \mu \pmod m, \end{cases}
$$

$$
Y < y_j \leqslant Y_1, \quad (y_j, m) = 1, \quad j = 1, \dots, s.
$$

Пусть $\theta(x)$ – аргумент двойной суммы, стоящей под знаком модуля в правой части (14). Тогда из (14) получаем

$$
|S|^s \leqslant X^{s-1} \sum_{\lambda=1}^{m} \sum_{sY<\mu\leqslant sY_1} J_s(\lambda,\mu) \left| \sum_{X<x\leqslant X_1} e^{-i\theta(x)} \exp\left(2\pi i \frac{a\lambda x^* + b\mu x}{m}\right)\right|. \qquad (15)
$$

Возводя обе части (15) в степень k и опять пользуясь неравенством Гёльдера, получим

$$
\begin{aligned}
|S|^{sk} &\leqslant X^{k(s-1)} \left(\sum_{\lambda=1}^{m} \sum_{\mu} J_s(\lambda,\mu) \right)^{k-1} \\
&\quad \times \sum_{\lambda=1}^{m} \sum_{\mu} J_s(\lambda,\mu) \left| \sum_{X<x\leqslant X_1} e^{-i\theta(x)} \exp\left(2\pi i \frac{a\lambda x^* + b\mu x}{m}\right)\right|^k.
\end{aligned}
$$

Наконец, к последней сумме по λ и μ в правой части последнего неравенства применим неравенство Коши; находим

$$
|S|^{sk} \leqslant X^{k(s-1)} M_1^{k-1} M_2^{1/2} M_3^{1/2}, \qquad (16)
$$

где

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \sum_{\lambda=1}^{m} \sum_{sY<\mu\leqslant sY_1} J_s(\lambda,\mu), \\
M_2 &= \sum_{\lambda=1}^{m} \sum_{sY<\mu\leqslant sY_1} J_s^2(\lambda,\mu), \\
M_3 &= \sum_{\lambda=1}^{m} \sum_{sY<\mu\leqslant sY_1} \left| \sum_{X<x\leqslant X_1} e^{-i\theta(x)} \exp\left(2\pi i \frac{a\lambda x^* + b\mu x}{m}\right)\right|^{2k}.
\end{aligned}
$$

Каждую из введенных величин M_j, $j = 1, 2, 3$, легко оценить сверху. Величина M_1 не превосходит количества всевозможных наборов $(y_1, \ldots, y_s)$, т.е. $M_1 \leqslant Y^s$. Величина M_2 равняется I – количеству решений следующей системы сравнений:

$$\begin{cases} y_1^* + \cdots + y_s^* \equiv y_{s+1}^* + \cdots + y_{2s}^* \pmod m \\ y_1 + \cdots + y_s \equiv y_{s+1} + \cdots + y_{2s} \pmod m, \end{cases}$$
$$Y < y_j \leqslant Y_1, \quad (y_j, m) = 1, \quad j = 1, \ldots, 2s.$$

Очевидно, что

$$I \leqslant I_s(Y),$$

где $I_s(Y)$ – количество решений сравнения (8) теоремы 1, в которой следует заменить k на s и X, X_1 на Y, Y_1. Следовательно,

$$M_2 \leqslant (2s)^{80s^3} Y^s (\log Y)^{4s^2}.$$

Наконец, для M_3 последовательно находим

$$\begin{aligned} M_3 &= \sum_{\lambda=1}^{m} \sum_{sY < \mu \leqslant sY_1} \sum_{X < x_1, \ldots, x_{2k} \leqslant X_1} e^{-i(\theta(x_1) + \ldots - \theta(x_{2k}))} \\ &\quad \times \exp\left(2\pi i \frac{a\lambda(x_1^* + \ldots - x_{2k}^*) + b\mu(x_1 + \ldots - x_{2k})}{m}\right) \\ &\leqslant \sum_{X < x_1, \ldots, x_{2k} \leqslant X_1} \left| \sum_{\lambda=1}^{m} \sum_{sY < \mu \leqslant sY_1} \exp\left(2\pi i \frac{a\lambda(x_1^* + \ldots - x_{2k}^*)}{m}\right) \right. \\ &\quad \left. \times \exp\left(2\pi i \frac{b\mu(x_1 + \ldots - x_{2k})}{m}\right) \right| \\ &= \sum_{u=1}^{m} \sum_{|v| < kX} I_k(u, v) \left| \sum_{\lambda=1}^{m} \sum_{sY < \mu \leqslant sY_1} \exp\left(2\pi i \frac{a\lambda u + b\mu v}{m}\right) \right|, \end{aligned}$$

где $I_k(u, v)$ – число решений следующей системы сравнений:

$$\begin{cases} x_1^* + \ldots - x_{2k}^* \equiv u \pmod m \\ x_1 + \ldots - x_{2k} \equiv v \pmod m, \end{cases}$$
$$X < x_j \leqslant X_1, \quad (x_j, m) = 1, \quad j = 1, \ldots, 2k.$$

Очевидно, что выполняется неравенство

$$\sum_{|v| < kX} I_k(u, v) \leqslant I_k(X),$$

где $I_k(X)$ – количество решений сравнения (8) теоремы 1. Следовательно,

$$M_3 \leqslant \sum_{u=1}^{m} \sum_{|v|<kX} I_k(u,v) \left| \sum_{\lambda=1}^{m} \sum_{sY<\mu\leqslant sY_1} \exp\left(2\pi i \frac{a\lambda u + b\mu v}{m}\right) \right|$$
$$\leqslant \sum_{u=1}^{m} \sum_{|v|<kX} I_k(u,v) \sum_{sY<\mu\leqslant sY_1} \left| \sum_{\lambda=1}^{m} \exp\left(2\pi i \frac{a\lambda u}{m}\right) \right|$$
$$\leqslant I_k(X) sY \sum_{u=1}^{m} \sum_{\lambda=1}^{m} \exp\left(2\pi i \frac{a\lambda u}{m}\right) = sYmdI_k(X)$$
$$\leqslant smdY(2k)^{80k^3} X^k (\log X)^{4k^2}.$$

Подставляя найденные для M_1, M_2, M_3 оценки в (16), получаем утверждение теоремы:

$$|S|^{sk} \leqslant X^{k(s-1)} Y^{(k-1)s} (2s)^{40s^3} Y^{s/2} (\log Y)^{2s^2} (2k)^{40k^3} X^{k/2} (\log X)^{2k^2} \sqrt{smdY};$$
$$|S| \leqslant XY\Delta,$$

где

$$\Delta = (2s)^{40s^2/k} (2k)^{40k^2/s} (smdY)^{1/(2ks)} (\log Y)^{2s/k} (\log X)^{2k/s} X^{-1/(2s)} Y^{-1/(2k)}.$$

Оценка (13) теоремы 2 может быть с успехом использована в самых разных задачах, связанных с аналогами неполных сумм Клоостермана. Рассмотрим только одну из них. Пусть $m \geqslant m_1 > 1$, $(a,m) = 1$, b – целое число, $a_1 > 10$,

$$\exp\bigl(a_1 \log^{3/4} m \log^{1/4} \log m\bigr) \leqslant N \leqslant m^{4/7}.$$

Определим натуральное число k из неравенств

$$m^{\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{4k-1}} \leqslant N < m^{\frac{1}{2k-3} + \frac{1}{4k-5}}.$$

Из условий на N следует, что $k \geqslant 2$. Возьмем

$$X = \frac{1}{4} m^{\frac{1}{2k-1}}, \quad Y = \frac{1}{4} m^{\frac{1}{4k-1}}, \quad X_1 = 2X, \quad Y_1 = 2Y, \quad Z = Nm^{-\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-1}}$$

и рассмотрим множество A натуральных чисел n вида $n = xyz$, где $X < x \leqslant 2X$, $Y < y \leqslant 2Y$, $z \leqslant Z$, $(xyz, m) = 1$. Количество элементов множества A обозначим символом $\|A\|$. Очевидно, что $\|A\| \leqslant N$, и для $n \in A$ выполняется неравенство $n \leqslant N$.

Теорема 3. *Пусть $0 \leqslant \alpha < \beta < 1$ и $K = K(\alpha,\beta)$ – количество решений системы неравенств*

$$\alpha \leqslant \left\{ \frac{an^* + bn}{m} \right\} < \beta, \quad n \in A.$$

Тогда для K справедлива следующая асимптотическая формула:

$$K = (\beta - \alpha)\|A\| + O(R),$$

где

$$R = (4k)^{180k} N^{1 - \frac{1}{320k^2}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $r = 2[\log N]$, $\Delta_1 = m^{-\frac{1}{30k}}$ и будем считать, что $\Delta_1 < 1/16, 2\Delta_1 \leqslant \beta - \alpha < 1 - 2\Delta_1$. При заданных r, α, β определим "стаканчик" Виноградова $\psi(x)$ следующим образом (см., например, [6, с. 22]):

1) $\psi(x+1) = \psi(x)$;

2) $\psi(x) = 1$ при $\alpha + \Delta_1 \leqslant x \leqslant \beta - \Delta_1$;

3) $0 < \psi(x) < 1$ при $\alpha - \Delta_1 < x < \alpha + \Delta_1, \beta - \Delta_1 < x < \beta + \Delta_1$;

4) $\psi(x) = 0$ при $\beta + \Delta_1 \leqslant x \leqslant 1 + \alpha - \Delta_1$;

5) $\psi(x) = \beta - \alpha + \sum\limits_{|f|>0} g(f)e^{2\pi i f x}$,

где

$$|g(f)| \leqslant \min\left(\beta - \alpha, \frac{1}{|f|}, \frac{1}{|f|}\left(\frac{r}{|f|\Delta_1}\right)\right)^r = c(f).$$

Обозначим символом $U(\alpha, \beta)$ следующую сумму:

$$U(\alpha, \beta) = \sum_{n\in A} \psi\left(\frac{an^* + bn}{m}\right).$$

Тогда для величины $K = K(\alpha, \beta)$ имеют место неравенства

$$U\left(\alpha + \frac{\Delta_1}{2}, \beta - \frac{\Delta_1}{2}\right) \leqslant K = K(\alpha, \beta) \leqslant U\left(\alpha - \frac{\Delta_1}{2}, \beta + \frac{\Delta_1}{2}\right).$$

Из определения $U(\alpha, \beta)$ получаем

$$U\left(\alpha + \frac{\Delta_1}{2}, \beta - \frac{\Delta_1}{2}\right) = \big((\beta - \alpha) - \Delta_1\big)||A|| + O(R_1),$$

$$U\left(\alpha - \frac{\Delta_1}{2}, \beta + \frac{\Delta_1}{2}\right) = \big((\beta - \alpha) + \Delta_1\big)||A|| + O(R_1),$$

где

$$R_1 = \sum_{f=1}^{\infty} c(f)\left|\sum_{n\in A} \exp\left(2\pi i f\frac{an^* + bn}{m}\right)\right|.$$

Сумму по f разобьем на две:

$$R_1 = R_2 + R_3,$$

где

$$R_2 = \sum_{f\leqslant m^{1/(32k)}}, \quad R_3 = \sum_{f>m^{1/(32k)}}.$$

Так как при $f \leqslant m^{1/(32k)}$ имеем

$$(af, m) \leqslant f \leqslant m^{1/(32k)},$$

то, применяя к сумме по n оценку теоремы 2, в которой следует положить $s = 2k$, найдем

$$\left|\sum_{n\in A} \exp\left(2\pi i f\frac{an^* + bn}{m}\right)\right| \leqslant XYZ\Delta,$$

где

$$\Delta = (4k)^{160k}(2k)^{20k}(2km^{1+\frac{1}{32k}}Y)^{\frac{1}{4k^2}}(\log Y)^4(\log X)X^{-\frac{1}{4k}}Y^{-\frac{1}{2k}}.$$

Следовательно,

$$R_2 \leqslant \sum_{0<f\leqslant m^{1/(32k)}} \frac{1}{f}N\Delta < (4k)^{180k}Nm^{-\frac{1}{64k^3}} < (4k)^{180k}N^{1-\frac{1}{320k^2}}.$$

Сумма R_3 оценивается тривиально:

$$R_3 \leqslant \sum_{f>m^{1/(32k)}} \frac{1}{f}\left(\frac{r}{f\Delta_1}\right)^r N \leqslant N^{-1}.$$

Тем самым, для $K = K(\alpha,\beta)$ при $2\Delta_1 \leqslant \beta-\alpha < 1-2\Delta_1$ получаем асимптотическую формулу

$$K = K(\alpha,\beta) = (\beta-\alpha)\|A\| + O(R). \tag{17}$$

Если же $0 < \beta - \alpha < 2\Delta_1$, то

$$K(\alpha,\beta) = K(\alpha,\alpha+1-2\Delta_1) - K(\beta,\alpha+1-2\Delta_1);$$

если $1-2\Delta_1 \leqslant \beta-\alpha < 1$, то

$$K(\alpha,\beta) = K\big(\alpha,\alpha+\tfrac{1}{2}\big) + K\big(\alpha+\tfrac{1}{2},\beta\big).$$

Поэтому из (17) и последних формул получаем соотношение (17), но уже при любых $0 < \beta-\alpha \leqslant 1$. Теорема доказана.

На основе теоремы 3 стандартно доказывается

ТЕОРЕМА 4. *Справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$\sum_{n\in A}\left\{\frac{an^*+bn}{m}\right\} = \frac{1}{2}\|A\| + O(R),$$

где $R = (4k)^{180k}N^{1-\frac{1}{320k^2}}$.

Список литературы

1. *Хооли К.* Применения методов решета в теории чисел. М.: Наука, 1987.
2. *Карацуба А. А.* Распределение обратных величин в кольце вычетов по заданному модулю // Докл. РАН. 1993. Т. 333. №2. С. 138–139.
3. *Карацуба А. А.* Дробные доли специального вида функций // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. №4. С. 61–80.
4. *Марджанишвили К. К.* Оценка одной арифметической суммы // Докл. АН СССР. 1939. Т. 22. №7. С. 391–393.
5. *Карацуба А. А.* Равномерная оценка остаточного члена в проблеме делителей Дирихле // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36. №3. С. 475–483.
6. *Виноградов И. М.* Метод тригонометрических сумм в теории чисел. 2-е изд. М.: Наука, 1980.

Поступило в редакцию
31.I.1995