

НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ  
«КОРОТКИХ ВОЛН»

*Б. И. Заславский*

(Новосибирск)

Определяется класс точных решений уравнений «коротких волн» и околзвучных течений. Для плоских течений решения этого класса были получены О. А. Безиным и А. А. Грибом [1].

§ 1. «Короткими волнами» в работе О. С. Рыжова и С. А. Христиановича [2] названы течения с небольшими, но резкими изменениями параметров среды. Там же развиты общие принципы теории и получены уравнения «коротких волн».

В сферической системе координат  $r, \theta$ , при симметрии относительно оси  $\theta = \pi/2$  уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial \tau} + (\mu - \delta) \frac{\partial \mu}{\partial \delta} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} + k\mu &= 0 \quad (k=1) \\ \frac{\partial v}{\partial \delta} - \frac{\partial \mu}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Для плоскопараллельных течений, рассматриваемых в цилиндрической системе координат, уравнения отличаются только значением  $k$ ; в этом случае  $k = 1/2$ .

Безразмерные функции и координаты  $\mu, v, y, \delta$  определяются равенствами

$$\begin{aligned} u &= a_0 M_0 \mu, & v &= a_0 V_0 \sqrt{\frac{n+1}{2}} v, & r &= a_0 t \left[ 1 + \frac{n+1}{2} M_0 \delta \right] \\ \tau &= lnt, & V_0 &= M_0 \sqrt{M_0}, & \theta &= \sqrt{\frac{n+1}{2}} M_0 y \end{aligned}$$

Здесь  $a_0$  — начальная скорость звука,  $u, v$  — проекция вектора скорости на направление радиуса вектора и направление, перпендикулярное к нему;  $\mu, v$  — величина порядка единицы;  $M_0, V_0$  — постоянные значительно меньше единицы.

Переход от цилиндрической системы координат  $r, \theta$  к декартовой  $X, Y$  осуществляется по формулам

$$X = a_0 t \left[ 1 + \frac{n+1}{2} M_0 x \right], \quad Y = r\theta = a_0 t \sqrt{\frac{n+1}{2}} M_0 y, \quad \delta = x + \frac{i}{2} y^2$$

В работе [3] показано, что основную зависимость решений уравнений [1.1] от времени можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mu &= [\mu^\circ + \mu_0(\tau)] e^{-b\tau}, & \delta &= [\delta^\circ + \delta_0(\tau)] e^{-b\tau} \\ v &= \left[ v^\circ - 2 \frac{d\mu_0(\tau)}{d\tau} y^\circ - 2(k-b) \mu_0(\tau) y^\circ \right] e^{-3b\tau/2} \\ y &= y^\circ e^{-b\tau/2}, & \mu_0 &= \frac{d\delta_0(\tau)}{d\tau} - (b-1) \delta_0(\tau) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $\mu_0(\tau)$  — произвольная функция времени.

Возьмем в качестве независимых переменных величины  $\tau$ ,  $y^\circ$  и  $\delta^\circ$ . Система уравнений коротких волн в новых переменных примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu^\circ}{\partial \tau} + [\mu^\circ + (b-1)\delta^\circ] \frac{\partial \mu^\circ}{\partial \delta^\circ} + \frac{1}{2} b y^\circ \frac{\partial \mu^\circ}{\partial y^\circ} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^\circ}{\partial y^\circ} + (k-b)\mu^\circ = 0 \\ \frac{\partial v^\circ}{\partial \delta^\circ} - \frac{\partial \mu^\circ}{\partial y^\circ} = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

§ 2. Уравнения (1.3) имеют систему точных решений вида

$$\begin{aligned} \mu^\circ &= \Phi_2(q, \tau) y^{\circ 2} + \Phi_1(q, \tau) \\ v^\circ &= \Psi_3(q, \tau) y^{\circ 3} + \Psi_1(q, \tau) y^{\circ 2} + v_0(\tau) \\ \delta^\circ &= q y^{\circ 2} + \chi_1(q, \tau) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Для определения функций  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$ ,  $\Psi_3$ ,  $\Psi_1$ ,  $\chi_1$  имеем систему уравнений, где индексами обозначены частные производные по соответствующим аргументам:

$$\begin{aligned} \Phi_{2\tau} + \Phi_{2q}(\Phi_2 - q) + \frac{3}{2} \Psi_3 - q\Psi_{3q} + k\Phi_2 = 0 \\ \Psi_{3q} + 2\Phi_{2q}q - 2\Phi_2 = 0 \\ \Phi_{2\tau}\chi_{1q} + \Phi_{1\tau} - b\Phi_1 - \Phi_{2q}\chi_{1\tau} + b\Phi_{2q}\chi_1 + \Phi_{2q}\Phi_{1q} - q\Phi_{1q} + \Phi_1\Phi_{2q} - \\ - \chi_1\Phi_{2q} + \frac{3}{2} \Psi_3\chi_{1q} + \frac{1}{2} \Psi_1 + \Psi_{1q}q + k\Phi_2\chi_{1q} + k\Phi_1 = 0 \\ \Psi_{1q} - 2\Phi_2\chi_{1q} + 2q\Phi_{1q} = 0 \\ \Phi_{1\tau}\chi_{1q} - \Phi_{1q}\chi_{1\tau} + b\chi_1\Phi_{1q} - b\Phi_{1q}\chi_{1\tau} + \Phi_{1q}(\Phi_1 - \chi_1) + \frac{1}{2} \Psi_1\chi_{1q} + k\Phi_1\chi_{1q} = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Эта система может быть приведена к виду

$$\begin{aligned} \chi_{1\tau} + (\Phi_2 - q + 2q^2)\chi_{1q} - b\chi_1 + \chi_1 - \Phi_1 = 0 \\ \Phi_{1\tau} + (\Phi_2 - q + 2q^2)\Phi_{1q} - b\Phi_1 + k\Phi_1 + \frac{1}{2} \Psi_1 = 0 \\ \Psi_{1q} + 2q\Phi_{1q} - 2\Phi_2\chi_{1q} = 0 \\ \Psi_3 = -\frac{3}{2} [\Phi_{2\tau} + \Phi_{2q} - (\Phi_2 - q + 2q^2) + k\Phi_2 - 2q\Phi_2] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Причем  $\Phi_2$  удовлетворяет уравнению

$$\Phi_{2q\tau} = \Phi_{2q}(\Phi_2 - q + 2q^2) + \Phi_{2q}^2 + \Phi_{2q}(k-1-q) + \Phi_2 = 0 \quad (2.4)$$

§ 3. Уравнение (2.4) подстановкой

$$\Phi_2 = \frac{1}{2} q^2 + \frac{1}{3} (2-k)q + \frac{1}{54} (1+k)^2 + \frac{3}{2} z \quad q = \xi - \frac{1}{9} (1+k)$$

приводится к уравнению

$$\frac{2}{3} z_{\tau\xi} + z_{\xi\xi}(z + \xi^2) + z_{\xi}(z_{\xi} - 2\xi) = \alpha \quad (3.1)$$

Здесь

$$\alpha = -\frac{4}{81} \text{ при } k=1, \quad \alpha = 0 \text{ при } k=1/2$$

Пусть  $\alpha = -\frac{4}{81}$ . Рассмотрим уравнение

$$z_{\xi\xi}[z + \xi^2] + z_{\xi}[z_{\xi} - 2\xi] = 0 \quad (3.2)$$

Это уравнение имеет решения

$$z = C, \quad z = A \sqrt{\xi + B} - \frac{4}{3} B \xi - \frac{8}{3} B^2 \quad (3.3)$$

где  $A, B, C$  — постоянные.

Решение уравнения (3.1) будем искать в виде

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} z_n \alpha^n$$

Причем за  $z_0$  возьмем одно из решений уравнения (3.2). Пусть  $z = C$ , тогда для определения  $z_n$  имеем уравнения

$$\frac{2}{3} z_n \xi \tau + z_n \xi \xi (C + \xi^2) - 2 \xi z_n \xi = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (z_{n-1-i} z_i) \xi \xi \quad (3.4)$$

Отсюда для  $z_n$  получаем

$$z_n = -\frac{1}{2} \int (\xi^2 + C) \left[ \int \sum_{i=1}^{n-1} (z_{n-1-i} z_i) \xi \xi \frac{d\xi}{(\xi^2 + C)^2} + \right. \\ \left. + f_n \left( \tau + \int \frac{2d\xi}{3(\xi^2 + C)^2} \right) \right] d\xi + S_n(\tau) \quad (3.5)$$

Здесь  $f_n, S_n$  — произвольные функции.

При  $\alpha = 0$  и, следовательно,  $k = 1/2$  можно указать два частных решения уравнения (2.4)

$$\varphi_2 = A \sqrt{q + B} - 2Bq - 4B^2 + B \\ \varphi_2 = -\frac{1}{2} q^2 + \frac{i}{2} q + C(\tau) \quad (3.6)$$

Кроме указанных решений, уравнение (2.4) имеет решения при  $k = 1$

$$\varphi_2 = \frac{q}{\tau + C}, \quad \varphi_2 = Aq - A^2 \quad (3.7)$$

§ 4. Рассмотрим первые два уравнения системы (2.3). Продифференцируем их по  $q$  и выразим  $\psi_{1q}$  из третьего уравнения. Получим систему двух уравнений

$$\chi_{1q\tau} + (\varphi_2 - q + 2q^2) \chi_{1qq} + \chi_{1q} (\varphi_{2q} - 1 + 4q) - b \chi_{1q} + \chi_{1q} - \varphi_{1q} = 0 \\ \varphi_{1q\tau} + (\varphi_2 - q + 2q^2) \varphi_{1qq} + \varphi_{1q} (\varphi_{2q} - 1 + 4q) - \\ - b \varphi_{1q} + k \varphi_{1q} + \varphi_2 \chi_{1q} - q \varphi_{1q} = 0 \quad (4.1)$$

Положим

$$\varphi_{1q} = \varphi_{2q} v + u, \quad \chi_{1q} = v \quad (4.2)$$

Система (4.1) примет вид

$$v_\tau + (\varphi_2 - q + 2q^2) v_q + v(4q - b) - u = 0 \\ v [\varphi_{2q\tau} + \varphi_{2qq} (\varphi_2 - q + 2q^2) + \varphi_{2q}^2 + \varphi_{2q} (k - 1 - q) + \varphi_2] + \\ + \varphi_{2q} [v_\tau + v_q (\varphi_2 - q + 2q^2) + v(4q - b)] + \\ + u_\tau + (\varphi_2 - q + 2q^2) u_q + u (\varphi_{2q} - 1 + 3q + k - b) = 0 \quad (4.3)$$

Используя уравнение (2.4), получаем

$$u_\tau + (\varphi_2 - q + 2q^2) u_q + u (2\varphi_{2q} - 1 + 3q + k - b) = 0 \\ v_\tau + (\varphi_2 - q + 2q^2) v_q + v(4q - b) - u = 0 \quad (4.4)$$

Таким образом, в общем случае нахождение решений вида (2.1) сводится к интегрированию уравнения (2.4) и двух линейных уравнений в частных производных первого порядка.

Если  $\varphi_2$  не зависит от времени, то решение системы (2.3) может быть получено в квадратурах

$$\begin{aligned}\psi_3 &= -\frac{2}{3} [\varphi_{2q} (\varphi_2 - q + 2q^2) + k\varphi_2 - 2q\varphi_2] \\ \psi_1 &= -2\varphi_{1\tau} - 2\varphi_{1q} (\varphi_2 - q + 2q^2) - 2(k-b)\varphi_1 \\ \varphi_1 &= \int \left\{ F_1 \left( \tau - \int \frac{dq}{\varphi_2 - q + 2q^2} \right) \left( \exp - \int \frac{2\varphi_{2q} - 1 + 3q + k - b}{\varphi_2 - q + 2q^2} dq \right) + \right. \\ &\quad \left. + \varphi_{2q} \exp \left( - \int \frac{4q - b}{\varphi_2 - q + 2q^2} \right) \left[ \int F_1 \left( \tau - \int \frac{dq}{\varphi_2 - q + 2q^2} \right) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left[ \exp \left( - \int \frac{2\varphi_{2q} - 1 - q + k}{\varphi_2 - q + 2q^2} dq \right) \right] dq + F_2 \left( \tau - \int \frac{dq}{\varphi_2 - q + 2q^2} \right) \right] \right\} dq \\ \chi_1 &= \int \exp \left( - \int \frac{4q - b}{\varphi_2 - q + 2q^2} dq \right) \left[ \int F_1 \left( \tau - \int \frac{dq}{\varphi_2 - q + 2q^2} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \exp \left( - \int \frac{2\varphi_{2q} - 1 - q + k}{\varphi_2 - q + 2q^2} dq \right) dq + F_2 \left( \tau - \int \frac{dq}{\varphi_2 - q + 2q^2} \right) \right] dq\end{aligned}$$

Здесь  $F_1$  и  $F_2$  — производные функции.

§ 5. Решения, аналогичные рассмотренным выше, можно построить для уравнений нестационарных околосвуковых течений, как плоских, так и осесимметричных.

Такие течения приближенно описываются уравнением (см. 4)

$$-4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \tau} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + k \frac{1}{y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (5.1)$$

В этом уравнении

$$\begin{aligned}\frac{a_*}{\kappa + 1} \varphi(x, y, \tau) &= \Phi(x, y, \tau) - a_* x \\ \varphi_*^2 &\ll a_* x, \quad \tau = 2a_* t\end{aligned}$$

Здесь  $\Phi$  — потенциал скорости,  $\kappa$  — показатель адиабаты,  $k = 0$  для случая плоского движения и  $k = 1$  для движения с осевой симметрией,  $a_*$  — критическая скорость звука. Положим

$$\mu = -2 \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \nu = 2 \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad x = -\delta \quad (5.2)$$

Функции  $\mu$  и  $\nu$  связаны с составляющими скорости потока по координатам  $v_x$  и  $v_y$  следующими равенствами

$$v_{x1} = -\frac{1}{2} \frac{a_*}{\kappa + 1} \mu, \quad v_y = \frac{1}{2} \frac{a_*}{\kappa + 1} \nu$$

Подставив (5.2) в (5.1), получим систему уравнений

$$\frac{\partial \mu}{\partial \tau} + \mu \frac{\partial \mu}{\partial \delta} + \frac{1}{2} \frac{\partial \nu}{\partial y} + k \frac{\nu}{y} = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\partial \nu}{\partial \delta} = 0 \quad (5.3)$$

Система (5.3) имеет частные решения

$$\begin{aligned} \mu &= \varphi_2(q, \tau) y^2 + \int (\varphi_{2q} v + u) dq \\ v &= \psi_3(q, \tau) y^3 + 2y \int [\varphi_2 v - q \varphi_{2q} v - qu] dq \\ \delta &= qy^2 + \int v dq \end{aligned} \quad (5.4)$$

Здесь  $u(q, \tau)$ ,  $\psi_3(q, \tau)$  и  $v(q, \tau)$  определяются из уравнений

$$\begin{aligned} v_\tau + v_q(\varphi_2 + 2q^2) + 4qv - u &= 0 \\ \psi_3 &= -\frac{2}{3+2k} [\varphi_{2\tau} + \varphi_{2q}(\varphi_2 + 2q^2) - 2\varphi_{2q}] \\ u_\tau + u_q(\varphi_2 + 2q^2) + u(2\varphi_{2q} + 3q - 2kq) &= 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Функция  $\varphi_2$  определяется из уравнения

$$\varphi_{2\tau q} + \varphi_{2q}(\varphi_2 + 2q^2) + \varphi_{2q}^2 - (1+2k)\varphi_{2q}q + (1+2k)\varphi_2 = 0 \quad (5.6)$$

При  $k=0$  это уравнение имеет частные решения

$$\varphi_2 = -\frac{1}{2}q^2 + C(\tau), \quad \varphi_2 = A\sqrt{q+B} - 2Bq - 4B^2 \quad (5.7)$$

Если  $\varphi_2$  не зависит от времени, то

$$\begin{aligned} u &= F_1\left(\tau - \int \frac{dq}{\varphi_2 + 2q^2}\right) \left(\exp - \int \frac{2\varphi_{2q} + 3q - 2kq}{\varphi_2 + 2q^2} dq\right) \\ v &= \left(\exp - \int \frac{4q dq}{\varphi_2 + 2q^2}\right) \left[ F_1\left(\tau - \int \frac{dq}{\varphi_2 + 2q^2}\right) \left(\exp - \int \frac{2\varphi_{2q} - q - 2kq}{\varphi_2 + 2q^2} dq\right) dq + \right. \\ &\quad \left. + F_2\left(\tau - \int \frac{dq}{\varphi_2 + 2q^2}\right) \right] \end{aligned} \quad (5.8)$$

Отметим, что решения уравнений «коротких волн» и околосзвуковых течений, опубликованные в работах [1, 2, 5], могут быть получены из приведенных выше решений, если положить  $F_1 \equiv 0$ ,  $F_2 = \text{const}$  и соответствующим образом выбрать функцию  $\varphi_2$ .

В заключение автор благодарит С. А. Христиановича за внимание к работе.

Поступила 9 XI 1961

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Березин О. А., и Гриб А. А. Нерегулярное отражение плоской ударной волны в воде от свободной поверхности. ПМТФ, 1960, № 2.
2. Рыжов О. С., Христианович С. А. О нелинейном отражении слабых ударных волн. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 5.
3. Гриб А. А., Рыжов О. С., Христианович С. А. Теория коротких волн, ПМТФ, 1960, № 1.
4. Рыжов О. С., Шефтер Г. М. О нестационарных течениях газа в соплах Лавала. ДАН СССР, № 3, т. 128, 1959.
5. Фалькович С. В. К теории сопла Лавала. ПММ, 1956, т. X, вып. 4.