УДК 517:513.88:530.145.6

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ МЕДЛЕННОГО РОСТА

В. С. Владимиров

Основы общей теории преобразования Лапласа обобщенных функций многих переменных заложены Л. Шварцем [11] и Лионсом [8]. Однако для приложений в математической физике необходима теория преобразования Лапласа обобщенных функций специальных классов. Здесь мы излагаем основы теории преобразования Лапласа обобщенных функций медленного роста.

1. Обозначения и определения. Обозначаем через $z=(z_1, \ldots, z_n)=x+iy$, $\zeta, \ldots$ — точки n-мерного комплексного пространства $\mathbf{C}^n$, $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $y, \xi, \ldots$ — точки n-мерного вещественного пространства $\mathbf{R}^n$; $(z, \xi)=z_1\xi_1+\ldots+z_n\xi_n$ — скалярное произведение; $|z|=\sqrt{|x|^2+|y|^2}$, $|x|, \ldots$ — евклидову длину $z, x, \ldots$.

Пусть B — множество в $\mathbf{R}^n$. Трубчатое множество в $\mathbf{C}^n$ вида $\mathbf{R}^n+iB$ будем обозначать T^B.

Пусть C — конус в $\mathbf{R}^n$ с вершиной в 0. Обозначим через $\operatorname{pr} C$ пересечение C с единичной сферой.

Конус

$$C^*=[\xi:(y, \xi)\geqslant 0, \forall y\in C]$$

называется сопряженным к конусу C.

Очевидно, C^* — замкнутый выпуклый конус с вершиной в 0 и $(\operatorname{ch} C)^*=C^*$, $\operatorname{int} C^{**}=\operatorname{ch} C$; здесь $\operatorname{ch} C$ — выпуклая оболочка C. Конус C' (с вершиной в 0) называется компактным в конусе C, если $\operatorname{pr}\overline{C'}\subset\operatorname{pr} C$; при этом пишем: $C'\Subset C$. Обозначим

$$d(y)=\inf_{\sigma\in\operatorname{pr} C^*}(y, \sigma)$$

расстояние от точки $y\in C$ до границы конуса C.

Пусть C — связный открытый конус с вершиной в 0. Обозначим через $H(C)$ алгебру, состоящую из всех функций $f(z)$, голоморфных в T^C — трубчатой радиальной области над кону-

сом C — и удовлетворяющих следующему условию роста: для любого конуса $C' \Subset C$ существует число $K(C')$ такое, что справедливо неравенство

$$|f(z)| \leqslant K(C')(1+|z|^2)^{\frac{\alpha}{2}}|y|^{-\beta}, \quad z \in T^{C'} \tag{1.1}$$

при некоторых $\alpha \geqslant 0$ и $\beta \geqslant 0$ (зависящих только от f). Обозначим через $H_{\alpha,\beta}(C)$ совокупность функций $f(z)$, голоморфных в T^C и удовлетворяющих оценке (1.1) для любого $C' \Subset C$. Топологию в $H_{\alpha,\beta}(C)$ введем в соответствии с (1.1) с помощью счетной системы норм

$$\|f\|_l^{(\alpha,\beta)} = \sup_{z \in T^{C_l}} \frac{|f(z)|\,|y|^\beta}{(1+|z|^2)^{\alpha/2}}, \quad l = 1, 2, \ldots, \tag{1.2}$$

где $C_1, C_2, \ldots,$ — строго возрастающая последовательность конусов, исчерпывающая конус $C: C_1 \Subset C_2 \Subset \ldots, \bigcup_l C_l = C$. (Топология в $H_{\alpha,\beta}(C)$ не зависит от выбора последовательности конусов $C_1, C_2, \ldots$). Пространство $H_{\alpha,\beta}(C)$ — полное. Алгебру $H(C)$ мы наделяем топологией индуктивного предела (объединения) пространств $H_{\alpha,\beta}(C)$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ (см. [1]).

Мы будем использовать технику пространств обобщенных функций $\mathscr{D}'(\mathscr{O})$ и $\mathscr{S}'$; $\mathscr{S}'$ называется также пространством обобщенных функций медленного роста. Необходимые сведения из теории этих пространств можно найти в книге Л. Шварца [10].

Совокупность обобщенных функций из $\mathscr{S}', \ldots,$ носители которых содержатся в замкнутом множестве A, будем обозначать через $\mathscr{S}'(A), \ldots$ Топология в $\mathscr{S}'(A), \ldots$ индуцируется соответствующей топологией пространства $\mathscr{S}', \ldots$.

В дальнейшем используем такие обозначения: если $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, то $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ и

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Операция преобразования Фурье F и обратная к ней F^{-1} действуют на основные функции $\varphi(x)$ из $\mathscr{S}$ по правилам:

$$F[\varphi](\xi) = \int e^{i(x,\xi)}\varphi(x)\,dx, \quad F^{-1}[\varphi] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\varphi(-x)]$$

Пусть обобщенная функция f_σ из $\mathscr{S}'$ непрерывно зависит в $\mathscr{S}'$ от параметра σ на компакте K. Определим обобщенную функцию $\int_K f_\sigma d\sigma$ из $\mathscr{S}'$ равенством

$$\left(\int_K f_\sigma d\sigma, \varphi\right) = \int_K (f_\sigma, \varphi)\,d\sigma, \quad \varphi \in \mathscr{S}. \tag{1.3}$$

Нетрудно убедиться, что

$$F\left[\int_K f_\sigma d\sigma\right]=\int_K F[f_\sigma]\,d\sigma. \tag{1.4}$$

Наша задача — изучить алгебры $H(C)$ и $\mathscr{S}'(C^*)$ и, в частности, доказать их изоморфизм.

2. **Пространство** $\mathscr{H}_s$, $-\infty<s<\infty$. Обозначим через $\mathscr{L}_2{}^s$, $-\infty<s<\infty$, гильбертово пространство, состоящее из всех функций $g(\xi)$ с конечной нормой

$$\|g\|_{2(s)}=\left[\int|g(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s d\xi\right]^{1/2}.$$

Обозначим через $\mathscr{H}_s$ совокупность всех обобщенных функций $u(x)$, являющихся преобразованием Фурье функций из $\mathscr{L}_2{}^s$ с нормой

$$\|u\|_s=\|F[u]\|_{2(s)} \tag{2.1}$$

Очевидно, $\mathscr{H}_0=\mathscr{L}_2=\mathscr{L}_2{}^0$ и $\|\ \|=\|\ \|_0=\|\ \|_{2(0)}$; $\mathscr{H}_s$ — гильбертовы пространства, изоморфные $\mathscr{L}_2{}^s$. При этом

$$\mathscr{S}\subset\mathscr{H}_s\subset\mathscr{S}',\ \mathscr{H}_s\subset\mathscr{H}_{s'},\ s'<s,$$

где под вложениями понимаются включения вместе с соответствующей топологией. Таким образом, $\{\mathscr{H}_s,\ s>0\}$ и $\mathscr{H}_s\ s<0\}$ образуют шкалы гильбертовых пространств.

Докажем, что $\mathscr{S}$, а значит, и $\mathscr{D}=\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ плотны в $\mathscr{H}_s$.

В силу (2.1) достаточно доказать, что $\mathscr{D}$ плотно в $\mathscr{L}_2^s$. Пусть $g\in\mathscr{L}_2^s$ и $\varepsilon>0$. Тогда

$$\psi(\xi)=g(\xi)(1+|\xi|^2)^{s/2}\in\mathscr{L}_2.$$

Существует функция ψ_1 из $\mathscr{D}$ такая, что $\|\psi-\psi_1\|<\varepsilon$. Положив

$$g_1(\xi)=\psi_1(\xi)(1+|\xi|^2)^{-s/2}\in\mathscr{D},$$

получим

$$\|g-g_1\|_{2(s)}^2=\int|g(\xi)-g_1(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s d\xi=\|\psi-\psi_1\|^2<\varepsilon^2,$$

что и утверждалось.

$\mathscr{H}_s\subset C^l$, если l — целое, $l<s-\frac{n}{2}$.

Замечание. Это утверждение представляет собой простой частный случай теорем вложения Соболева.

Для доказательства заметим, что если $u\in\mathscr{H}_s$, то функция

$$\frac{\xi^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{s/2}}(1+|\xi|^2)^{s/2}F[u](\xi)$$

абсолютно интегрируема при всех $|\alpha|\leqslant l$. Следовательно, интеграл в формуле для обратного преобразования Фурье

$$u(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-i(x,\xi)}F[u](\xi)\,d\xi$$

абсолютно сходится, равно как и все интегралы, полученные из него дифференцированием по x до порядка l включительно. Это и доказывает, что $u\in C^l$.

Пусть s — целое неотрицательное число. В этом случае пространство $\mathcal{H}_s$ состоит, очевидно, из всех функций u из $\mathcal{L}_2$, у которых обобщенные производные $D^\alpha u\in\mathcal{L}_2$ при всех $|\alpha|\leqslant s$. Заметим также, что, как показывает легко проверяемое тождество,

$$\|u\|_{s+1}^2=\|u\|_s^2+\sum_{1\leqslant j\leqslant n}\|D_j u\|_s^2, \tag{2.2}$$

$\mathcal{H}_{s+1}$ состоит из таких функций u из $\mathcal{H}_s$, у которых $D_j u\in\mathcal{H}_s$, $j=1,\ldots,n$.

Определим теперь пространство, сопряженное к пространству $\mathcal{H}_s$. Поскольку $\mathfrak{S}$ плотно в $\mathcal{H}_s$, то всякая непрерывная линейная форма на $\mathcal{H}_s$ однозначно определяется своим сужением на $\mathfrak{S}$.

Предложение 2.1. Если $L(u)$ есть непрерывная линейная форма на $\mathcal{H}_s$, то для некоторой v из $\mathcal{H}_{-s}$

$$L(u)=(v,u),u\in\mathcal{S}.$$

Норма этой формы равна $\|v\|_{-s}$. Таким образом, $\mathcal{H}_{-s}$ является сопряженным к пространству $\mathcal{H}_s$.

Доказательство. По условию линейная форма

$$L_1(\chi)=L(F[\chi(\xi)(1+|\xi|^2)^{-s/2}])$$

непрерывна на $\mathcal{L}_2$ и совпадает с формой $L(u)$ при $\chi(\xi)=(1+|\xi|^2)^{s/2}F^{-1}[u]$, причем $\|L_1\|=\|L\|$. По теореме Рисса существует функция $g_1\in\mathcal{L}_2$ такая, что

$$L_1(\chi)=\int g_1(\xi)\chi(\xi)\,d\xi,\quad \|g_1\|=\|L_1\|.$$

Отсюда, вводя функцию

$$g(\xi)=g_1(\xi)(1+|\xi|^2)^{s/2}$$

и обозначая $v=F^{-1}[g]$, при всех u из $\mathcal{S}$ получаем

$$L[u]=\int g(\xi)F^{-1}[u](\xi)\,d\xi=(F^{-1}[g],u)=(v,u)$$

и, кроме того,

$$\|L\|=\|g_1\|=\|g(1+|\xi|^2)^{-s/2}\|=\|v\|_{-s},$$

что и требовалось установить.

Из определения пространства $\mathcal{H}_s$ вытекает, что всякий его элемент u однозначно представляется в виде

$$u=g*L_s,\ g\in\mathcal{L}_2, \tag{2.2}$$

причем если $u\to 0$ в $\mathcal{H}_s$, то и $g\to 0$ в $\mathcal{L}_2$. В (2.2) ядро L_s выражается формулой

$$L_s(x)=F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-s/2}];$$

при этом $L_s(x)=(1-\Delta)^{-s/2}\delta(x)$, если $\frac{s}{2}\leqslant 0$ — целое;

$$L_s(x)=\frac{2}{(2\pi)^{n/2}2^{s/4}\Gamma(s/4)}|x|^{s/4-n/2}K_{n/2-s/4}(|x|),\quad \text{если } s>n,$$

где K_ν — функция Бесселя мнимого аргумента;

$$L_s*L_\sigma=L_{s+\sigma}. \tag{2.3}$$

Замечание. Свертка (2.2) называется бесселевым потенциалом.

Действительно, в качестве требуемой функции g достаточно взять функцию

$$F^{-1}[F[u](\xi)(1+|\xi|^2)^{s/2}].$$

Единственность представления (2.2) следует из необращения в нуль функции $(1+|\xi|^2)^{s/2}$.

Пусть $u\in\mathcal{H}_s$ и $v\in\mathcal{H}_\sigma$. Определим свертку $u*v$, положив

$$u*v=F^{-1}[F[u]F[v]]. \tag{2.4}$$

Свертка $u*v$ существует в $\mathcal{S}'$ и непрерывна по совокупности аргументов u и v: если $u\to u_0$ в $\mathcal{H}_s$ и $v\to v_0$ в $\mathcal{H}_\sigma$, то $u*v\to\to u_0*v_0$ в $\mathcal{S}'$.

Аналогично, если $u\in\mathcal{H}_s$ и $F[v_1],\ldots,F[v_m]$ ограничены, то их свертка

$$u*v_1*\ldots*v_m=F^{-1}[F[u]F[v_1]\ldots F[v_m]]$$

существует в $\mathcal{H}_s$ и непрерывна по u из $\mathcal{H}_s$ в $\mathcal{H}_s$.

Если $u\in\mathcal{H}_s$ и $v\in\mathcal{H}_s$, $s\geqslant 0$, то справедлива формула

$$D^\alpha(u*v)=(D^\alpha u(x'),\ v(x-x'))=(u(x'),\ D^\alpha v(x-x')). \tag{2.5}$$

В силу (2.4) формулу (2.5) достаточно установить при $\alpha=0$. При всех φ из $\mathcal{S}$ имеем:

$$(u*v,\varphi)=(F^{-1}[F[u]F[v]],\varphi)=(F[u]F[v]),$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int\varphi(x)e^{-i(x,\xi)}dx\Big)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\varphi(x)(F[u]F[v],e^{-i(x,\xi)}),$$

так что

$$(u*v)(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\left(F[u],F[v]e^{-i(x,\xi)}\right)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}(u(x'),F[F[v]e^{-i(x,\xi)}](x'))=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\left(u(x'),\int F[v](\xi)e^{-i(x-x',\xi)}d\xi\right)=$$

$$=(u(x'),F^{-1}[F[v]](x-x'))=(u(x'),v(x-x')).$$

Обозначим $\mathcal{D}'\mathcal{L}_2$ индуктивный предел (объединение) возрастающей последовательности пространств $\mathcal{H}_s$, $s=0,1,\ldots$.

В силу предложения 2.1 $\mathcal{D}'_{\mathcal{L}_2}$ есть совокупность линейных непрерывных функционалов на счетно-нормированном пространстве $\mathcal{D}_{\mathcal{L}_2}$ — проективном пределе (пересечении) убывающей последовательности пространств $\mathcal{H}_s$, $s=0, 1, \ldots$.

Для того чтобы $u \in \mathcal{S}'$, необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в виде

$$u(x)=x^{\alpha} f(x), \quad f \in \mathcal{D}'_{\mathcal{L}_2}. \tag{2.6}$$

Достаточность очевидна, а необходимость вытекает из представления

$$F[u]=(iD)^{\alpha} g(\xi),$$

где g — непрерывная функция полиномиального роста в $\mathbf{R}^n$, т. е. $F[g] \in \mathcal{H}_s$ при некотором s. Обозначая $f=F^{-1}[g]$, получим требуемое представление (2.6).

3. Ядро $\mathcal{K}_C(z)$. Пусть C — связный открытый конус. Функция

$$\mathcal{K}_C(z)=\int_{C^*} e^{i(z, \xi)} d\xi \tag{3.1}$$

называется ядром трубчатой области T^C.

Конус C называется острым, если существует опорная плоскость к $\overline{\operatorname{ch} C}$, имеющая с $\overline{\operatorname{ch} C}$ единственную общую точку 0.

Пример 1. Конус

$$C^+=[y: y_1>0, \ldots, y_n>0]$$

острый, причем $C^{+*}=\overline{C^+}$ и $d(y)=\min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} y_j$.

Пример 2. Световой конус будущего

$$V^+=[y=(y_0, \vec{y}): y_0>|\vec{y}|]$$

острый, причем $V^{+*}=\overline{V^+}$ и $d(y)=\frac{1}{\sqrt{2}}(y_0-|\vec{y}|)$.

Предварительно докажем две леммы.

Лемма 3.1. Следующие утверждения эквивалентны:

1. Конус C — острый;
2. Конус $\overline{\operatorname{ch} C}$ не содержит целой прямой;
3. $\operatorname{int} C^* \neq \varnothing$.

Доказательство. $1 \to 2$. Если конус $\overline{\operatorname{ch} C}$ содержит целую прямую $y=y^0+te$, $-\infty<t<\infty$ ($|e|=1$), то он содержит и прямую $y=te$, $-\infty<t<\infty$. Следовательно, любая опорная плоскость к $\overline{\operatorname{ch} C}$ должна содержать эту прямую, что противоречит 1.

$2 \to 3$. Если $\operatorname{int} C^*=\varnothing$, то, поскольку C^* — выпуклый конус с вершиной в 0, то он лежит в некоторой $(n-1)$-мерной плоскости $(e, \xi)=0$ ($|e|=1$). Поэтому $\pm e \in C^{**}=\overline{\operatorname{ch} C}$. А тогда

и целая прямая $y=te$, $-\infty<t<\infty$, лежит в $\overline{\mathrm{ch}\,C}$, что противоречит 2.

$3\to 1$. Если $\mathrm{int}\,C^*\neq\varnothing$, то существует точка $\xi^0\in\mathrm{int}\,C^*$, (такая, что $(\xi^0, y)>0$ при всех $y\in\bar{C}$. Отсюда следует, что $\xi^0, y)>0$ при всех $y\in\mathrm{ch},C$ $y\neq 0$. Это и значит, что конус C острый. Лемма доказана.

Лемма 3.2. Пусть конус $C'\Subset\mathrm{ch}C$. Тогда найдется такое число $\sigma=\sigma(C')>0$, что

$$(\xi, y)\geqslant\sigma|\xi||y|,\quad y\in C',\quad \xi\in C^*. \tag{3.2}$$

Доказательство. Поскольку все точки конуса C', отличные от 0, лежат внутри области $\mathrm{ch}\,C$, то $(\xi, y)>0$ при всех $\xi\in C^*$, $y\in\mathrm{pr}\,C'$. Отсюда, а также из непрерывности и однородности формы (ξ, y) следует существование числа $\sigma>0$, при котором справедливо равенство (3.2). Лемма доказана.

Изучим теперь свойства ядра $\mathscr{K}_C(z)$. В силу леммы 3.1 ядро $\mathscr{K}_C(z)\equiv 0$, если конус C не является острым. Далее, поскольку $C^*=(\mathrm{ch}\,C)^*$, то $\mathscr{K}_C(z)=K_{\mathrm{ch}\,C}(z)$.

Поэтому без ограничения общности можно считать конус C острым и выпуклым.

Далее, в силу леммы 3.2, интеграл

$$\mathscr{K}_C(z)=\int\limits_{C^*}e^{i(x,\xi)-(y,\xi)}\,d\xi=F\left[\theta_{C^*}(\xi)\,e^{-(y,\xi)}\right] \tag{3.3}$$

сходится равномерно по z на всяком трубчатом множестве $T^{C'}$, где $C'\Subset C$, определяя тем самым функцию, голоморфную в T^C. Здесь $\theta_{C^*}(\xi)$ — характеристическая функция конуса C^*.

Покажем, что ядро $\mathscr{K}_C(z)$ представляется интегралом

$$\mathscr{K}_C(z)=i^n\Gamma(n)\int\limits_{\mathrm{pr}\,C^*}\frac{d\sigma}{(z,\sigma)^n}. \tag{3.4}$$

Действительно, так как $(y,\sigma)>0$ при всех $y\in C$, $\sigma\in\mathrm{pr}\,C^*$, то подынтегральная функция в (3.4) не обращается в нуль и, следовательно, правая часть (3.4) определяет голоморфную функцию в T^C. Поскольку ядро $\mathscr{K}_C(z)$ также голоморфная функция в T^C, то равенство (3.4) достаточно доказать на многообразии $z=iy$, $y\in C$. Но при $x=0$ формула (3.4) легко следует из (3.1):

$$K_C(iy)=\int\limits_{C^*}e^{-(y,\xi)}d\xi=\int\limits_{\mathrm{pr}\,C^*}\int\limits_0^\infty e^{-\rho(y,\xi)}\rho^{n-1}d\rho d\sigma=$$

$$=\int\limits_{\mathrm{pr}\,C^*}\frac{d\sigma}{(y,\sigma)^n}\int\limits_0^\infty e^{-u}u^{n-1}du=i^n\Gamma(n)\int\limits_{\mathrm{pr}\,C^*}\frac{d\sigma}{(i,y,\sigma)^n}.$$

Из представления (3.4) следует, что ядро $\mathscr{K}(z)$, а также и ядро $\mathscr{K}_{-C}(z)$ голоморфны в области

$$D=\mathbf{C}^n\setminus\bigcup_{\sigma\in\mathrm{pr}\,C^*}[z:(z,\sigma)=0].$$

Эти ядра удовлетворяют соотношениям

$$\mathscr{K}_{-C}(z)=(-1)^n\mathscr{K}_C(z)=\overline{\mathscr{K}_C(\bar z)}=\mathscr{K}_C(-z). \tag{3.5}$$

Нетрудно убедиться, что область D содержит трубчатые области T^C и T^{-C} и вещественные точки конусов C и $-C$.

Из представления (3.3) и из (3.5) вытекает оценка

$$|D^\alpha\mathscr{K}_C(z)|\leqslant M_\alpha d^{-n-|\alpha|}(y),\quad z\in T^C\cup T^{-C}. \tag{3.6}$$

Действительно,

$$|D^\alpha\mathscr{K}_C(z)|\leqslant C'_{n,\alpha}\int\limits_{\mathrm{pr}C^*}\frac{|\sigma^\alpha|\,d\sigma}{|(z,\sigma)|^{n+|\alpha|}}\leqslant$$

$$\leqslant C_{n,\alpha}\sup_{\sigma\in\mathrm{pr}C^*}(y,\sigma)^{-n-|\alpha|}=M_\alpha d^{-n-|\alpha|}(y).$$

Докажем оценку при всех $s\geqslant 0$

$$\|D^\alpha\mathscr{K}_C(x+iy)\|_s\leqslant K_{s,\alpha}[1+d^{-s}(y)]\,d^{-n/2-|\alpha|}(y),$$

$$y\in C\cup(-C). \tag{3.7}$$

Действительно, в силу (3.3), (3.5) и (2.1) имеем:

$$\|D^\alpha\mathscr{K}_C(x+iy)\|_s^2=(2\pi)^{2n}\int\limits_{C^*}e^{-2(y,\xi)}(1+|\xi|^2)^s|\xi^\alpha|^2\,d\xi\leqslant$$

$$\leqslant(2\pi)^{2n}\int\limits_0^\infty(1+\rho^2)^s\rho^{n-1+2|\alpha|}\int\limits_{\mathrm{pr}C^*}e^{-2\rho(y,\sigma)}d\sigma d\rho\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\omega_n}{2}(2\pi)^{2n}\int\limits_0^\infty e^{-2\rho d(y)}(1+\rho^2)^s\rho^{n-1+2|\alpha|}d\rho=$$

$$=\frac{\omega_n(2\pi)^{2n}}{2^{n+1+2|\alpha|}d^{n+2|\alpha|}(y)}\int\limits_0^\infty e^{-u}\left[1+\frac{u^2}{4d^2(y)}\right]^s u^{n-1+2|\alpha|}du\leqslant$$

$$\leqslant K^2_{s,\alpha}[1+d^{-s}(y)]^2\,d^{-n-2|\alpha|}(y);$$

здесь ω_n — площадь поверхности единичной сферы в $\mathbf{R}^n$.

Ядро $\mathscr{K}_C(z)$ принимает при $y\to 0$, $y\in\pm C$ по норме в $\mathscr{H}$ при любом $s<-\frac{n}{2}$ граничное значение $(\pm 1)^nF[\theta_{\pm C^*}]$ соответственно,

$$\mathcal{K}_C(x+iy)\to(\pm 1)^n\mathcal{K}_C(\pm x)=(\pm 1)^n F[\theta_{\pm C^*}],$$
$$y\to 0,\ y\in\pm C. \tag{3.8}$$

Действительно, по доказанному $\mathcal{K}_C(x+iy)\in\mathcal{H}_s$ при $y\in\pm C$ и любом s, а обобщенная функция $F[\theta_{\pm C^*}](x)$ принадлежит $\mathcal{H}_s$ при всех $s<-\frac{n}{2}$. Поэтому при $s<-\frac{n}{2}$ и $y\in C$, $y\to 0$ имеем:

$$\|\mathcal{K}_C(x+iy)-F[\theta_{C^*}]\|_s^2=(2\pi)^{2n}\int\limits_{C^*}[e^{-(y,\xi)}-1]^2(1+|\xi|^2)^s d\xi\to 0.$$

Если же $y\in -C$, $y\to 0$, то, в силу (3.5),

$$\mathcal{K}_{-C}(x+iy)=(-1)^n\mathcal{K}_C(-x-iy)\to(-1)^n\mathcal{K}_C(-x)=$$
$$=(-1)^n F[\theta_{-C^*}].$$

Формула (3.8) доказана.

Из (3.5) и (3.8) для граничных значений ядер $\mathcal{K}_C(z)$ и $\mathcal{K}_{-C}(z)$ вытекают следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned}&\mathcal{K}_{-C}(x)=\overline{\mathcal{K}_C(x)}=\mathcal{K}_C(-x),\quad x\in\mathbf{R}^n,\\&\mathcal{K}_C(x)=(-1)^n\mathcal{K}_C(x),\quad x\in C\cup(-C);\end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{Re}\mathcal{K}_C(x)=\frac{1}{2}F[\theta_{C^*}+\theta_{-C^*}]=\frac{1}{2}[\mathcal{K}_C(x)+\mathcal{K}_C(-x)],\\&\operatorname{Im}\mathcal{K}_C(x)=\frac{1}{2i}F[\theta_{C^*}-\theta_{-C^*}]=\frac{1}{2i}[\mathcal{K}_C(x)-\mathcal{K}_C(-x)],\end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

Отсюда, учитывая тривиальные равенства

$$(\theta_{C^*}-\theta_{-C^*})^2=(\theta_{C^*}+\theta_{-C^*})^2=\theta_{C^*}+\theta_{-C^*},$$
$$(\theta_{C^*}-\theta_{-C^*})(\theta_{C^*}+\theta_{-C^*})=\theta_{C^*}-\theta_{-C^*},$$

в силу (2.4) между обобщенными функциями $\operatorname{Re}\mathcal{K}_C(x)$ и $\operatorname{Im}\mathcal{K}_C(x)$ получаем следующие соотношения:

$$-\operatorname{Im}\mathcal{K}_{C^*}\operatorname{Im}\mathcal{K}_C=\operatorname{Re}\mathcal{K}_{C^*}\operatorname{Re}\mathcal{K}_C=\frac{1}{2}(2\pi)^n\operatorname{Re}\mathcal{K}_C, \tag{3.11}$$

$$\operatorname{Im}\mathcal{K}_{C^*}\operatorname{Re}\mathcal{K}_C=\frac{1}{2}(2\pi)^n\operatorname{Im}\mathcal{K}_C. \tag{3.12}$$

Вычислим $\operatorname{Re}\mathcal{K}_C$ и $\operatorname{Im}\mathcal{K}_C$. Для этого при $k=0,1,\ldots$ введем обобщенные функции

$$(\delta^{(k)}[(x,\sigma)],\varphi)=(-1)^k\int\limits_{(x,\sigma)=0}\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)^k\varphi(x)\,dS,\quad \varphi\in\mathcal{S},$$

$$\left(P^{(k)}\frac{1}{(x,\sigma)},\varphi\right)=(-1)^k Vp\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda}\int\limits_{(x,\sigma)=0}\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\varphi(x+\lambda\sigma)\,dS\,d\lambda,\quad \varphi\in\mathcal{S},$$

непрерывно зависящие от параметра σ, $|\sigma|=1$.

Докажем равенство

$$\mathscr{K}_C(x)=\pi(-i)^{n-1}\int\limits_{\mathrm{pr}\,C^*}\delta^{(n-1)}[(x,\ \sigma)]\,d\sigma-$$

$$-(-i)^n\int\limits_{\mathrm{pr}\,C^*}P^{(n-1)}\frac{1}{(x,\ \sigma)}\,d\sigma. \tag{3.13}$$

Действительно, пользуясь представлением (3.4), при всех $y\in C$ и $\varphi\in\mathscr{S}$ получаем:

$$\int\mathscr{K}_C(x+iy)\,\varphi(x)\,dx=i^n\Gamma(n)\int\left[\int\limits_{\mathrm{pr}\,C^*}\frac{d\sigma}{[(x,\ \sigma)+i\,(y,\ \sigma)]^n}\right]\varphi(x)\,dx=$$

$$=i^n\Gamma(n)\int\limits_{\mathrm{pr}\,C^*}\left[\int\frac{\varphi(x)\,dx}{[(x,\ \sigma)+i\,(y,\ \sigma)]^n}\right]d\sigma. \tag{3.14}$$

Пусть теперь $y\to 0$, $y\in C$. Тогда $0<\varepsilon=(y,\ \sigma)\to 0$ при $\sigma\in\mathrm{pr}\,C^*$ и интеграл

$$\int\frac{\varphi(x)\,dx}{[(x,\ \sigma)+i\varepsilon]^n}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\lambda+i\varepsilon)^n}\int\limits_{(x,\sigma)=0}\varphi(x+\lambda\sigma)\,d\sigma d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda+i\varepsilon}\frac{\partial^{n-1}}{\partial\lambda^{n-1}}\int\limits_{(x,\sigma)=0}\varphi(x+\lambda\sigma)\,d\sigma d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ln(\lambda+i\varepsilon)\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\int\limits_{(x,\sigma)=0}\varphi(x+\lambda\sigma)\,d\sigma d\lambda$$

равномерно ограничен по ε и σ при всех $0<\varepsilon\leqslant 1$ и $\sigma\in\mathrm{pr}\,C^*$; далее, в силу формулы Сохоцкого:

$$\frac{1}{\lambda+i\varepsilon}\to-i\pi\delta(\lambda)+P\frac{1}{\lambda},\quad \varepsilon\to+0,$$

этот интеграл стремится при $\varepsilon\to+0$ к пределу

$$-\frac{i\pi}{\Gamma(n)}\int\limits_{(x,\sigma)=0}\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)^{n-1}\varphi(x)\,d\sigma+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(n)}Vp\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda}\frac{\partial^{n-1}}{\partial\lambda^{n-1}}\int\limits_{(x,\sigma)=0}\varphi(x+\lambda\sigma)\,d\sigma d\lambda=$$

$$=\left(\frac{(-1)^n i\pi}{\Gamma(n)}\delta^{(n-1)}[(x,\ \sigma)]+\frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n)}P^{(n-1)}\frac{1}{(x,\ \sigma)},\ \varphi\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{[(x,\ \sigma)+i0]^n},\ \varphi\right).$$

Поэтому, переходя в интеграле (3.14) к пределу при $y\to 0$ $y\in C$ и пользуясь теоремой Лебега и предельным соотношением (3.8), получим равенство (3.13). При этом мы попутно

получили равенства:

$$\frac{1}{[(x,\ \sigma)+i0]^n}=\frac{(-1)^n i\pi}{\Gamma(n)}\delta^{(n-1)}[(x,\ \sigma)]+$$

$$+\frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n)}P^{(n-1)}\frac{1}{(x,\ \sigma)},\quad \sigma\in \mathrm{pr}\, C^*; \tag{3.15}$$

$$\mathscr{K}_C(x)=i^n\Gamma(n)\int\limits_{\mathrm{pr}\, C^*}\frac{d\sigma}{[(x,\ \sigma)+i0]^n}. \tag{3.16}$$

Наконец, отделяя в (3.13) вещественную и мнимую части, получим следующие полезные формулы:

$$\mathrm{Re}\,\mathscr{K}_C(x)=\begin{cases}\pi(-1)^{\frac{n-1}{2}}\int\limits_{\mathrm{pr}C^*}\delta^{(n-1)}[(x,\sigma)]\,d\sigma, & n\text{ — нечетное},\\ (-1)^{\frac{n}{2}-1}\int\limits_{\mathrm{pr}C^*}P^{(n-1)}\frac{1}{(x,\sigma)}\,d\sigma, & n\text{ — четное};\end{cases} \tag{3.17}$$

$$\mathrm{Im}\,\mathscr{K}_C(x)=\begin{cases}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\int\limits_{\mathrm{pr}C^*}P^{(n-1)}\frac{1}{(x,\sigma)}\,d\sigma, & n\text{ — нечетное},\\ \pi(-1)^{n/2}\int\limits_{\mathrm{pr}C^*}\delta^{(n-1)}[(x,\sigma)]\,d\sigma, & n\text{ — четное}.\end{cases} \tag{3.18}$$

Пример 1. $\mathscr{K}_{C+}(z)=\dfrac{i^n}{z_1\ldots z_n},\qquad z\in T^{C+},$

$$\mathscr{K}_{C+}(x)=\left[\pi\delta(x_1)+iP\frac{1}{x_1}\right]\times\ldots\times\left[\pi\delta(x_n)+iP\frac{1}{x_n}\right].$$

Пример 2 (см. [3], § 30 и [2]).

$$\mathscr{K}_{V+}(z)=2^n\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)(-z^2)^{-\frac{n+1}{2}},\quad z\in T^{V+}; \tag{3.19}$$

$$\mathscr{K}_{V+}(x)=\begin{cases}2^n\pi^{\frac{n-1}{2}}\left[\pi i\epsilon(x_0)\delta^{(\frac{n-1}{2})}(x^2)+\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)(-1)^{\frac{n+1}{2}}P\frac{1}{(x^2)^{\frac{n+1}{2}}}\right],\\ n\text{ — нечетное};\\ 2^n\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\left[(x^2)_-^{-\frac{n+1}{2}}+i(-1)^{\frac{n}{2}}\epsilon(x_0)(x^2)_+^{-\frac{n+1}{2}}\right],\\ n\text{ — четное}.\end{cases}$$

Вычислим ядро $\mathscr{K}_{V+}(z)$. Как было сказано выше, достаточно вычислить его при $x=0$:

$$\mathscr{K}_{V+}(iy)=\int\limits_{V+}e^{-(y,\xi)}d\xi,\quad y\in V+, \tag{3.20}$$

Далее, в силу инвариантности интеграла (3.20) относительно собственной ортохронной группы Лоренца, достаточно вычислить его при $y=(y_0, \vec{0})$, $y_0>0$. Имеем:

$$\mathscr{K}_{V^+}(iy_0, \vec{0}) = \int\limits_{V^+} e^{-y_0\xi_0} d\xi = \int\limits_0^\infty e^{-y_0\xi_0} \int\limits_{|\vec{\xi}|<\xi_0} d\vec{\xi} d\xi_0 =$$

$$= \frac{\omega_n}{n} \int\limits_0^\infty e^{-y_0\xi_0} \xi_0^n d\xi_0 = \frac{\omega_n}{n y_0^{n+1}} \int\limits_0^\infty e^{-u} u^n du =$$

$$= \Gamma(n)\, \omega_n [-(iy_0)^2]^{-\frac{n+1}{2}} = 2^n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) [-(iy_0)^2]^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Распространяя полученное равенство на все $y \in V^+$ и далее на все $z \in T^{V^+}$, получим формулу (3.19).

4. Обобщенный интеграл типа Коши—Бохнера. Пусть $f \in \mathscr{H}_{-s}$ при некотором $s \geqslant 0$. Функцию

$$\mathscr{F}(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} (f(x'), \mathscr{K}_C(z-x'), \quad z \in T^C \cup T^{-C} \tag{4.1}$$

назовем обобщенным интегралом типа Коши — Бохнера. Здесь конус C предполагается выпуклым и острым.

Так как $\mathscr{K}_C(x+iy) \in \mathscr{H}_s$ при всех $s \geqslant 0$ и $y \in C \cup (-C)$ (см. п. 3), то в силу (2.5) интеграл (4.1) можно переписать в виде свертки

$$\mathscr{F}(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} [f(x') * \mathscr{K}_C(x'+iy)](z), \quad z \in T^C \cup T^{-C}. \tag{4.2}$$

Замечание. При $n=1$, $C=(0, \infty)$ и $f \in \mathscr{L}_2$ интеграл (4.1) превращается в классический интеграл Коши

$$\mathscr{F}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x')}{x'-z} dx'.$$

Функция $\mathscr{F}(z)$ голоморфна в $T^C \cup T^{-C}$, причем

$$D^\alpha \mathscr{F}(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} (f(x'), D^\alpha \mathscr{K}_C(z-x')), \tag{4.3}$$

$$|D^\alpha \mathscr{F}(z)| \leqslant \frac{K_{\alpha,s}}{(2\pi)^n} \|f\|_{-s} [1 + d^{-s}(y)]\, d^{-\frac{n}{2}-|\alpha|}(y). \tag{4.4}$$

Голоморфность $\mathscr{F}(z)$ в $T^C \cup T^{-C}$ и формула дифференцирования (4.3) непосредственно вытекают из того факта, что ядро $\mathscr{K}_C(z)$ — голоморфная функция в $T^C \cup T^{-C}$ и $\mathscr{K}_C(x+iy) \in \mathscr{H}_s$ при всех $s \geqslant 0$ и $y \in C \cup (-C)$ (см. п. 3). Оценка (4.4) следует из предложения 2.1 и из оценки (3.7):

$$|D^{\alpha}\mathcal{F}(z)| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^n} \|f\|_{-s} \|D^{\alpha}\mathcal{K}_C(z-x')\|_s =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \|f\|_{-s} \|D^{\alpha}\mathcal{K}_C(x+iy)\|_s \leqslant \frac{K_{s,\alpha}}{(2\pi)^n} \|f\|_{-s} [1d+{}^{-s}(y)] d^{-\frac{n}{2}-|\alpha|}(y).$$

Докажем оценки при всех $s \geqslant 0$ и $y \in C \cup (-C)$

$$\|D^{\alpha}\mathcal{F}(x+iy)\|_{-s} \leqslant N_{\alpha} \|f\|_{-s} d^{-|\alpha|}(y), \tag{4.5}$$

$$\|D^{\alpha}\mathcal{F}(x+iy)\|_{-s-|\alpha|} \leqslant \|f\|_{-s}. \tag{4.6}$$

Действительно, из представления (4.2), из определения свертки (2.4) и из формулы (3.3) для ядра $\mathcal{K}_C(z)$ следует, что

$$F[D^{\alpha}\mathcal{F}(x+iy)] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f](\xi) F[D^{\alpha}\mathcal{K}_C](\xi) =$$

$$= F[f](\xi)(-i\xi)^{\alpha} F^{-1}[\mathcal{K}_C](-\xi) = F[f](\xi)(-i\xi)^{\alpha} e^{(y,\xi)} \theta_{C^*}(-\xi).$$

Поэтому

$$\|D^{\alpha}\mathcal{F}(x+iy)\|_{-s}^2 = \int_{-C^*} |F[f](\xi)|^2 |\xi^{\alpha}|^2 e^{2(y,\xi)} (1+|\xi|^2)^{-s} d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_{-s}^2 \sup_{\xi \in C^*} |\xi|^{2|\alpha|} e^{-2(y,\xi)} = \|f\|_{-s}^2 \sup_{\rho \geqslant 0} \rho^{2|\alpha|} \sup_{\sigma \in \mathrm{pr}\, C^*} e^{-2\rho(y,\sigma)} =$$

$$= \|f\|_{-s}^2 \sup_{\rho \geqslant 0} \rho^{2|\alpha|} e^{-2\rho d(y)} = \|f\|_{-s}^2 2^{-2|\alpha|} d^{-2|\alpha|}(y) \sup_{u \geqslant 0} u^{2|\alpha|} e^{-u},$$

что и дает оценку (4.5). Аналогично, проще, выводится оценка (4.6).

Функция $\mathcal{F}(z)$ при $y \to 0$, $y \in \pm C$ принимает по норме в $\mathcal{H}_{-s}$ граничные значения $\mathcal{F}^{\pm}(x)$, равные соответственно

$$\mathcal{F}^{+} = \frac{1}{(2\pi)^n} f * \mathcal{K}_C, \quad \mathcal{F}^{-} = \frac{(-1)^n}{(2\pi)^n} f * \overline{\mathcal{K}}_C. \tag{4.7}$$

Действительно, $\mathcal{K}_C(x) \in \mathcal{H}_{\alpha}$ при всех $\alpha < -\frac{n}{2}$ (см. п. 3). Далее, в силу (3.8),

$$F[\mathcal{F}^{+}] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f] F[\mathcal{K}_C] = F[f](\xi) F^{-1}[\mathcal{K}_C](-\xi) =$$

$$= F[f](\xi) \theta_{C^*}(-\xi).$$

Отсюда, учитывая формулу (4.6), $y \to 0$, $y \in C$ получим

$$\|\mathcal{F}(x+iy) - \mathcal{F}^{+}(x)\|_{-s}^2 = \int_{C^*} |F[f](-\xi)|^2 [e^{-(y,\xi)} - 1]^2 \times$$

$$\times (1+|\xi|^2)^s d\xi \to 0.$$

Аналогично рассматривается и случай $y \to 0$, $y \in -C$.

5. Обобщенное преобразование Гильберта. Пусть $f \in \mathcal{H}_{-s}$ при некотором $s \geqslant 0$. Обобщенным преобразованием Гильберта f_1 обобщенной функции f назовем свертку

$$f_1 = -\frac{2}{(2\pi)^n} f * \operatorname{Im} \mathcal{K}_C. \tag{5.1}$$

Из этого определения следует, что

$$f_1 \in \mathcal{H}_{-s}, \ \operatorname{supp} F[f_1] \subset C^* \cup (-C^*), \tag{5.2}$$

поскольку, в силу (3.10),

$$F[f_1] = -i(\theta_{C^*} - \theta_{-C^*}) F[f]. \tag{5.3}$$

Если $f \in \mathcal{H}_{-s}$, то условия

$$\operatorname{supp} F[f] \subset C^* \cup (-C^*), \tag{5.4}$$

$$f = \frac{2}{(2\pi)^n} f_1 * \operatorname{Im} \mathcal{K}_C, \tag{5.5}$$

$$f = \frac{2}{(2\pi)^n} f * \operatorname{Re} \mathcal{K}_C \tag{5.6}$$

эквивалентны.

Действительно, из (5.4) следует (5.5), в силу (5.3) и (3.10):

$$F[f] = i(\theta_{C^*} - \theta_{-C^*}) F[f_1].$$

Из (5.5) следует (5.6), в силу (5.1) и (3.11):

$$f = \frac{2}{(2\pi)^n} f_1 * \operatorname{Im} \mathcal{K}_C = -\frac{4}{(2\pi)^{2n}} (f * \operatorname{Im} \mathcal{K}_C) * \operatorname{Im} \mathcal{K}_C =$$

$$= -\frac{4}{(2\pi)^{2n}} f * (\operatorname{Im} \mathcal{K}_C * \operatorname{Im} \mathcal{K}_C) = \frac{2}{(2\pi)^n} f * \operatorname{Re} \mathcal{K}_C$$

и из коммутативности свертки (см. п. 2). Наконец, из (5.6) вытекает (5.4), в силу (3.10):

$$F[f] = (\theta_{C^*} + \theta_{-C^*}) F[f].$$

Будем говорить, что обобщенные функции f и f_1 из $\mathcal{H}_{-s}$, $s \geqslant 0$, образуют пару обобщенных преобразований Гильберта, если они удовлетворяют соотношениям

$$f_1 = -\frac{2}{(2\pi)^n} f * \operatorname{Im} \mathcal{K}_C, \ f = \frac{2}{(2\pi)^n} f_1 * \operatorname{Im} \mathcal{K}_C. \tag{5.7}$$

При $n = 1$ (см. п. 3)

$$\operatorname{Re} \mathcal{K}_C = \pi\delta(x), \quad \operatorname{Im} \mathcal{K}_C = P\frac{1}{x}$$

и формулы (5.7) принимают вид:

$$f_1 = -\frac{1}{\pi} f * P\frac{1}{x}, \quad f = \frac{1}{\pi} f_1 * P\frac{1}{x}, \tag{5.8}$$

а соотношение (5.6) превращается в тождество $f = f$.

Замечание 1. Формулы (5.8) получены Бельтрами и Волерсом [6]. При $f \in \mathcal{L}_2$ формулы (5.8) превращаются в классические формулы преобразований Гильберта. При $n \geqslant 2$ формулы (5.4)—(5.6) получены Владимировым [4].

Замечание 2. Отметим разницу между случаями $n=1$ и $n\geqslant 2$: при $n=1$ условие (5.4) выпадает, ибо $C^*\cup(-C^*)=R^1$, в то время как при $n\geqslant 2$ это условие существенно.

6. **Преобразование Лапласа.** Пусть Γ — замкнутый острый выпуклый конус в $\mathbf{R}^n$ с вершиной в 0. По лемме 3.1, $C=\operatorname{int}\Gamma^*\neq\varnothing$. Пусть $g\in\mathscr{S}'(\Gamma)$.

Назовем преобразованием Лапласа $L[g]$ обобщенной функции $g(\xi)$ выражение

$$L[g]=F[g(\xi)e^{-(y,\xi)}](x),$$

где F — операция преобразования Фурье.

Очевидно, операция L линейна и взаимно однозначна.

Докажем представление

$$L[g]=(g(\xi),\ \eta(\xi)e^{i(z,\xi)}),\quad z\in T^C, \tag{6.1}$$

где функция $\eta(\xi)$ обладает свойствами: $\eta\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\eta\equiv 1$ в Γ_ε — ε-окрестности конуса Γ, $\eta\equiv 0$ вне $\Gamma_{2\varepsilon}$ и $|D^\alpha\eta(\xi)|\leqslant C_\alpha$; представление (6.1) не зависит от вспомогательной функции η с указанными свойствами.

Действительно, пусть $y\in C$ и $\varphi\in\mathscr{S}$. Тогда

$$(L[g],\ \varphi)=(F[g(\xi)e^{-(y,\xi)}],\ \varphi)=(g(\xi)e^{-(y,\xi)},\ F[\varphi])=$$
$$=\left(g(\xi),\ \eta(\xi)e^{-(y,\xi)}\int\varphi(x)e^{i(x,\xi)}dx\right). \tag{6.2}$$

Докажем, что

$$\eta(\xi)e^{-(y,\xi)}\varphi(x)e^{i(x,\xi)}\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^{2n}). \tag{6.3}$$

Это вытекает из того, что $\varphi\in\mathscr{S}$ и из оценки

$$|\xi^\beta D^\alpha[\eta(\xi)e^{i(z,\xi)}]|\leqslant C'_\alpha(y)|\xi|^\beta e^{-(y,\xi_1)-(y,\xi_2)}\leqslant$$
$$\leqslant C'_\alpha(y)(2\varepsilon+|\xi_1|)^\beta e^{2|y|\varepsilon-\sigma(y)|y||\xi_1|}\leqslant C''_{\alpha,\beta}(y), \tag{6.4}$$

справедливой при всех $z\in T^C$ и $\xi\in\Gamma_{2\varepsilon}$ ($\xi=\xi_1+\xi_2$, $|\xi_2|\leqslant 2\varepsilon$, $\xi_1\in\Gamma$). Убедившись в справедливости включения (6.3), мы можем вынести в (6.2) интеграл за знак функционала и в результате получим

$$(L[g],\ \varphi)=\int\varphi(x)(g(\xi),\ \eta(\xi)e^{i(z,\xi)})\,dx,$$

откуда и вытекает формула (6.1).

Обозначим $\mathscr{F}(z)=L[g]$. Докажем, что функция $\mathscr{F}(z)$ голоморфна в T^C и справедлива формула дифференцирования

$$D^\alpha\mathscr{F}(z)=((i\xi)^\alpha g(\xi),\ \eta(\xi)e^{i(z,\xi)}). \tag{6.5}$$

Непрерывность функции $\mathscr{F}(z)$ в T^C вытекает из представления (6.1), непрерывности функции $\eta(\xi)e^{i(z,\xi)}$ по z в T^C в

топологии пространства $\mathscr{S}$ (ср. (6.4)) и из непрерывности функционала f на $\mathscr{S}$:

$$\mathscr{F}(z)=(g(\xi),\ \eta(\xi)\,e^{i(z,\xi)})\to$$
$$\to(g(\xi),\ \eta(\xi)\,e^{i(z_0,\xi)})=\mathscr{F}(z_0),\quad z\to z_0,\quad z\in T^C,\quad z_0\in T^C.$$

Для доказательства голоморфности функции $\mathscr{F}(z)$ в T^C достаточно установить, в силу теоремы Гартогса, существование первых производных $\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial z_j}$, $j=1,\ldots,n$. Но (ср. (6.4))

$$\frac{\eta(\xi)\,e^{i(z+h_j,\xi)}-\eta(\xi)\,e^{i(z,\xi)}}{h}\to\eta(\xi)\,i\xi_j e^{i(z,\xi)},\quad h\to 0 \text{ в } \mathscr{S},$$

где обозначено $h_j=(\underbrace{0,\ldots,h}_{j},0,\ldots,0)$. Поэтому из представления (6.1) и из непрерывности функционала f на $\mathscr{S}$ имеем:

$$\frac{\mathscr{F}(z+h_j)-\mathscr{F}(z)}{h}=\left(g(\xi),\ \frac{\eta(\xi)\,e^{i(z+h_j,\xi)}-\eta(\xi)\,e^{i(z,\xi)}}{h}\right)\to$$
$$\to(g(\xi),\ \eta(\xi)\,i\xi_j e^{i(z,\xi)})=(i\xi_j g(\xi),\ \eta(\xi)\,e^{i(z,\xi)}),\quad h\to 0,$$

так что $\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial z_j}$ существует и равна

$$\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial z_j}=(i\xi_j g(\xi),\ \eta(\xi)\,e^{i(z,\xi)}),\quad j=1,\ldots,n). \tag{6.6}$$

Таким образом, формула (6.5) доказана для всех первых производных. Применяя приведенные рассуждения к равенству (6.6), убедимся в справедливости формулы (6.5) и для всех вторых производных, и т. д. Наше утверждение доказано.

Установим простейшие свойства преобразования Лапласа, вытекающие из соответствующих свойств преобразования Фурье.

а) Дифференцирование:

$$D^\alpha L[g]=L[(i\xi)^\alpha g]. \tag{6.7}$$

Это есть формула (6.5).

б) Преобразование Лапласа производной:

$$L[D^\alpha g]=(-iz)^\alpha L[g]. \tag{6.8}$$

Формулу (6.8) достаточно доказать для первых производных. Имеем:

$$L\left[\frac{\partial g(\xi)}{\partial\xi_j}\right]=F\left[\frac{\partial g(\xi)}{\partial\xi_j}\,e^{-(y,\xi)}\right]=F\left[\frac{\partial}{\partial\xi_j}\left(g(\xi)\,e^{-(y,\xi)}\right)\right]+$$
$$+y_jF[g(\xi)\,e^{-(y,\xi)}]=(-ix_j+y_j)\,F[g(\xi)\,e^{-(y,\xi)}]=-iz_jL[g].$$

в) Сдвиг. Если $\operatorname{Im} a\in C$, то

$$L[g(\xi)\,e^{i(a,\xi)}](z)=L[g](z+a). \tag{6.9}$$

г) **Преобразование Лапласа сдвига.** Если $a \in \Gamma$, то

$$L[g(\xi - a)](z) = e^{i(z, a)} L[g](z). \tag{6.10}$$

д) **Преобразование Лапласа подобия.** Если $k > 0$, то

$$L[g(k\xi)] = \frac{1}{k^n} L[g]\left(\frac{z}{k}\right). \tag{6.11}$$

е) **Преобразование Лапласа свертки.** Если g, $g_1 \in \mathscr{S}'(\Gamma)$, то

$$L[g * g_1] = L[g] L[g_1]. \tag{6.12}$$

Предварительно докажем формулу:

$$ge^{-(y, \xi)} * g_1 e^{-(y, \xi)} = (g * g_1) e^{-(y, \xi)}, \quad y \in C. \tag{6.13}$$

Действительно, пользуясь определением свертки в алгебре $\mathscr{S}'(\Gamma)$, при всех $\varphi \in \mathscr{D}$ имеем

$$(ge^{-(y, \xi)} * g_1 e^{-(y, \xi)}, \ \varphi) = (g(\xi) e^{-(y, \xi)} \cdot g_1(\xi') e^{-(y, \xi')},$$
$$\eta_1(\xi) \eta_2(\xi') \varphi(\xi + \xi') = (g(\xi) \cdot g_1(\xi'), \ \eta_1(\xi) \eta_2(\xi') e^{-(y, \xi + \xi')} \times$$
$$\times \varphi(\xi + \xi')) = (g * g_1, \ \varphi e^{-(y, \xi)}) = (e^{-(y, \xi)} (g * g_1), \ \varphi);$$

здесь η_1 и η_2 — определенные выше вспомогательные функции

Из формулы (6.13) сразу следует формула (6.12):

$$L[g * g_1] = F[(g * g_1) e^{-(y, \xi)}] = F[ge^{-(y, \xi)} * g_1 e^{-(y, \xi)}] =$$
$$= F[g(\xi) e^{-(y, \xi)}] F[g_1(\xi) e^{-(y, \xi)}] = L[g] L[g_1].$$

7. Обобщение интегрального представления Коши—Бохнера. Обозначим через $\mathscr{H}_{(-s)}(C)$, $s \geqslant 0$, банахово пространство функций $f(z)$, голоморфных в T^C с нормой

$$\|f\|_{(-s)} = \sup_{y \in C} \frac{1}{(2\pi)^n} \|f(x + iy)\|_{-s}. \tag{7.1}$$

Предложение 7.1. Если $g \in \mathscr{L}_2^{-s}(C^*)$, $s \geqslant 0$, то $L[g] \in \mathscr{H}_{(-s)}(\operatorname{ch} C)$ и справедливо равенство

$$\|L[g]\|_{(-s)} = \|g\|_{2(-s)}. \tag{7.2}$$

При этом $L[g](z)$ принимает при $y \to 0$, $y \in \operatorname{ch} C$ (единственное граничное значение в $\mathscr{H}_{-s}$, равное $F[g]$.

Действительно, по условию $g(\xi) = 0$ почти всюду вне C^* и $g(\xi)(1 + |\xi|^2)^{-s/2} \in \mathscr{L}_2$. Тогда по доказанному (см. п. 6) функция $L[g]$ голоморфна в $T^{\operatorname{int} C^{**}} = T^{\operatorname{ch} C}$ и она представляется интегралом

$$L[g](z) = \int_{C^*} g(\xi) e^{i(z, \xi)} d\xi; \quad z \in T^{\operatorname{ch}} \ . \tag{7.3}$$

Отсюда, пользуясь определением нормы в $\mathscr{H}_{(-s)}(\operatorname{ch} C)$, получаем равенство (7.2):

$$\|L(g)\|^2_{(-s)} = \sup_{y \in \operatorname{ch} C} (2\pi)^{-2n} \|L[g](x+iy)\|^2_{-s} =$$

$$= \sup_{y \in \operatorname{ch} C} \int_{C^*} |g(\xi)|^2 e^{-2(y,\xi)} (1+|\xi|^2)^{-s} d\xi =$$

$$= \int |g(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^{-s} d\xi = \|g\|^2_{2(-s)}.$$

Наконец, из

$$\|L[g](x+iy) - F[g]\|^2_{-s} = \int_{C^*} |g(\xi)|^2 [e^{-(y,\xi)} - 1]^2 \times$$

$$\times (1+|\xi|^2)^{-s} d\xi \to 0, \quad y \to 0, \quad y \in \operatorname{ch} C$$

следует утверждение о граничном значении функции $L[g](z)$. Предложение 7.1 доказано.

Теорема 7.1. Следующие утверждения эквивалентны:

1. f принадлежит $\mathcal{H}_{(-s)}(C)$, $s \geqslant 0$.

2. f есть преобразование Лапласа (единственной) функции g из $\mathcal{L}_2^{-s}(C^*)$.

3. f обладает обобщенным интегральным представлением Коши — Бохнера

$$\frac{1}{(2\pi)^n} (f(x'), \mathcal{K}_C(z-x')) = \begin{cases} f(z), & z \in T^{\operatorname{ch} C}; \\ 0, & z \in T^{-\operatorname{ch} C}, \end{cases} \tag{7.4}$$

где $f(x)$ — граничное значение в $\mathcal{H}_{-s}$ функции $f(z)$ при $y \to 0$, $y \in \operatorname{ch} C$.

Доказательство. $1 \to 2$. Пусть $f \in \mathcal{H}_{(-s)}(C)$. Введем обобщенную функцию $g_y(\xi)$ из $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n \times C)$ по формуле

$$g_y(\xi) = e^{(y,\xi)} F^{-1}[f(x+iy)](\xi, y). \tag{7.5}$$

Докажем, что $g_y(\xi)$ не зависит от y. Действительно, дифференцируя равенство (7.5) по y_j и пользуясь условиями Коши — Римана, имеем:

$$\frac{\partial g_y(\xi)}{\partial y_j} = \xi_j e^{(\xi,y)} F^{-1}[f(x+iy)] + e^{(\xi,y)} F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial y_j} f(x+iy)\right] =$$

$$= e^{(\xi,y)} \left\{\xi_j F^{-1}[f(x+iy)] + iF^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial x_j} f(x+iy)\right]\right\} =$$

$$= e^{(\xi,y)} F^{-1}[f(x+iy)](\xi_j + i i \xi_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Обозначая $g_y(\xi) = g(\xi)$ и пользуясь (7.5), выводим

$$f(x+iy) = F[g(\xi) e^{-(y,\xi)}], \quad z \in T^C. \tag{7.6}$$

Так как $f \in \mathcal{H}_{(-s)}(C)$, то $f(x+iy) \in \mathcal{H}_{-s}$ при всех $y \in C$, так что в силу (7.6) $g(\xi) e^{-(y,\xi)}$ есть функция и

$$\int |g(\xi)|^2 e^{-2(y,\xi)} (1+|\xi|^2)^{-s} d\xi \leqslant \|f\|^2_{(-s)}, \quad y \in C. \tag{7.7}$$

Переходя в неравенстве (7.7) к пределу при $y \to 0$, $y \in C$ и пользуясь леммой Фату, получим

$$\int |g(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^{-s} d\xi \leqslant \|f\|^2_{(-s)},$$

откуда следует, что $F[g] \in \mathcal{H}_{-s}$. Докажем, что $g(\xi)=0$ почти везде вне конуса C^*. Пусть ξ_0 — произвольная точка, лежащая вне C^*. Тогда найдется такая точка $y_0 \in \operatorname{pr} C$, что $(\xi_0, y_0) < -\sigma$ при некотором $\sigma > 0$. По непрерывности это неравенство сохранится и в достаточно малой окрестности $|\xi - \xi_0| < \delta$. Поэтому, полагая в неравенстве (7.7) $y = ty_0$, при всех $t > 0$ получим

$$e^{2t\sigma} \int\limits_{|\xi-\xi_0|<\delta} |g(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^{-s} d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{|\xi-\xi_0|<\delta} |g(\xi)|^2 e^{-2(y,\xi)} (1+|\xi|^2)^{-s} d\xi \leqslant \|f\|^2_{(-s)},$$

что возможно лишь при условии $g(\xi)=0$ почти везде в $|\xi - \xi_0| < \delta$. Поэтому $g(\xi)=0$ почти везде вне C^*, так что $\operatorname{supp} g \subset C^*$. Наконец, из (7.6) следует, что $f(z) = L[g]$.

$2 \to 3$. Пусть $f(z) = L[g]$, причем $g \in \mathcal{L}_2^{-s}(C^*)$. В силу предложения 7.1, $f(z) \in \mathcal{H}(_{-s})(\operatorname{ch} C)$ и $f(x) = L[g]$. Применяя формулы (2.4) и (2.5) для свертки (см. также (4.1) и (4.2)) к равенствам

$$f(z) = L[g] = F[g(\xi)\,\theta_{C^*}(\xi)\,e^{-(y,\xi)}],\ z \in T^{\operatorname{ch} C},$$

$$0 = F[g(\xi)\,\theta_{-C^*}(\xi)\,e^{-(y,\xi)}],\ z \in T^{-\operatorname{ch} C},$$

и пользуясь обозначением (3.1) для ядра $\mathcal{K}_C(z)$, получим представление (7.4):

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} F[g] * \mathcal{K}_C = \frac{1}{(2\pi)^n} (f(x'), \mathcal{K}_C(z-x')),\ z \in T^{\operatorname{ch} C},$$

$$0 = \frac{1}{(2\pi)^n} F[g] * \mathcal{K}_{-C} = \frac{(-1)^n}{(2\pi)^n} (f(x'), \mathcal{K}_C(z-x')),\ z \in T^{-\operatorname{ch} C}.$$

Здесь мы воспользовались одним из равенств (3.5): $\mathcal{K}_{-C}(z) = (-1)^n \mathcal{K}_C(z)$.

$3 \to 1$. Пусть имеет место представление (7.4) с некоторой $f \in \mathcal{H}_{-s}$. Тогда по доказанному в п. 4 $f \in \mathcal{H}_{(-s)}(\operatorname{ch} C)$. Теорема доказана.

Замечание. При $s=0$ теорема 7.1 превращается в теорему Бохнера [7].

Из теоремы 7.1 и из предложения 7.1 вытекают следствия.

Следствие 1. Пространства $\mathcal{H}_{(-s)}(C)$ и $\mathcal{H}_{(-s)}(\operatorname{ch} C)$ изоморфны и изометричны, причем

$$\sup_{y \in C} \|f(x+iy)\|_{-s} = \sup_{y \in \operatorname{ch} C} \|f(x+iy)\|_{-s}. \tag{7.8}$$

Замечание. Этот результат не вытекает из теоремы Бохнера об оболочке голоморфности трубчатой области (см. 3): равенство (7.8) дает оценку роста функции класса $\mathcal{H}_{(-s)}(C)$ в оболочке голоморфности через ее рост в исходной области T^C.

Следствие 2 (Аналог теоремы Лиувилля). Если конус C — не острый и $f \in \mathcal{H}_{(-s)}(C)$, то $f(z) \equiv 0$.

Действительно, по лемме 3.1 в этом случае $\operatorname{mes} C^* = 0$.

Поэтому (в силу следствий 1 и 2) без ограничения общности впредь мы можем считать конус C острым и выпуклым.

Следствие 3. Пространства $\mathcal{H}_{(-s)}(C)$ и $\mathcal{L}_2^{-s}(C^*)$ изоморфны и изометричны, причем изоморфизм осуществляется операцией преобразования Лапласа.

Следствие 4. Всякая функция $f(z)$ из $\mathcal{H}_{(-s)}(C)$ обладает при $y \to 0$, $y \in C$ (единственным) граничным значением $f(x)$ в $\mathcal{H}_{-s}$ и это соответствие изометрично (и линейно).

Теорема 7.2. Для того, чтобы обобщенная функция f из $\mathcal{H}_{-s}$, $s \geqslant 0$, была граничным значением в $\mathcal{H}_{-s}$ некоторой функции из $\mathcal{H}_{(-s)}(C)$, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла соотношениям

$$\operatorname{Re} f = -\frac{2}{(2\pi)^n} \operatorname{Im} f * \operatorname{Im} \mathcal{K}_C, \quad \operatorname{Im} f = \frac{2}{(2\pi)^n} \operatorname{Re} f * \operatorname{Im} \mathcal{K}_C, \tag{7.9}$$

так что $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ образуют пару обобщенных преобразований Гильберта.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f \in \mathcal{H}_{-s}$ есть граничное значение в $\mathcal{H}_{-s}$ функции $f(z)$ из $\mathcal{H}_{(-s)}(C)$. Тогда для $f(z)$ справедливо обобщенное представление Коши — Бохнера (7.4), из которого, в силу формул (4.7), следуют соотношения

$$f = \frac{1}{(2\pi)^n} f * \mathcal{K}_C, \quad 0 = \frac{1}{(2\pi)^n} f * \overline{\mathcal{K}}_C. \tag{7.10}$$

Отсюда, отделяя вещественную и мнимую части, получаем соотношения (7.9).

Достаточность. Пусть $f \in \mathcal{H}_{-s}$ и удовлетворяет соотношениям (7.9). Тогда она будет удовлетворять и соотношениям (7.10). Построим функцию

$$\frac{1}{(2\pi^n)} (f(x'), \mathcal{K}_C(z - x'))$$

класса $H_{(-s)}(C)$ (см. п. 4). Граничное значение этой функции в $\mathcal{H}_{-s}$ в силу (4.7) и (7.10) равно $f(x)$. Теорема доказана.

Замечание. При $n = 1$, $C = (0, \infty)$ формулы (7.9) принимают вид

$$\operatorname{Re} f = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} f * P \frac{1}{x}, \quad \operatorname{Im} f = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} f * P \frac{1}{x}. \tag{7.11}$$

Формулы (7.11) в физике называются дисперсионными соотношениями (без вычитаний). Формулы (7.9) естественно рассматривать как обобщение дисперсионных соотношений на многомерный случай с причинностью относительно произвольного выпуклого острого конуса C^*.

8. Изоморфизм алгебр $\mathscr{H}(C)$ и $\mathscr{P}'(C^*)$. Здесь мы дадим внутреннее описание преобразований Лапласа обобщенных функций из $\mathscr{P}'(C^*)$, подобно тому как это сделано в п. 7 для функций из $\mathscr{L}_2^{-s}(C^*)$. Предварительно докажем лемму.

Лемма 8.1. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в T^C и удовлетворяет условию роста: для любого конуса $C' \Subset C$ существует число $M(C')$ такое, что

$$\|f(x+iy)\| \leqslant M(C')(1+|y|^{-\gamma}), \quad y \in C', \tag{8.1}$$

где число $\gamma \geqslant 0$ зависит лишь от f. Тогда $f \in \mathscr{H}_{(-s)}(\operatorname{ch} C)$, где $s > \gamma$, и при любом $y_0 \in \operatorname{pr} C$ справедливо неравенство

$$\|f\|_{(-s)} \leqslant K_s M(y_0), \tag{8.2}$$

где K_s не зависит от y_0, а число $M(y_0)$ в неравенстве (8.1) соответствует конусу $C' = [y : y = ty_0,\ t > 0]$.

Доказательство. Как и при доказательстве предложения 7.1, из условий леммы 8.1 выводим, что обобщенная функция

$$g(\xi) = e^{(y,\xi)} F^{-1}[f(x+iy)](\xi, y)$$

не зависит от $y \in C$ и $g(\xi) e^{-(y,\xi)} \in \mathscr{L}_2$ при всех $y \in C$, так что выполнено равенство Парсеваля

$$(2\pi)^n \int |g(\xi)|^2 e^{-2(y,\xi)} d\xi = \|f(x+iy)\|^2, \quad y \in C. \tag{8.3}$$

Как и при доказательстве предложения 7.1, убеждаемся из (8.3) и (8.1), что $g(\xi) = 0$ почти везде вне C^*. Пусть $C' = [y : y = ty_0,\ y_0 \in \operatorname{pr} C]$. Тогда из (8.3) и (8.1) имеем при всех $t > 0$

$$t^{2\beta} \int\limits_{C^*} |g(\xi)|^2 e^{-2t(y_0,\xi)} d\xi \leqslant \frac{M^2(y_0)}{(2\pi)^n} (1+t^\beta)^2. \tag{8.4}$$

Примем во внимание неравенство $(y_0, \xi) \leqslant |\xi|$, поделим неравенство (8.4) на $t^{1-\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ — произвольное число, проинтегрируем полученное неравенство по t на $(0, 1)$ и воспользуемся теоремой Фубини. В результате получим неравенство

$$\int\limits_{C^*} |g(\xi)|^2 \int\limits_0^1 t^{2\gamma-1+\varepsilon} e^{-2t|\xi|} dt\, d\xi \leqslant M^2(y_0) K'_\varepsilon. \tag{8.5}$$

Далее, учитывая оценку

$$\int_0^1 t^{2\gamma-1+\varepsilon} e^{-2t|\xi|} dt = \frac{1}{|\xi|^{2\gamma+\varepsilon}} \int_0^{|\xi|} u^{2\gamma-1+\varepsilon} e^{-2u} du \geqslant$$

$$\geqslant \begin{cases} \dfrac{e^{-2}}{2\gamma+e}, & \text{если } |\xi| \leqslant 1 \\ |\xi|^{-2\gamma-\varepsilon} \displaystyle\int_0^1 u^{2\gamma-1+\varepsilon} e^{-2u} du, & \text{если } |\xi| > 1 \end{cases} \geqslant \frac{K''_\varepsilon}{(1+|\xi|^2)^{\gamma+\varepsilon/2}},$$

из (8.5) выводим оценку

$$\int_{C^*} |g(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^{-\gamma-\varepsilon/2} d\xi \leqslant M^2(y_0) \frac{K'_\varepsilon}{K''_\varepsilon},$$

откуда следует, что $g \in \mathscr{L}_2^{-s}(C^*)$ при всех $s > \gamma$ и оценка

$$\|g\|_{2(-s)} \leqslant K_s M(y_0), \quad s > \gamma.$$

Отсюда, в силу предложения 7.1,

$$f(z) = L[g] \in \mathscr{H}_{(-s)}(\operatorname{ch} C), \quad \|f\|_{(-s)} = \|g\|_{2(-s)} \leqslant K_s M(y_0), \quad s > \gamma.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь функцию $f(z)$ из алгебры $H(C)$; это значит, что $f \in H_{\alpha,\beta}(C)$ при некоторых $\alpha \geqslant 0$ и $\beta \geqslant 0$ (см. п. 1). Предположим, что конус C острый, т. е. в силу леммы 3.1 $\operatorname{int} C^* \neq \varnothing$. Выберем (произвольный) базис $e_1, \ldots, e_n$ в R^n так, чтобы $e_j \in C^*$, $j = 1, \ldots, n$. Полином $l(z) = (e_1, z) \ldots (e_n, z)$ назовем допустимым для конуса C. Так как $(e_j, y) > 0$ при всех $y \in C$, то

$$l(z) = [(e_1, x) + i(e_1, y)] \ldots [(e_n, x) + i(e_n, y)] \neq 0, \quad z \in T^C. \tag{8.6}$$

Докажем, что при $\delta > \alpha + n/2$ функция

$$f_1(z) = f(z)[l(z)]^{-\delta} \tag{8.7}$$

принадлежит $\mathscr{H}_{(-s)}(\operatorname{ch} C)$ при всех $s > \beta + n(\delta - 1/2)$ и при некотором целом $l \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\|f_1\|_{(-s)} \leqslant K_{s,l,\delta} \|f\|_l^{(\alpha,\beta)}. \tag{8.8}$$

Действительно, в силу (8.6) функция $f_1(z)$ голоморфна в T^C. Пусть $C' \Subset C$. Тогда найдется такой конус $C_l \Subset C$, фигурирующий в определении нормы (1.2), что $C' \subset C_l$. Следовательно, в силу леммы 3.1 найдется такое число $\sigma = \sigma_l$, что

$$(e_j, y) \geqslant \sigma |y|, \quad j = 1, \ldots, n, \quad y \in C_l,$$

и поэтому

$$\begin{aligned} l|(z)|^2 &= [(e_1, x)^2 + (e_1, y)^2] \ldots [(e_n, x)^2 + (e_n, y)^2] \geqslant \\ &\geqslant [(e_1, x)^2 + \sigma^2 |y|^2] \ldots [(e_n, x)^2 + \sigma^2 |y|^2] \geqslant \\ &\geqslant (\sigma |y|)^{2n-2} [(e_1, x)^2 + \ldots + (e_n, x)^2 + \sigma^2 |y|^2], \quad z \in T^{C_l}. \end{aligned} \tag{8.9}$$

Так как векторы $e_1, \ldots, e_n$ — линейно независимы, то существует такое число $a^2 > 0$, что

$$(e_1, x)^2 + \ldots + (e_n, x)^2 \geqslant a^2 |x|^2.$$

Отсюда, продолжая оценки (8.9), получим

$$|l(x+iy)|^2 \geqslant (\sigma|y|)^{2n-2}(a^2|x|^2 + \sigma^2|y|^2), \quad z \in T^{C_l}.$$

Учитывая полученную оценку при всех $z \in T^{C_l}$, имеем:

$$|f_1(x+iy)|^2 = |f(x+iy)|^2 |l(x+iy)|^{-2\delta} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\|f\|_l^{(\alpha,\beta)}\right]^2 \frac{(1+|x+iy|^2)^\alpha}{|y|^{2\beta}(\sigma|y|)^{2\delta(n-1)}(a^2|x|^2+\sigma^2|y|^2)^\delta} \leqslant$$

$$\leqslant K_{l,\delta}'^2 \left[\|f\|_l^{(\alpha,\beta)}\right]^2 \frac{(1+|x|^2+|y|^2)^\alpha}{|y|^{2\beta+2\delta(n-1)}(|x|^2+|y|^2)^\delta}$$

и потому

$$\|f_1(x+iy)\|^2 = \frac{K_{l,\delta}'^2\left[\|f\|_l^{(\alpha,\beta)}\right]^2}{|y|^{2\beta+2\delta(n-1)}} \int \frac{(1+|x|^2+|y|^2)^\alpha\, dx}{(|x|^2+|y|^2)^\delta} =$$

$$= \frac{K_{l,\delta}'^2\left[\|f\|_l^{(\alpha,\beta)}\right]^2}{|y|^{2\beta+n(2\delta-1)}} \int \frac{[1+|y|^2(1+|\xi|^2)]^\alpha}{(1+|\xi|^2)^\delta}\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant K_{l,\delta}''^2 \left[\|f\|_l^{(\alpha,\beta)}\right]^2 \left[1+|y|^{-2\beta-n(2\delta-1)}\right], \quad y \in C' \subset C_l,$$

так как $2\delta - 2\alpha > n$ и $2\alpha \leqslant 2\beta + n(2\delta - 1)$. Отсюда, в силу леммы 8.1, следует, что $f_1 \in \mathcal{H}_{(-s)}(\operatorname{ch} C)$ при всех $s > \beta + n\left(\delta - \frac{1}{2}\right)$ и справедливо неравенство (8.8).

Таким образом, мы доказали, что всякая функция $f(z)$ из $H_{\alpha,\beta}(C)$ представляется при $\delta > \alpha + n/2$ в виде

$$f(z) = [l(z)]^\delta f_1(z), \quad f_1(z) \in \mathcal{H}_{(-s)}(\operatorname{ch} C), \tag{8.10}$$

где $s > \beta + n(\delta - 1/2)$, *причем операция* $f \to f_1$ *непрерывна из* $H_{\alpha,\beta}(C)$ в $\mathcal{H}_{(-s)}(\operatorname{ch} C)$.

Используя результаты п. 7, из представления (8.10) получаем: всякая функция $f(z)$ из $H(C)$ имеет в смысле $\mathcal{S}'$ (единственное) граничное значение $f(x)$ при $y \to 0$, $y \in C$, причем операция $f(x+iy) \to f(x)$ непрерывна из $H(C)$ в $\mathcal{S}'$; алгебры $H(C)$, $H(\operatorname{ch} C)$ и $\mathcal{S}'(C^*)$ изоморфны.

Замечание. Теорема о существовании в $\mathcal{S}'$ граничных значений у функций из алгебры $H(C)$ была доказана Владимировым [2] и Тильманом [12]. Более общие результаты содержатся у Мартино [9]. Приведенное здесь доказательство содержится в работе Владимирова [5].

БИБЛИОГРАФИЯ

1. **Бурбаки Н.**, Элементы математики. (Кн. 5). Топологические векторные пространства. Перев. с франц. М., Изд-во ин. лит., 1959, 410 стр., илл. (РЖМат, 1961, 2В404К)
2. **Владимиров В. С.**, О построении оболочек голоморфности для областей специального вида и их применения. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1961, 60, 101—144 (РЖМат, 1962, 6Б157)
3. —, Методы теории функций многих комплексных переменных. М., Наука, 1964, 411 стр., илл. (РЖМат, 1966, 2Б201К)
4. —, Обобщение интегрального представления Коши — Бохнера. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1969, 33, № 1, 90—108, (РЖМат, 1969, 10Б154)
5. —, О представлении Коши — Бохнера. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1972, 36, № 3, 534—539 (РЖМат, 1972, 11Б229)
6. **Beltrami E. T.**, Wohlers M. R., Distributions and the boundary values of analytic funktions. New York, Acad. Press, 1966, XIV, 116 pp. (РЖМат, 1969, 1Б212К)
7. **Bochner S.**, Group invariance of Cauchy's formula in several variables. Ann. Math., 1944, 45, 686—707
8. **Lions J. L.**, Supports dans la transformation de Laplace. J. analyse math., 1952—1953, 2, 369—380
9. **Martineau A.**, Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes, Theory distribut. Inst. Gulbenkian ciênc. Lisboa, 1964, 193—326 (РЖМат, 1968, 8Б591)
10. **Schwartz L.** Théorie des distributions. t. I—II, 1950—1951, Paris
11. —, Transformation de Laplace des distributions. Medd. Lunds Univ. mat. Semin. (Supplementband), 1952, 196—206
12. **Tillmann H. G.**, Darstellung der Schwartzschen Distributionen durch analytische Funktionen. Math. Z., 1961, 77, № 2, 106—124 (РЖМат, 1963, 12Б422)

УДК 511:51.01:164

Ю. И. Манин, **Десятая проблема Гильберта.** «Современные проблемы математики», 1972, 1, 5—37

Дается полное изложение вопроса, представляющего большой интерес для специалистов по математической логике и теории чисел.

УДК 519.3:513.834

А. Т. Фоменко, **Геометрические вариационные задачи.** «Современные проблемы математики», 1972, 1, 39—60

Статья содержит обзор современного состояния многомерного вариационного исчисления, имеющего большое теоретическое и прикладное значение. Изложение группируется вокруг решения знаменитой проблемы С. Н. Бернштейна о минимальных гиперповерхностях, а именно для пространств такой размерности максимальные гиперповерхности являются гиперплоскостями. Дается описание применяемых методов исследования.

УДК 517.513.88:530.145.6

В. С. Владимиров, **Преобразование Лапласа обобщенных функций медленного роста.** «Современные проблемы математики», 1972, 1, 61—84

Излагаются некоторые специальные разделы теории функций нескольких комплексных переменных и теории обобщенных функций, являющиеся основным математическим аппаратом некоторых направлений современной квантовой теории поля. Попутно изучаются свойства некоторых специальных алгебр аналитических функций. Значительная часть результатов статьи принадлежит автору.

УДК 517:530.14

В. П. Маслов, М. В. Федорюк, **Канонический оператор** (Вещественный случай). «Современные проблемы математики», 1972, 1, 85—167

Рассматриваются однородные дифференциальные уравнения с частными производными и псевдодифференциальные уравнения, содержащие большой параметр, и аналогичные по своим свойствам уравнениям Шредингера и Гельмгольца. Излагается метод канонического оператора, позволяющий построить асимптотические решения в целом для таких классов уравнений. В работе приведены также необходимые сведения по аналитической механике и по теории лагранжевых многообразий.

УДК 517:530.14

В. П. Маслов, Б. Ю. Стернин, **Канонический оператор** (Комплексный случай). «Современные проблемы математики», 1972, 1, 169—195

Излагается метод канонического оператора для комплексного случая. Доказана коцикличность канонической коцепи и установлена основная теорема о коммутации.