ЛИТЕРАТУРА

1. Макоха А. Н. Особые точки тривекторов восьмого ранга в P_7 // Геометрия погружен. многообразий.— М. 1972.— С. 69—97.

2. Макоха А. Н. Линейный комплекс плоскостей, ассоциированный с тривектором типа (886; 410) // Современная геометрия. Вопр. дифференц. геометрии.— Л., 1980.— С. 44—63.

3. Гуревич Г. Б. Алгебра тривектора, II // Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу.— 1948.— № 6.— С. 28—124.

4. Макоха А. Н. Линейные операторы, связанные с тривектором типа (887; 520), и основная группа автоморфизмов этого тривектора // Изв. вузов. Математика.— 1981.— № 7.— С. 46—53.

г. Ставрополь

Поступила
31.03.1986

В. А. Малышев

УДК 519.653

ОПЕРАТОРЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ВОЗРАСТАЮЩЕЙ РАЗНОСТИ

В теории сплайнов с равномерным шагом [1] существенную роль играют многочлены

$$F_n(\lambda,\ z)=(1-z)^{n+1}\sum_{i=0}^{\infty}(i+\lambda)^n z^i.$$

Равенство $F_0(\lambda,\ z)=1$ и тождество

$$F_n(\lambda,\ z)=z(1-z)\,\partial F_{n-1}(\lambda,\ z)/\partial z+[nz+\lambda(1-z)]\,F_{n-1}(\lambda,\ z) \qquad (1)$$

позволяют вычислить эти многочлены при всех желаемых значениях n. Многие свойства многочленов $F_n(\lambda,\ z)$ были изучены в [1]. В данной работе эти многочлены используются для установления связи между операторами дифференцирования и возрастающей разности.

Обозначим через $\boldsymbol{R}^n[x]$ линейное n-мерное пространство вещественных многочленов $f(x)$ степени не выше $n-1$. Определим операторы дифференцирования $Df(x)=f'(x)$, возрастающей разности $\nabla f(x)=f(x)-f(x-1)$ и задержки $zf(x)=f(x-1)$.

Теорема. *Для любого вещественного* λ *диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{R}^n[x] \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d, "D"'] & \boldsymbol{R}^{n-1}[x] \arrow[d, "nF_{n-1}(\lambda,z)"] \\ \boldsymbol{R}^{n-1}[x] \arrow[r, "F_n(\lambda,z)"'] & \boldsymbol{R}^{n-1}[x] \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство. Пусть λ фиксировано. Требуется доказать, что для любого многочлена $f(x)\in\boldsymbol{R}^n[x]$ имеет место равенство

$$F_n(\lambda,\ z)\,Df(x)=nF_{n-1}(\lambda,\ z)\,\nabla f(x). \qquad (2)$$

В кольце многочленов дифференцирование $D=\nabla+\frac{1}{2}\nabla^2+\frac{1}{3}\nabla^3+\ldots$, а задержка $z=1-\nabla$. Поэтому равенство (2) эквивалентно равенству

$$C(\nabla)\,\Phi_n(\lambda,\ \nabla)\,f(x)=n\Phi_{n-1}(\lambda,\ \nabla)\,f(x), \qquad (3)$$

в котором $C(\nabla)=1+\frac{1}{2}\nabla+\frac{1}{3}\nabla^2+\ldots$, а $\Phi_n(\lambda,\ \nabla)=\nabla F_n(\lambda,\ 1-\nabla)$. В пространстве $\boldsymbol{R}^n[x]$ оператор ∇^n действует как нулевой. Поэтому равенство (3) эквивалентно сравнению

$$C(\nabla)\,\Phi_n(\lambda,\ \nabla)\equiv n\Phi_{n-1}(\lambda,\ \nabla)\mod(\nabla^n) \qquad (4)$$

в кольце формальных степенных рядов от переменной ∇. Запишем многочлен $\Phi_n(\lambda, \nabla)$ в виде

$$\Phi_n(\lambda, \nabla) = A_1^n(\lambda)\nabla + A_2^n(\lambda)\nabla^2 + \ldots + A_{n+1}^n(\lambda)\nabla^{n+1}.$$

Тогда сравнение (4) эквивалентно равенствам

$$\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{i+1-j}A_j^n(\lambda) = nA_i^{n-1}(\lambda),\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Равенства (5) доказываются на основании формулы

$$A_i^n(\lambda) = (n+1-i)\left[A_i^{n-1}(\lambda) - A_{i-1}^{n-1}(\lambda)\right] + (\lambda-1)A_{i-1}^{n-1}(\lambda), \tag{6}$$

где $i = 1, 2, \ldots, n+1$, а $A_0^{n-1}(\lambda) = A_{n+1}^{n-1}(\lambda) = 0$. Формула (6) следует из тождества

$$\Phi_n(\lambda, \nabla) = \nabla(\nabla-1)\,\partial\Phi_{n-1}(\lambda, \nabla)/\partial\nabla + [n+1-n\nabla+(\lambda-1)\nabla]\,\Phi_{n-1}(\lambda, \nabla),$$

которое следует из тождества (1).

Докажем равенства (5) индукцией по n. При $n=1$ имеем $i=1$, поэтому равенство (5) совпадает с равенством (6). Пусть при $n-1$ равенства (5) доказаны. Тогда при $i=1$ равенство (5) совпадает с равенством (6). Далее индукцией по $i = 2, \ldots, n$ имеем

$$\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{i+1-j}A_j^n(\lambda) = \sum_{j=1}^{i}\left\{\frac{n+1-j}{i+1-j}\left[A_j^{n-1}(\lambda) - A_{j-1}^{n-1}(\lambda)\right] + \frac{\lambda-1}{i+1-j}A_{j-1}^{n-1}(\lambda)\right\} =$$

$$= (n-i)\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{i+1-j}\left[A_j^{n-1}(\lambda) - A_{j-1}^{n-1}(\lambda)\right] + \sum_{j=1}^{i}\left[A_j^{n-1}(\lambda) - A_{j-1}^{n-1}(\lambda)\right] +$$

$$+ (\lambda-1)\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{i+1-j}A_{j-1}^{n-1}(\lambda) = (n-i)(n-1)\left[A_i^{n-2}(\lambda) - A_{i-1}^{n-2}(\lambda)\right] + A_i^{n-1}(\lambda) +$$

$$+ (\lambda-1)(n-1)A_{i-1}^{n-2}(\lambda) = A_i^{n-1}(\lambda) + (n-1)\left\{(n-i)\left[A_i^{n-2}(\lambda) - A_{i-1}^{n-2}(\lambda)\right] +\right.$$

$$\left. + (\lambda-1)A_{i-1}^{n-2}(\lambda)\right\} = A_i^{n-1}(\lambda) + (n-1)A_i^{n-1}(\lambda) = nA_i^{n-1}(\lambda).$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике.— М.: Наука, 1976.— 248 с.

г. Андропов

Поступила
26.03.1986

Б. П. Осиленкер

УДК 517.518

РЯДЫ ФУРЬЕ ПО ОРТОНОРМИРОВАННЫМ МАТРИЧНЫМ ПОЛИНОМАМ

Введение

Темой наших исследований являются ряды Фурье по ортонормированным матричным полиномам, впервые введенным М. Г. Крейном в связи с изучением матричной проблемы моментов ([1], см. также [2]). Кроме естественной попытки обобщения скалярной теории, изучение матричных разложений стимулировалось различными приложениями: исследование операторов с