Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

F. G. Avkhadiev, Integral inequalities of Hardy and Rellich in domains satisfying an exterior sphere condition,
Algebra i Analiz, 2018, Volume 30, Issue 2, 18–44

https://www.mathnet.ru/eng/aa1579

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.89
April 19, 2025, 21:51:33

Алгебра и анализ
Том 30 (2018), №2

Владимиру Ивановичу Смирнову к его 130-летию

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ХАРДИ И РЕЛЛИХА В ОБЛАСТЯХ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ ВНЕШНЕЙ СФЕРЫ

© Ф. Г. АВХАДИЕВ

Для функций, финитных в областях евклидова пространства, изучаем аналоги неравенств Харди и Реллиха, когда весовые функции являются степенью расстояния от точки до границы области, а области удовлетворяют условию внешней сферы. Доказаны явные оценки констант, входящих в эти неравенства, в зависимости от размерности, показателя степени весовой функции и двух геометрических характеристик области: величины радиуса в условии внешней сферы и внутреннего радиуса области.

§1. Введение

Основной целью настоящей статьи является получение явных оценок снизу для трех функционалов, определенных для области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ как точные константы в соответствующих неравенствах типа Харди и Реллиха. Рассмотрим сначала следующее, хорошо известное неравенство типа Харди: для любой вещественнозначной функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int\limits_\Omega \frac{|\nabla f(x)|^p}{\mathrm{dist}^{s-p}(x,\partial\Omega)}dx \geqslant c_p(s,\Omega) \int\limits_\Omega \frac{|f(x)|^p}{\mathrm{dist}^{s}(x,\partial\Omega)}dx. \tag{1.1}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — область, не совпадающая с евклидовым пространством $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$, $p \in [1,\infty)$ и $s \in (1,\infty)$ — фиксированные параметры, $\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)$ — расстояние от точки x до границы области, $C_0^\infty(\Omega)$ — семейство гладких функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$, таких, что $\mathrm{supp} f \subset \Omega$. Будем считать,

---

Ключевые слова: неравенство Харди, неравенство Реллиха, условие внешней сферы, невыпуклая область.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 17-01-00282-а.

что постоянная $c_p(s,\Omega) \in [0,\infty)$ является максимальной, т.е.

$$c_p(s,\Omega) = \inf_{\substack{f\in C_0^\infty(\Omega),\\ f\not\equiv 0}} \frac{\int\limits_\Omega |\nabla f(x)|^p \mathrm{dist}^{p-s}(x,\partial\Omega)dx}{\int\limits_\Omega |f(x)|^p \mathrm{dist}^{-s}(x,\partial\Omega)dx}.$$

Очевидно, неравенство (1.1) имеет смысл лишь в том случае, когда константа $c_p(s,\Omega)$ является положительным числом, что имеет место лишь для "хороших" областей. Ряд результатов по оценкам $c_p(s,\Omega)$ читатель может найти в недавно изданной книге [1], в которой впервые систематизированы и изложены с полными доказательствами основные факты по многомерным неравенствам типа Харди и их приложениям. В частности, хорошо известно, что величина $c_p(p,\Omega) > 0$ для ограниченных областей с локально липшицевыми границами, но проблема явных оценок констант является актуальной даже в этом случае.

Мы рассмотрим также два следующих аналога неравенства Реллиха в невыпуклых областях $\Omega \subset \mathbb{R}^d$:

$$\int\limits_\Omega |\Delta f(x)|^2\, dx \geqslant C_2(\Omega) \int\limits_\Omega \frac{|f(x)|^2}{\mathrm{dist}^4(x,\partial\Omega)}\, dx \quad \forall f \in C_0^\infty(\Omega), \tag{1.2}$$

$$\int\limits_\Omega \mathrm{dist}^2(x,\partial\Omega)|\Delta f(x)|^2\, dx \geqslant C_2^*(\Omega) \int\limits_\Omega \frac{|f(x)|^2}{\mathrm{dist}^2(x,\partial\Omega)}\, dx \quad \forall f \in C_0^\infty(\Omega), \tag{1.3}$$

где постоянные $C_2(\Omega) \in [0,\infty)$ и $C_2^*(\Omega) \in [0,\infty)$ определены равенствами

$$C_2(\Omega) = \inf_{f\in C_0^\infty(\Omega), f\not\equiv 0} \frac{\int\limits_\Omega |\Delta f(x)|^2\, dx}{\int\limits_\Omega |f(x)|^2 \mathrm{dist}^{-4}(x,\partial\Omega)\, dx},$$

$$C_2^*(\Omega) = \inf_{f\in C_0^\infty(\Omega), f\not\equiv 0} \frac{\int\limits_\Omega |\Delta f(x)|^2 \mathrm{dist}^2(x,\partial\Omega)\, dx}{\int\limits_\Omega |f(x)|^2 \mathrm{dist}^{-2}(x,\partial\Omega)\, dx}.$$

Нашей целью является получение нижних оценок $c_p(s,\Omega)$, $C_2(\Omega)$ и $C_2^*(\Omega)$ для области, удовлетворяющей условию внешней сферы с заданным радиусом $\lambda_0(\Omega)$ и имеющей конечный внутренний радиус

$$\delta_0(\Omega) = \sup_{x\in\Omega} \mathrm{dist}(x,\partial\Omega).$$

Мы докажем, что условия $\lambda_0(\Omega) > 0$ и $\delta_0(\Omega) < \infty$ гарантируют положительность постоянных $c_p(s,\Omega)$, $C_2(\Omega)$ и $C_2^*(\Omega)$. Более того, получим оценки снизу для $c_p(s,\Omega)$ в зависимости от размерности $d \geqslant 2$, параметров

$p \in [1,\infty)$, $s \in (1,\infty)$ и числовой характеристики

$$\gamma_0(\Omega) := 1 + \delta_0(\Omega)/\lambda_0(\Omega) \in (1,\infty),$$

а также оценим снизу $C_2(\Omega)$ и $C_2^*(\Omega)$ в зависимости от $d \geqslant 2$ и $\gamma_0(\Omega)$.

Отметим простой, но важный факт, который связан с выбором показателей степени $\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)$ в неравенствах (1.1), (1.2) и (1.3): константы $C_2(\Omega)$, $C_2^*(\Omega)$ и $c_p(s,\Omega)$ являются безразмерными величинами. Более того, если $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $b \in \mathbb{R}^d$ и $a\,\Omega + b := \{a\,x + b : x \in \Omega\}$, то справедливы равенства

$$C_2(\Omega) = C_2(a\,\Omega + b), \quad C_2^*(\Omega) = C_2^*(a\,\Omega + b), \quad c_p(s,\Omega) = c_p(s, a\,\Omega + b),$$

т.е. константы $C_2(\Omega)$, $C_2^*(\Omega)$ и $c_p(s,\Omega)$ являются инвариантами линейных конформных преобразований области. Очевидно, геометрическая характеристика области $\gamma_0(\Omega)$ также является безразмерной величиной, удовлетворяющей равенству $\gamma_0(\Omega) = \gamma_0(a\,\Omega + b)$. Отметим попутно, что семейство областей с конечным $\gamma_0(\Omega)$ включает в себя и неограниченные области.

Опишем теперь кратко известные факты, необходимые нам для сравнения результатов. Неравенство (1.1) справедливо для любой выпуклой области $\Omega \neq \mathbb{R}^d$ с положительной постоянной $c_p(s,\Omega)$. Более того, при любых допустимых значениях параметров $p \in [1,\infty)$ и $s \in (1,\infty)$ для любой выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geqslant 2$, $\Omega \neq \mathbb{R}^d$) доказано, что

$$c_p(s,\Omega) = \left(\frac{s-1}{p}\right)^p \tag{1.4}$$

(см. [2, 3, 4, 5] для случая $p = s$ и [6, 7, 8] для случая $p \neq s$, а также [9, 10, 11] для случая $p = s = 2$ при наличии дополнительных слагаемых). Существуют и невыпуклые области, для которых имеет место равенство (1.4) (см. [3, 4, 5, 12, 13, 14]).

Известно также [15, 16], что $C_2(\Omega) = 9/16$ и $C_2^*(\Omega) = 1/16$ для любой выпуклой области $\Omega \neq \mathbb{R}^d$ и для некоторых невыпуклых областей.

С другой стороны, если $p \in [1,\infty)$, $s \in (1,d]$, то существуют области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($\Omega \neq \mathbb{R}^d$), для которых $c_p(s,\Omega) = 0$, т.е. существуют области, для которых неравенство (1.1) не имеет смысла (см., например, [4, 6, 7]).

Если $p \in [1,\infty)$, $s \in (d,\infty)$, то, как доказано автором в [6] и [7], для любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geqslant 2$, $\Omega \neq \mathbb{R}^d$), имеет место оценка

$$c_p(s,\Omega) \geqslant \left(\frac{s-d}{p}\right)^p. \tag{1.5}$$

Оценка (1.5) является оптимальной, так как для любого $d \geqslant 2$, любых $p \in [1,\infty)$, $s \in (d,\infty)$ существуют d-мерные области $\Omega' \neq \mathbb{R}^d$, для которых имеет место равенство $c_p(s,\Omega') = (s-d)^p/p^p$ (см. [6] и [7]).

Если $1 < s \leqslant d$ и область $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ невыпукла, то вопрос о явных нижних оценках для $c_p(s,\Omega)$, $C_2(\Omega)$ и $C_2^*(\Omega)$ в зависимости от геометрических характеристик области остается открытым. Исключение здесь составляют двумерные области. А именно, если $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и $p \in [1,\infty)$, то (см. [6] и [16])

$$c_p(2,\Omega) > 0 \Longleftrightarrow C_2(\Omega) > 0 \Longleftrightarrow C_2^*(\Omega) > 0 \Longleftrightarrow M_0(\Omega) < \infty,$$

где $M_0(\Omega)$ — точная верхняя граница модулей колец, лежащих в области Ω и разделяющих ее границу. Получены явные нижние и верхние оценки для $c_p(2,\Omega)$, $C_2(\Omega)$ и $C_2^*(\Omega)$ в зависимости от безразмерной геометрической характеристики $M_0(\Omega)$ (см. [6, 16] и [17]).

Известны равенства $c_p(s,\Omega) = c_p(s,\Omega\times\mathbb{R}^k)$ и $C_2(\Omega) = C_2(\Omega\times\mathbb{R}^k)$ (см. [16, 18] и [19]), позволяющие переносить оценки констант $c_p(s,\Omega)$ и $C_2(\Omega)$ для d-мерных областей $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ на случай цилиндрических областей $\Omega\times\mathbb{R}^k$ размерности $d+k$.

Настоящая статья организована следующим образом.

Раздел 2 содержит наш основной результат по оценке $c_p(s,\Omega)$ в зависимости от величин d, p, s и $\gamma_0(\Omega)$: в подразделе 2.1 приведены необходимые определения, формулировка основной теоремы и ее сравнение с известными результатами, в 2.2 доказаны вспомогательные результаты, и в 2.3 дано доказательство основной теоремы.

В разделе 3 получены оценки констант $C_2(\Omega)$ и $C_2^*(\Omega)$.

В разделе 4 описаны свойства и примеры областей, удовлетворяющих условию внешней сферы с заданным радиусом λ. Такие области мы называем **λ-близкими к выпуклым**, хотя они могут сильно отличаться от выпуклых с точки зрения наглядной геометрии. Согласно нашему определению, любая выпуклая область $\Omega \neq \mathbb{R}^d$ является λ-близкой к выпуклой для произвольного числа $\lambda \in (0,\infty)$. Образно говоря, любая выпуклая область $\Omega \neq \mathbb{R}^d$ является бесконечно близкой к выпуклой.

§2. Оценки константы $c_p(s,\Omega)$ для областей, λ-близких к выпуклым

2.1. Определения и формулировка основного результата. В математической литературе выражения “условие внешней сферы” и “условие внешнего шара” можно найти с различными толкованиями. Мы будем пользоваться следующим определением, предложенным в [16].

Определение 2.1. Предположим, что λ — фиксированное положительное число, d — натуральное число, $d \geqslant 2$. Будем говорить, что область

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ является λ-близкой к выпуклой, если $\Omega \neq \mathbb{R}^d$ и для любой граничной точки $y \in (\partial\Omega) \setminus \{\infty\}$ существует такая точка $a_y \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$, что $|y - a_y| = \lambda$ и $B_y = \{x \in \mathbb{R}^d : |x - a_y| < \lambda\} \subset \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$.

Очевидно, если область $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ в этом определении является ограниченной, то условие $\Omega \neq \mathbb{R}^d$ выполняется автоматически и $(\partial\Omega)\setminus\{\infty\} = \partial\Omega$.

В дальнейшем мы будем рассматривать области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, λ-близкие к выпуклой с заданным радиусом $\lambda = \lambda_0(\Omega) \in (0, \infty)$. Нам также потребуются положительные числа $\alpha = \alpha_d(s) \in (0, +\infty)$ и $\beta = \beta_d(s, \gamma) \in (1, \gamma)$, однозначно определяемые как единственные корни соответствующих уравнений. А именно, число $\alpha_d(s)$ — положительный корень алгебраического уравнения $P(\alpha) = 0$ при фиксированных $s \in (1, 2)$ и $d \geqslant 2$, где

$$P(\alpha) = \frac{(\alpha+1)^{d-1}}{(d-1)!} - \sum_{k=0}^{d-2} \frac{\alpha^{k+1}}{k!\,(d-k-2)!\,(k-s+2)}, \quad 0 < \alpha < \infty. \tag{2.1}$$

Пусть d — натуральное число, $d \geqslant 2$, и пусть

$$s \in (1, 2), \quad \gamma \in (1 + \alpha_d(s), \infty) \quad \text{или} \quad s \in [2, \infty), \quad \gamma \in (1, \infty).$$

Тогда число $\beta = \beta_d(s, \gamma) \in (1, \gamma)$, определяется как единственный корень уравнения $T(\beta) = 0$, где

$$T(\beta) = -\frac{1}{(\beta-1)^{s-1}} + \frac{(s-d)\beta + d - 1}{\beta^d} \int_\beta^\gamma \frac{r^{d-1}}{(r-1)^s} dr, \quad \beta \in (1, \gamma). \tag{2.2}$$

Определение 2.2. Предположим, что $s \in (1, \infty)$, $\gamma \in (1, \infty)$ и d — натуральное число, $d \geqslant 2$. Полагаем

$$\mu(d, s, \gamma) = \begin{cases} s - 1, & \text{если } s \in (1, 2) \text{ и } \gamma \leqslant 1 + \alpha_d(s); \\ s - d + (d-1)/\beta_d(s, \gamma), & \text{если } s \in (1, 2), \text{ но } \gamma > 1 + \alpha_d(s); \\ s - d + (d-1)/\beta_d(s, \gamma), & \text{если } s \in [2, \infty). \end{cases}$$

Если $1 < s < 2$, $d = 2$ или $d = 3$, то $\alpha_d(s)$ определяются явно:

$$\alpha_2(s) = (2-s)/(s-1), \quad \alpha_3(s) = (2-s)/\big(\sqrt{s-1} + 1/\sqrt{3-s}\big).$$

Кроме того, $\alpha_d(s)$ убывает с ростом d и удовлетворяет неравенствам

$$(2-s)/(d+s-3) \leqslant \alpha_d(s) \leqslant (2-s)/(s-1). \tag{2.3}$$

Существование и единственность корня уравнения $T(\beta) = 0$ будут показаны ниже. В общем случае уравнение $T(\beta) = 0$ является трансцендентным и не решается в явном виде. Но имеются исключительные случаи, например, легко показать, что $\beta_2(3, \gamma) = \gamma/\sqrt{2\gamma - 1}$.

Нашим основным результатом является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть d — натуральное число, $d \geqslant 2$, и пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — область, λ-близкая к выпуклой с радиусом $\lambda = \lambda_0(\Omega) \in (0,\infty)$. Предположим, что $p \in [1,\infty)$, $s \in (1,\infty)$, внутренний радиус области $\delta_0(\Omega) \in (0,\infty)$. Тогда для любой функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$*

$$\int\limits_\Omega \frac{|\nabla f(x)|^p}{\operatorname{dist}^{s-p}(x,\partial\Omega)}\,dx \geqslant \frac{\mu^p(d,s,\gamma)}{p^p}\int\limits_\Omega \frac{|f(x)|^p}{\operatorname{dist}^s(x,\partial\Omega)}\,dx, \tag{2.4}$$

где $\gamma = \gamma_0(\Omega) = 1 + \delta_0(\Omega)/\lambda_0(\Omega)$, а для $\mu(d,s,\gamma)$ справедливы оценки

$$\mu(d,s,\gamma) \geqslant \max\left\{\frac{s-1}{\gamma^{d-1}},\, s-d+\frac{d-1}{\gamma}\right\}, \quad \mu(d,d,\gamma) \geqslant \frac{1}{1+\ln\gamma}. \tag{2.5}$$

Поскольку $c_p(s,\Omega)$ определена как максимальная константа в неравенстве (1.1) и $c_p(s,\Omega) = c_p(s,\Omega\times\mathbb{R}^k)$, то имеет место следующее утверждение.

Следствие 2.1. *Пусть d и k — натуральные числа, $d \geqslant 2$, $k \geqslant 1$, и пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — область, λ-близкая к выпуклой с радиусом $\lambda = \lambda_0(\Omega) \in (0,\infty)$. Предположим, что $p \in [1,\infty)$, $s \in (1,\infty)$, внутренний радиус области $\delta_0(\Omega) \in (0,\infty)$. Тогда $c_p(s,\Omega) = c_p(s,\Omega\times\mathbb{R}^k) \geqslant \mu^p(d,s,\gamma_0(\Omega))/p^p$.*

В определении величины $\mu(d,s,\gamma)$ (см. выше определение 2.2) участвуют числа $\alpha_d(s)$ и $\beta_d(s,\gamma)$, однозначно определяемые как корни некоторых уравнений. Поскольку соответствующие уравнения решаются в явном виде лишь в частных случаях, то имеет смысл получить явные оценки снизу для $\mu(d,s,\gamma)$ в зависимости от заданных параметров d, s и γ. В теореме 2.1 мы привели несколько таких оценок.

Пользуясь первым неравенством из (2.5), сравним теорему 2.1 с известными результатами. Для простоты ограничимся случаем $p = 1$. Из (1.4) получаем, что $c_1(s,\Omega) = s-1$ для выпуклой области при любом $s \in (1,\infty)$, и из (1.5) следует, что $c_1(s,\Omega) \geqslant s-d$ для произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ при любом $s \in (d,\infty)$. С другой стороны, из теоремы 2.1 следует, что для области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, λ-близкой к выпуклой с радиусом $\lambda = \lambda_0(\Omega) \in (0,\infty)$, справедлива оценка

$$c_1(s,\Omega) \geqslant \max\left\{\frac{s-1}{\gamma_0^{d-1}(\Omega)},\, s-d+\frac{d-1}{\gamma_0(\Omega)}\right\}.$$

Очевидно, эта оценка усиливает неравенство $c_1(s,\Omega) \geqslant s-d$ и асимптотически близка к неравенству $c_1(s,\Omega) \geqslant s-1$, когда отношение $\delta_0(\Omega)/\lambda_0(\Omega)$ близко к нулю, т.е. характеристика $\gamma_0(\Omega)$ близка к единице.

Для случая $d = s$ из теоремы 2.1 с учетом (2.5) получаем неравенство

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f(x)|^p\,dx}{\mathrm{dist}^{d-p}(x,\partial\Omega)} \geqslant \frac{1}{p^p\,(1+\ln\gamma_0(\Omega))^p} \int\limits_{\Omega} \frac{|f(x)|^p\,dx}{\mathrm{dist}^{d}(x,\partial\Omega)} \quad \forall f \in C_0^\infty(\Omega).$$

Следовательно, $c_p(d,\Omega) \geqslant p^{-p}\,(1+\ln\gamma_0(\Omega))^{-p}$. Множитель $(1+\ln\gamma_0(\Omega))^{-p}$ является оптимальным для достаточно больших $\gamma_0(\Omega)$ в следующем смысле: для фиксированных параметров p и d и любого числа $\gamma > 2$ существует область $\Omega_\gamma \subset \mathbb{R}^d$, такая что $\gamma_0(\Omega_\gamma) = \gamma$ и $c_p(d,\Omega_\gamma) \leqslant \mathrm{const}\,(\ln(\gamma-1))^{-p}$. Действительно, предположим, что $\gamma > 2$, r и R — положительные числа и $R/r = 2\gamma - 1$. Рассмотрим кольцевую область $\Omega_\gamma = \{x \in \mathbb{R}^d : r < |x| < R\}$. Очевидно, область Ω_γ является r-близкой к выпуклой, т.е. $\lambda_0(\Omega_\gamma) = r$. Далее, $\delta_0(\Omega_\gamma) = (R-r)/2$, следовательно, $\gamma_0(\Omega_\gamma) = \gamma$. Применяя к $c_p(d,\Omega_\gamma)$ оценки теорем 2 и 4 из статьи [6], получаем

$$c_p(d,\Omega_\gamma) \leqslant \frac{\pi^p\,(\ln(\gamma-1))^{-p}}{\min\{1, p^p/d^p\}}.$$

Во избежание недоразумений отметим, что в [6] использованы другие обозначения: размерность пространства обозначена буквой n, константа $c_p(s,\Omega)$ из неравенства (1.1) настоящей статьи равна $(c_p(s,\Omega))^{-p}$ из [6].

2.2. Вспомогательные результаты. Докажем несколько лемм и два предложения, имеющих и самостоятельное значение. В частности, докажем новые одномерные неравенства типа Харди с точными константами.

Лемма 2.1. *Пусть $\lambda \in (0,\infty)$. Если $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — неограниченная область, λ-близкая к выпуклой, то для любого непустого компакта $K \subset \Omega$ существует ограниченная область Ω', обладающая свойствами:*

1) $K \subset \Omega' \subset \Omega$;
2) Ω' *является λ-близкой к выпуклой для того же радиуса λ;*
3) $\mathrm{dist}(x,\partial\Omega) = \mathrm{dist}(x,\partial\Omega')$ *для любой точки $x \in K$.*

Доказательство леммы 2.1. Пусть $\mathrm{diam}\,K$ — диаметр компакта K. Поскольку функция $\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)$ удовлетворяет условию Липшица, то она является равномерно непрерывной на компакте $K \subset \Omega$. Следовательно существует число $\delta_0(K,\Omega) = \max_{x\in K}\mathrm{dist}(x,\partial\Omega) < \infty$.

Возьмем шар $B = \{x \in \mathbb{R}^d : |x - x_0| < \rho\}$, где $x_0 \in K$, $\rho = \mathrm{diam}\,K + \delta_0(K,\Omega)$. Очевидно, $K \subset \Omega \cap B$. Пусть Ω' — та компонента множества $\Omega \cap B$, которая содержит K. Тогда справедливость свойств 1) и 2) очевидно. Отметим, что доказательство пункта 2) леммы 2.1 родственно доказательству пункта 2) предложения 4.1 в последнем разделе этой статьи.

Проверим свойство 3). Пусть $x \in K$. Ясно, что $\mathrm{dist}(x,\partial\Omega) \geqslant \mathrm{dist}(x,\partial\Omega')$. Если $\mathrm{dist}(x,\partial\Omega) > \mathrm{dist}(x,\partial\Omega')$, то существует точка $y \in \partial B$, такая, что

$|x-y| = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega')$. Но тогда $\rho = |x_0 - y| \leqslant |x_0 - x| + |x-y| \leqslant \mathrm{diam}\, K + \mathrm{dist}(x, \partial\Omega') < \rho$. Полученное противоречие и доказывает свойство 3). □

Лемма 2.2. (*ср. с* [7], *а также* [18, 19]) *Если неравенство* (2.4) *имеет место для любой функции* $f \in C_0^1(\Omega)$ *при* $p = 1$, *то оно справедливо и при любом* $p \in (1, \infty)$.

Доказательство леммы 2.2. Приведем доказательство, основанное на применении неравенства Гельдера. Пусть функция $f \in C_0^1(\Omega)$. Предположим, что $f \not\equiv 0$ и $p \in (1, \infty)$. Тогда $|f|^p \in C_0^1(\Omega)$. Применяя к функции $g = |f|^p$ неравенство (2.4) при $p = 1$, получаем, что

$$\int\limits_\Omega \frac{|\nabla g|}{\mathrm{dist}^{s-1}(x, \partial\Omega)}\, dx \geqslant \mu(d, s, \gamma_0(\Omega)) \int\limits_\Omega \frac{|g|}{\mathrm{dist}^{s}(x, \partial\Omega)}\, dx,$$

и, что то же самое,

$$p \int\limits_\Omega \frac{|f|^{p-1}|\nabla f|}{\mathrm{dist}^{s-1}(x, \partial\Omega)}\, dx \geqslant \mu(d, s, \gamma_0(\Omega)) \int\limits_\Omega \frac{|f|^p}{\mathrm{dist}^{s}(x, \partial\Omega)}\, dx. \tag{2.6}$$

Левая часть этого неравенства не превосходит

$$p \left(\int\limits_\Omega \frac{|\nabla f|^p}{\mathrm{dist}^{s-p}(x, \partial\Omega)} \quad dx \right)^{1/p} \left(\int\limits_\Omega \frac{|f|^p}{\mathrm{dist}^{s}(x, \partial\Omega)}\, dx \right)^{1-1/p} \tag{2.7}$$

в силу неравенства Гельдера

$$\left(\int \psi_1^p \, dx \right)^{1/p} \left(\int \psi_2^{p/(p-1)}\, dx \right)^{1-1/p} \geqslant \int \psi_1 \psi_2 \, dx,$$

где функции ψ_1 и ψ_2 определены равенствами

$$\psi_1(x) = |\nabla f| / \mathrm{dist}^{s/p-1}(x, \partial\Omega), \quad \psi_2(x) = |f|^{p-1} / \mathrm{dist}^{s(1-1/p)}(x, \partial\Omega).$$

Оценивая левую часть в (2.6) произведением (2.7) и деля обе части получаемого неравенства на интеграл $\left(\int \psi_2^{p/(p-1)}\, dx \right)^{1-1/p}$, будем иметь

$$p \left(\int\limits_\Omega \frac{|\nabla f|^p}{\mathrm{dist}^{s-p}(x, \partial\Omega)} \quad dx \right)^{1/p} \geqslant \mu(d, s, \gamma_0(\Omega)) \left(\int\limits_\Omega \frac{|f|^p}{\mathrm{dist}^{s}(x, \partial\Omega)}\, dx \right)^{1/p}.$$

Очевидно, последнее неравенство влечет (2.4) для случая $p > 1$, что и требовалось доказать. □

Лемма 2.3. *Пусть d — натуральное число, $d \geqslant 2$, $s \in (1,2)$. Если*

$$1 < \gamma \leqslant 1 + \alpha_d(s),$$

то для любой абсолютно непрерывной функции $f : [1,\gamma] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям

$$f(1) = 0, \quad f \not\equiv 0, \quad \int\limits_1^\gamma |f'(r)|\, r^{d-1}/(r-1)^{s-1}\, dr < \infty,$$

имеет место неравенство

$$\int\limits_1^\gamma \frac{|f'(r)|}{(r-1)^{s-1}}\, r^{d-1}\, dr > (s-1) \int\limits_1^\gamma \frac{|f(r)|}{(r-1)^s}\, r^{d-1}\, dr. \tag{2.8}$$

Постоянные $s-1$ и $\alpha_d(s)$ являются точными, т.е. максимальными из возможных.

Это утверждение доказано нами в [13]. Некоторые идеи и формулы из этого доказательства используются в дальнейшем. Поэтому мы кратко опишем некоторые фрагменты доказательства неравенства (2.8) и поясним необходимость ограничения $s \in (1,2)$.

Пользуясь неравенством $|f(r)| \leqslant \int_1^r |f'(t)|\, dt$ и заменой порядка интегрирования в возникающем повторном интеграле, правую часть (2.8) можем оценить сверху следующим образом:

$$\int\limits_1^\gamma \frac{(s-1)|f(r)|}{(r-1)^s} r^{d-1}\, dr \leqslant \int\limits_1^\gamma |f'(t)| Q(t,\gamma)\, dt,$$

где

$$Q(t,\gamma) = (s-1) \int\limits_t^\gamma \frac{r^{d-1}}{(r-1)^s}\, dr, \quad 1 \leqslant t \leqslant \gamma.$$

При любом $t \in (1,\gamma\,]$ имеем

$$Q(t,\gamma) - \frac{t^{d-1}}{(t-1)^{s-1}} < Q_d(\gamma) := -\frac{\gamma^{d-1}}{(\gamma-1)^{s-1}} + \int\limits_1^\gamma \frac{(d-1)r^{d-2}}{(r-1)^{s-1}}\, dr.$$

Очевидно, неравенство (2.8) будет справедливо, если $Q_d(\gamma) \leqslant 0$.

В [13] доказано, что существует число $a_d(s)$, такое, что $Q_d(a_d(s)) = 0$, и, кроме того, $Q_d(\gamma) < 0$ при $\gamma < a_d(s)$, $Q_d(\gamma) > 0$ при $a_d(s) < \gamma$. Доказано также, что величина $a_d(s)$ убывает с ростом размерности.

Запишем разложение r^{d-2} по степеням $r-1$, когда d — натуральное число, $d \geqslant 2$. Имеем:

$$r^{d-2} = (d-2)! \sum_{k=0}^{d-2} (r-1)^k / [k!\,(d-k-2)!],$$

$$\int_1^\gamma \frac{(d-1)r^{d-2}}{(r-1)^{s-1}}\,dr = (d-1)! \sum_{k=0}^{d-2} \frac{(\gamma-1)^{k-s+2}}{k!\,(d-k-2)!\,(k-s+2)}.$$

Полином $P(\alpha) := -Q_d(1+\alpha)\alpha^{s-1}/(d-1)!$ совпадает с полиномом $P(\alpha)$, определенным формулой (2.1). Поскольку $\operatorname{sign} P(\alpha) = -\operatorname{sign} Q(1+\alpha)$ при $\alpha > 0$, то уравнение $P(\alpha) = 0$ имеет единственный положительный корень $\alpha_d(s) = a_d(s) - 1$.

Для $d = 2$ уравнение $P(\alpha) = 0$ является линейным и имеет единственный корень $\alpha = \alpha_2(s) = (2-s)/(s-1)$. В силу монотонности $\alpha_d(s)$ по размерности отсюда следует правое неравенство в (2.3). Пусть

$$1 < \gamma < 1 + (2-s)/(d+s-3),$$

тогда

$$\begin{aligned} Q_d(\gamma) &< -\frac{\gamma^{d-1}}{(\gamma-1)^{s-1}} + (d-1)\gamma^{d-2} \int_1^\gamma \frac{1}{(r-1)^{s-1}}\,dr \\ &= -\frac{\gamma^{d-2}}{(\gamma-1)^{s-2}} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} - \frac{d-1}{2-s} \right) < 0, \end{aligned}$$

что влечет левое неравенство в (2.3).

Для любой неубывающей допустимой функции $f : [1, \gamma\,] \to \mathbb{R}$ при любом $s \in (1, \infty)$ получаем

$$X(f) := \int_1^\gamma \frac{f'(r)\, r^{d-1}}{(r-1)^{s-1}}\,dr - (s-1) \int_1^\gamma \frac{f(r)\, r^{d-1}}{(r-1)^s}\,dr = \int_1^\gamma f'(t)\varphi(\gamma, t)dt,$$

где

$$\varphi(\gamma, t) = \frac{\gamma^{d-1}}{(\gamma-1)^{s-1}} - \int_t^\gamma \frac{(d-1)r^{d-2}}{(r-1)^{s-1}}\,dr.$$

Очевидно,

$$\int_t^\gamma r^{d-2}(r-1)^{1-s}\,dr \to \infty$$

при любых фиксированных $\gamma \in (1,\infty)$, $s \in [2,\infty)$ и $t \to 1^+$, поэтому существует такое число $b \in (1,\gamma)$, что $\varphi(\gamma,t) < 0$ для всех $t \in (1,b]$. Следовательно, лемму 2.3 невозможно распространить на случай $s \in [2,\infty)$, так как в этом случае неравенство (2.8) не является справедливым для неубывающих допустимых функций f, если производная f равна нулю при $r \in [b,\gamma]$.

Лемма 2.4. *Пусть d — натуральное число, $d \geqslant 2$. Предположим, что $s \in (1,2)$, $\gamma \in (1+\alpha_d(s),\infty)$ или $s \in [2,\infty)$, $\gamma \in (1,\infty)$. Тогда для любой абсолютно непрерывной функции $f : [1,\gamma\,] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям*

$$f(1) = 0, \quad f \not\equiv 0, \quad \int_1^\gamma |f'(r)|\, r^{d-1}/(r-1)^{s-1}\, dr < \infty,$$

имеет место неравенство

$$\int_1^\gamma \frac{|f'(r)|}{(r-1)^{s-1}}\, r^{d-1}\, dr > \left(s-d+\frac{d-1}{\beta_d(s,\gamma)}\right) \int_1^\gamma \frac{|f(r)|}{(r-1)^s}\, r^{d-1}\, dr, \tag{2.9}$$

где $\beta_d(s,\gamma)$ — определенный выше нуль функции (2.2), $\beta_d(s,\gamma) \in (1,\gamma)$. Постоянная $s-d+(d-1)/\beta_d(s,\gamma)$ в неравенстве (2.9) является точной, т.е. максимальной из возможных.

Доказательство леммы 2.4. Пользуясь очевидным следствием формулы Ньютона–Лейбница $|f(r)| \leqslant \int_1^r |f'(t)|\, dt$ и нетрудными вычислениями, получаем неравенство

$$\int_1^\gamma \frac{|f(r)|}{(r-1)^s} r^{d-1}\, dr \leqslant \int_1^\gamma |f'(t)|\, dt \int_t^\gamma \frac{r^{d-1}}{(r-1)^s}\, dr.$$

Отсюда следует, что

$$\int_1^\gamma \frac{|f'(r)|}{(r-1)^{s-1}}\, r^{d-1}\, dr \geqslant \frac{1}{\varphi_0} \int_1^\gamma \frac{|f(r)|}{(r-1)^s}\, r^{d-1}\, dr, \tag{2.10}$$

где

$$\varphi_0 = \max_{1\leqslant t\leqslant\gamma} \varphi(t), \quad \varphi(1) = \frac{1}{s-1}, \quad \varphi(t) = \frac{(t-1)^{s-1}}{t^{d-1}} \int_t^\gamma \frac{r^{d-1}\, dr}{(r-1)^s}, \quad 1 < t \leqslant \gamma.$$

Очевидно, $\varphi(\gamma) = 0$, $\varphi(t) > 0$ для любого $t \in [1,\gamma)$, функция φ непрерывно дифференцируема в интервале $(1,\gamma)$ и непрерывна на отрезке $[1,\gamma]$ с учетом того, что

$$\lim_{t\to 1^+}\varphi(t)=\lim_{t\to 1^+}\frac{t^{d-1}(t-1)^{-s}}{(s-1)t^{d-1}(t-1)^{-s}-(d-1)t^{d-2}(t-1)^{-s+1}}=\frac{1}{s-1}.$$

Из точности постоянной $\alpha_d(s)$ в лемме 2.3 и из замечания, приведенного перед формулировкой леммы 2.4, следует, что $\varphi_0>\varphi(1)=1/(s-1)$ при выполнении условия леммы 2.4 на допустимые пары $(s;\gamma)$, а именно, $s\in(1,2)$, $\gamma\in(1+\alpha_d(s),\infty)$ или $s\in[2,\infty)$, $\gamma\in(1,\infty)$. Поэтому существует точка $t_0\in(1,\gamma)$, такая, что $\varphi_0=\varphi(t_0)>1/(s-1)$.

Для $t\in(1,\gamma)$ прямыми вычислениями получаем равенства

$$\varphi'(t)=-\frac{1}{t-1}+\frac{(s-d)t+d-1}{t(t-1)}\,\varphi(t),\tag{2.11}$$

$$(t-1)\varphi''(t)+\varphi'(t)=-\frac{d-1}{t^2}\,\varphi(t)+\frac{(s-d)t+d-1}{t}\,\varphi'(t).\tag{2.12}$$

Поскольку $\varphi'(t_0)=0$, то из (2.11) следует, что

$$\frac{1}{\varphi_0}=\frac{1}{\varphi(t_0)}=s-d+\frac{d-1}{t_0}.\tag{2.13}$$

Кроме того, если $\varphi'(\beta)=0$ в некоторой точке $\beta\in(1,\gamma)$, то $\varphi''(\beta)=-(d-1)\beta^{-2}(\beta-1)^{-1}\varphi(\beta)<0$ в силу равенства (2.12) и положительности $\varphi(\beta)$. Следовательно, любая критическая точка функции $\varphi:(1,\gamma)\to\mathbb{R}$ является точкой строгого локального максимума. Отсюда следует, что уравнение $\varphi'(\beta)=0$ при $\beta\in(1,\gamma)$ имеет единственный корень и этот корень совпадает с точкой глобального максимума $t_0\in(1,\gamma)$.

В силу равенства (2.11) уравнения $T(\beta)=0$ и $\varphi'(\beta)=0$ при $\beta\in(1,\gamma)$ равносильны, так как $(\beta-1)^{s-2}\,T(\beta)=\varphi'(\beta)$. Следовательно, $t_0=\beta_d(s,\gamma)$, неравенства (2.10) и (2.13) влекут доказываемое неравенство (2.9) с учетом строгого неравенства $\varphi_0>\varphi(t)$ для любого $t\in(1,\gamma)\setminus\{t_0\}$.

Остается доказать точность постоянной (2.13) с $t_0=\beta_d(s,\gamma)$ в неравенстве (2.9). Пусть $\varepsilon>0$. В силу непрерывности функции $\varphi:(1,\gamma)\to\mathbb{R}$ существует достаточное малое число $\delta>0$, такое, что $[t_0-\delta,t_0+\delta]\subset(1,\gamma)$ и $(1/\varphi_0+\varepsilon)\varphi(t)>1$ при $t\in[t_0-\delta,t_0+\delta]$. Рассмотрим теперь допустимую функцию $f_\varepsilon:[1,\gamma\,]\to\mathbb{R}$, определенную равенствами: $f_\varepsilon(t)=0$ при $t\in[1,t_0-\delta)$, $f_\varepsilon(t)=t-t_0+\delta$ при $t\in[t_0-\delta,t_0+\delta]$, $f_\varepsilon(t)=2\delta$ при

$t \in (t_0 + \delta, \gamma]$. Непосредственные вычисления дают, что

$$\int_1^\gamma \frac{|f_\varepsilon'(r)|}{(r-1)^{s-1}}\, r^{d-1}\, dr - \left(\frac{1}{\varphi_0} + \varepsilon\right) \int_1^\gamma \frac{|f_\varepsilon(r)|}{(r-1)^s}\, r^{d-1}\, dr$$
$$= \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \frac{r^{d-1}}{(r-1)^{s-1}} \left(1 - \left(\frac{1}{\varphi_0} + \varepsilon\right)\varphi(r)\right) dr < 0. \quad \square$$

Пусть $\mu(d, s, \gamma)$ — постоянная из определения 2.2.

Следствие 2.2. *Предположим, что* $s \in (1, \infty)$, $\gamma \in (1, \infty)$, $d \geqslant 2$. *Тогда* $\mu(d, s, \gamma) > \max\left\{(s-1)/\gamma^{d-1},\ s - d + (d-1)/\gamma\right\}$, *в частности,*

$$\mu(d, d, \gamma) > (d-1)/\gamma.$$

Кроме того, имеет место оценка $\mu(d, d, \gamma) > 1/(1 + \ln\gamma)$.

Доказательство. Для $t \in (1, \gamma)$ имеем

$$0 < \varphi(t) < \frac{(t-1)^{s-1}\gamma^{d-1}}{t^{d-1}} \int_t^\gamma \frac{dr}{(r-1)^s} < \frac{\gamma^{d-1}}{s-1}.$$

Следовательно, $\mu(d, s, \gamma) = 1/\varphi_0 > (s-1)/\gamma^{d-1}$. Далее, поскольку $t_0 = \beta_d(s, \gamma) \in (1, \gamma)$, то $s - 1 > s - d + (d-1)/\beta_d(s, \gamma) > s - d + (d-1)/\gamma$ и $\mu(d, s, \gamma) = 1/\varphi_0 > s - d + (d-1)/\gamma$.

Получим теперь оценку для $\mu(d, d, \gamma)$. Для фиксированных $t \in (1, \gamma)$ и $r \in (t, \gamma)$ имеем: $r/t < (r-1)/(t-1)$. Поэтому $\left(r(t-1)t^{-1}(r-1)^{-1}\right)^{d-1}$ и $(1-1/t)^{d-1}\int_t^\gamma r^{d-1}(r-1)^{-d}dr$ являются убывающими функциями от переменной d при любом фиксированном $t \in (1, \gamma)$. Следовательно, $\mu(d, d, \gamma) \geqslant \mu(2, 2, \gamma)$. Для оценки $\mu(2, 2, \gamma)$ снизу нужно оценить сверху максимальное значение функции $(1-1/t)\int_t^\gamma r(r-1)^{-2}dr$. Простые вычисления дают, что точка максимума этой функции $t_0 = \beta_2(2) \in (1, \gamma)$ удовлетворяет уравнению $\ln(\gamma - 1) - \ln(t_0 - 1) = t_0 + \gamma/(\gamma - 1)$, что равносильно уравнению $(t_0 - 1)e^{t_0} = (\gamma - 1)e^{-\gamma/(\gamma-1)}$. Поскольку $e^{\gamma/(\gamma-1)} > e$ и $1/e + (t_0 - 1)e^{t_0} > e^{t_0 - 2}$ при $t_0 > 1$, то получаем неравенство $e^{t_0-2} < \gamma/e$, т.е. $t_0 < 1 + \ln\gamma$. Следовательно, $\mu(2, 2, \gamma) = 1/t_0 > 1/(1 + \ln\gamma)$. $\square$

Объединяя леммы 2.3 и 2.4, получаем следующее утверждение.

Предложение 2.1. *Пусть d — натуральное число, $d \geqslant 2$. Предположим, что $s \in (1, \infty)$, $\gamma \in (1, \infty)$. Тогда для любой абсолютно непрерывной функции $f : [1, \gamma\,] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям*

$$f(1) = 0, \quad f \not\equiv 0, \quad \int\limits_1^{\gamma} |f'(r)|\, r^{d-1}/(r-1)^{s-1}\, dr < \infty,$$

имеет место неравенство

$$\int\limits_1^{\gamma} \frac{|f'(r)|}{(r-1)^{s-1}}\, r^{d-1}\, dr > \mu(d, s, \gamma) \int\limits_1^{\gamma} \frac{|f(r)|}{(r-1)^{s}}\, r^{d-1}\, dr.$$

Постоянная $\mu(d, s, \gamma)$ в этом неравенстве является точной, т.е. максимальной из возможных.

Формулы, полученные в доказательствах лемм 2.3 и 2.4, позволяют легко обосновать следующее свойство монотонности $\mu(d, s, \gamma)$.

Предложение 2.2. *Предположим, что числа $s_1, s_2, \gamma_1, \gamma_2$ лежат в интервале $(1, \infty)$, d_1 и d_2 — натуральные числа.*

Если $\gamma_1 \leqslant \gamma_2$, $s_1 \geqslant s_2$ и $2 \leqslant d_1 \leqslant d_2$, то имеет место неравенство

$$\mu(d_2, s_1, \gamma_2) \leqslant \mu(d_1, s_2, \gamma_1).$$

Доказательство предложения 2.2. Из доказательств лемм 2.3 и 2.4 следует, что для любых $s \in (1, \infty)$, $\gamma \in (1, \infty)$ и натурального числа $d \geqslant 2$ справедливо равенство $\mu(d, s, \gamma) = 1/\max_{1 \leqslant t \leqslant \gamma} \varphi(t, d, s, \gamma)$, где функция φ непрерывна по $t \in [1, \gamma]$ и

$$\varphi(1, d, s, \gamma) = \frac{1}{s-1}, \quad \varphi(t, d, s, \gamma) = \frac{(t-1)^{s-1}}{t^{d-1}} \int\limits_t^{\gamma} \frac{r^{d-1}\, dr}{(r-1)^s}, \quad 1 < t \leqslant \gamma.$$

Если $1 < \gamma_1 \leqslant \gamma_2$, то легко видеть, что $\varphi(t, d, s, \gamma_1) \leqslant \varphi(t, d, s, \gamma_2)$ при любом фиксированном $t \in [1, \gamma_1]$. Следовательно, $\mu(d, s, \gamma_1) \geqslant \mu(d, s, \gamma_2)$.

Далее, легко показать, что для фиксированных $t \in (1, \gamma)$ и $r \in (t, \gamma)$ имеет место неравенство $(t-1)^{s_1}(r-1)^{-s_1} \leqslant (t-1)^{s_2}(r-1)^{-s_2}$ при выполнении условия $s_1 \geqslant s_2$ и неравенство $r^{d_1} t^{-d_1} \leqslant r^{d_2} t^{-d_2}$ для $2 \leqslant d_1 \leqslant d_2$. Следовательно, если $s_1 \geqslant s_2$ и $2 \leqslant d_1 \leqslant d_2$, то $\varphi(t, d_1, s_2, \gamma) \leqslant \varphi(t, d_2, s_1, \gamma)$ при любом фиксированном $t \in [1, \gamma]$. Отсюда следует, что $\mu(d_1, s_2, \gamma) \geqslant \mu(d_2, s_1, \gamma)$. Пользуясь неравенством $\mu(d, s, \gamma_1) \geqslant \mu(d, s, \gamma_2)$, окончательно получаем $\mu(d_1, s_2, \gamma_1) \geqslant \mu(d_2, s_1, \gamma_2)$. □

2.3. Доказательство теоремы 2.1. Понятно, что в силу леммы 2.2 интегральное неравенство (2.4) достаточно доказать для одного, произвольно выбранного представителя $f \not\equiv 0$ семейства $C_0^1(\Omega)$ при $p = 1$.

Пусть f — вещественнозначная функция, $f \not\equiv 0$, $f \in C_0^1(\Omega)$. Возьмем число $\varepsilon \in (0, \mathrm{dist}(K(f), \partial\Omega)/2)$, где $K(f) = \mathrm{supp} f$ — носитель функции f. Выбор такого числа ε возможен, так как величина $\mathrm{dist}(K(f), \partial\Omega) > 0$ в силу компактности носителя функции и границы области. Дальнейшее доказательство состоит из пяти этапов.

Этап 1. В силу леммы 2.1 будем считать, что область Ω является ограниченной. Тогда для каждой граничной точки $y \in \partial\Omega$ существует "свой" внешний шар B_y радиуса $\lambda = \lambda_0(\Omega)$ из определения 2.1. Для каждой граничной точки $y \in \partial\Omega$ рассмотрим новый шар $B'_y = \{x \in \mathbb{R}_d : |x - a'_y| < \lambda\}$, где $a'_y = a_y + \varepsilon(y - a_y)/\lambda$. Очевидно, $|y - a'_y| < \lambda$, шар B'_y получен сдвигом B_y в сторону области на расстояние $\varepsilon > 0$ и поэтому имеет пустое пересечение с компактом $K(f)$. Совокупность новых шаров B'_y, $y \in \partial\Omega$, образует открытое покрытие $\partial\Omega$. В силу компактности $\partial\Omega$ по лемме Гейне–Бореля существует конечное подпокрытие, состоящее из некоторых шаров $\{B_1, B_2, \ldots, B_m\} \subset \{B'_y : y \in \partial\Omega\}$. Понятно, что $m = m(\varepsilon)$, т.е. число m зависит, вообще говоря, от ε. Без ограничения общности будем считать, что подпокрытие не содержит совпадающих шаров.

По построению шары $B_1, B_2, \ldots, B_m$ имеют одинаковые радиусы $\lambda = \lambda_0(\Omega)$ и удовлетворяют следующим соотношениям

$$\partial\Omega \subset \cup_{j=1}^m B_j, \quad K(f) \subset \Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \cup_{j=1}^m \overline{B}_j, \quad \partial\Omega_\varepsilon \subset \Omega$$

в силу выбора числа $\varepsilon > 0$ и точек $a'_y = a_y + \varepsilon(y - a_y)/\lambda$.

Так как $K(f) \subset \Omega_\varepsilon$, то $f(x) = 0$ для всех $x \in \Omega \setminus \Omega_\varepsilon$, в частности, $f(x) = 0$ для всех $x \in \partial\Omega_\varepsilon$. Кроме того, для всех $x \in K(f) \subset \Omega_\varepsilon$ имеем

$$\mathrm{dist}(x, \partial\Omega) - \varepsilon \leqslant \mathrm{dist}(x, \partial\Omega_\varepsilon) \leqslant \mathrm{dist}(x, \partial\Omega). \tag{2.14}$$

Этап 2. Отметим важный факт: если подобласть $\Omega' \subset \Omega$ содержит компакт $K(f)$ и является λ-близкой к выпуклой с тем же $\lambda = \lambda_0(\Omega)$, то $\gamma_0(\Omega) \geqslant \gamma_0(\Omega')$ в силу того, что $\delta_0(\Omega) \geqslant \delta_0(\Omega')$. Следовательно, согласно предложению 2.2 имеем неравенство $\mu(d, s, \gamma_0(\Omega)) \leqslant \mu(d, s, \gamma_0(\Omega'))$. Поэтому мы сохраняем константу $\mu(d, s, \gamma_0(\Omega))$ при переходах к подобластям.

С учетом этого замечания покажем, что требуемое неравенство в области Ω будет справедливо, если мы докажем неравенство

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \frac{|\nabla f|}{\mathrm{dist}^{s-1}(x, \partial\Omega_\varepsilon)}\, dx \geqslant \mu(d, s, \gamma_0(\Omega)) \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \frac{|f|}{\mathrm{dist}^{s}(x, \partial\Omega_\varepsilon)}\, dx \tag{2.15}$$

для выбранной выше функции $f \in C_0^1(\Omega)$. Действительно, (2.15) равносильно следующему неравенству

$$\int\limits_{K(f)} \frac{|\nabla f|}{\mathrm{dist}^{s-1}(x,\partial\Omega_\varepsilon)}\,dx \geqslant \mu(d,s,\gamma_0(\Omega)) \int\limits_{K(f)} \frac{|f|}{\mathrm{dist}^{s}(x,\partial\Omega_\varepsilon)}\,dx.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ с учетом следствия оценок (2.14), точнее, с учетом того, что $\mathrm{dist}(x,\partial\Omega_\varepsilon) \to \mathrm{dist}(x,\partial\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно на компакте $K(f)$, получаем

$$\int\limits_{K(f)} \frac{|\nabla f|}{\mathrm{dist}^{s-1}(x,\partial\Omega)}\,dx \geqslant \mu(d,s,\gamma_0(\Omega)) \int\limits_{K(f)} \frac{|f|}{\mathrm{dist}^{s}(x,\partial\Omega)}\,dx,$$

что эквивалентно доказываемому неравенству

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f|}{\mathrm{dist}^{s-1}(x,\partial\Omega)}\,dx \geqslant \mu(d,s,\gamma_0(\Omega)) \int\limits_{\Omega} \frac{|f|}{\mathrm{dist}^{s}(x,\partial\Omega)}\,dx$$

для нашей фиксированной функции при $p = 1$.

Этап 3. Для доказательства неравенства (2.15) нам потребуются следующие разбиения открытого множества Ω_ε и его границы, построенные в [13]:

$$\partial\Omega_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^{m} S_j, \qquad \Omega_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^{m} S_j(\Omega_\varepsilon),$$

где $S_j = \partial B_j \cap \partial\Omega_\varepsilon$, $S_j(\Omega_\varepsilon) = \{x \in \Omega_\varepsilon : \mathrm{dist}(x,\partial\Omega_\varepsilon) = \mathrm{dist}(x,S_j)\}$ — множества притяжения S_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

Как показано в [13], для любой функции $g : \overline{\Omega_\varepsilon} \to \mathbb{R}$, $g \in C(\overline{\Omega_\varepsilon})$, имеет место равенство

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} g(x)\,dx = \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{S_j(\Omega_\varepsilon)} g(x)\,dx.$$

Понятно, что для справедливости неравенства (2.15) достаточно показать, что для каждого $j = 1, 2, \ldots, m$ имеет место неравенство

$$\int\limits_{S_j(\Omega_\varepsilon)} \frac{|\nabla f|}{\mathrm{dist}^{s-1}(x,S_j)}\,dx \geqslant \mu(d,s,\gamma_0(\Omega)) \int\limits_{S_j(\Omega_\varepsilon)} \frac{|f|}{\mathrm{dist}^{s}(x,S_j)}\,dx \qquad (2.16)$$

для произвольной функции $f \in C^1\big(\overline{S_j(\Omega_\varepsilon)}\big)$, удовлетворяющей граничному условию: $f(x) = 0$ для всех точек $x \in S_j$.

Перейдем в интегралах из (2.16) к полярной системе координат с центром в точке x_j, где x_j — центр шара B_j, пользуясь формулами: $x - x_j = r\,\omega$, $|x - x_j| = r$, $dx = r^{d-1}\,dr\,d\omega$,

$$(S_j - x_j)/\lambda := \{(x - x_j)/\lambda : x \in S_j\},$$
$$S_j(\Omega_\varepsilon) = \{x_j + r\omega \in \Omega_\varepsilon : x_j + \lambda\omega \in S_j,\ \lambda < r \leqslant \varphi_j(\omega)\},$$

где $\varphi_j : (S_j - x_j)/\lambda \to \mathbb{R}$ — некоторая непрерывная функция.

Неравенство (2.16) запишется в следующем виде

$$\int\limits_S d\,\omega \int\limits_{\lambda}^{\varphi_j(\omega)} \left(\frac{|\nabla f|}{(r-\lambda)^{s-1}} - \frac{\mu(d,s,\gamma_0(\Omega))|f|}{(r-\lambda)^s} \right) r^{d-1}\,dr \geqslant 0, \tag{2.17}$$

где $S = (S_j - x_j)/\lambda$, $\lambda = \lambda_0(\Omega)$. С учетом соотношений

$$\operatorname{dist}(x, S_j) = r - \lambda \leqslant \varphi_j(\omega) - \lambda \leqslant \delta_0(\Omega_\varepsilon) < \delta_0(\Omega),$$

где $x = x_j + r\omega \in S_j(\Omega_\varepsilon)$, внутренний интеграл в (2.17) может быть представлен в виде

$$Y(\omega) = \int\limits_{\lambda}^{\lambda\,a_j(\omega)} \left(\frac{|\nabla f|}{(r-\lambda)^{s-1}} - \mu(d,s,\gamma_0(\Omega)) \frac{|f|}{(r-\lambda)^s} \right) r^{d-1}\,dr,$$

где $1 \leqslant a_j(\omega) \leqslant \gamma_0(\Omega)$, а гладкая функция $g_\omega(r) := f(x_j + r\omega)$ удовлетворяет граничному условию $g_\omega(\lambda) = 0$. Поскольку $|\nabla f| \geqslant \left|\frac{\partial f}{\partial r}\right| = |g'_\omega(r)|$, то

$$Y(\omega) \geqslant \int\limits_{\lambda}^{\lambda\,a_j(\omega)} \left(\frac{|g'_\omega(r)|}{(r-\lambda)^{s-1}} - \mu(d,s,\gamma_0(\Omega)) \frac{|g_\omega(r)|}{(r-\lambda)^s} \right) r^{d-1}\,dr.$$

Этап 4. Остается заметить, что последний интеграл неотрицателен в силу предложения 2.1, в чем легко убедиться заменой переменной $t = r/\lambda$, где $\lambda = \lambda_0(\Omega)$. Таким образом, получаем, что $Y(\omega)$ неотрицателен при любых $\omega \in (S_j - x_j)/\lambda$. Поэтому имеет место неравенство (2.17), а значит, справедливы неравенства (2.16) и (2.15). Но тогда имеет место (2.4) при $p = 1$ как следствие неравенства (2.15). Далее применяем лемму 2.2.

Этап 5. Неравенство (2.4) влечет оценку $c_p(s,\Omega) \geqslant \mu^p(d,s,\gamma_0(\Omega))/p^p$ в силу определения $c_p(s,\Omega)$ как максимальной константы в неравенстве (1.1). Применяя оценки следствия 2.2, легко убеждаемся в справедливости неравенств (2.5).

Теорема 2.1 доказана полностью.

§3. Оценки констант $C_2(\Omega)$ и $C_2^*(\Omega)$ в неравенствах типа Реллиха

Нам снова потребуется константа $\mu(d,s,\gamma)$ из определения 2.2.

Теорема 3.1. *Пусть d — натуральное число, $d \geqslant 2$. Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — область, λ-близкая к выпуклой с радиусом $\lambda = \lambda_0(\Omega) \in (0,\infty)$, внутренний радиус области $\delta_0(\Omega) \in (0,\infty)$. Тогда*

$$C_2(\Omega) \geqslant \frac{\mu^2(d,2,\gamma)\,\mu^2(d,4,\gamma)}{16}, \qquad C_2^*(\Omega) \geqslant \frac{\mu^4(d,2,\gamma)}{16}, \tag{3.1}$$

где $\gamma = \gamma_0(\Omega) = 1 + \delta_0(\Omega)/\lambda_0(\Omega)$.

Доказательство теоремы 3.1. Пусть f — вещественнозначная функция из семейства $C_0^\infty(\Omega)$. Нам потребуются декартовы координаты точки $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \Omega$. В силу тождества О. А. Ладыженской (см. [20, гл. 2, формулу (6.26)]), можем записать

$$\int\limits_\Omega |\Delta f|^2\,dx = \int\limits_\Omega \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}\right)^2 dx,$$

или, что то же самое,

$$\int\limits_\Omega |\Delta f|^2\,dx = \int\limits_\Omega \sum_{j=1}^d |\nabla u_j|^2\,dx, \quad u_j := \frac{\partial f}{\partial x_j}. \tag{3.2}$$

Применяя к функции u_j неравенство (1.1) при $p = s = 2$, получаем

$$\int\limits_\Omega |\nabla u_j|^2\,dx \geqslant c_2(2,\Omega) \int\limits_\Omega \frac{|u_j|^2\,dx}{\operatorname{dist}^2(x,\partial\Omega)}, \quad u_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Суммируя по j с учетом тождества (3.2) и равенства

$$u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_d^2 = |\nabla f|^2,$$

будем иметь

$$\int\limits_\Omega |\Delta f|^2\,dx \geqslant c_2(2,\Omega) \int\limits_\Omega \frac{|\nabla f|^2\,dx}{\operatorname{dist}^2(x,\partial\Omega)}.$$

Оценим снизу второй интеграл в этом неравенстве, применяя к функции f неравенство (1.1) при $p = 2$, $s = 4$. Получим

$$\int\limits_\Omega |\Delta f|^2\,dx \geqslant c_2(2,\Omega)\,c_2(4,\Omega) \int\limits_\Omega \frac{|f|^2\,dx}{\operatorname{dist}^4(x,\partial\Omega)}.$$

Отсюда следует, что

$$C_2(\Omega) \geqslant c_2(2,\Omega)\,c_2(4,\Omega), \tag{3.3}$$

так как величина $C_2(\Omega)$ определена как максимальная константа в неравенстве (1.2). Очевидно, неравенство (3.3) и теорема 2.1 влекут первое неравенство из (3.1).

Как доказано нами в статье [16] (см. там лемму 2 на стр. 481)

$$\sqrt{C_2^*(\Omega)} \geqslant c_2(2,\Omega). \tag{3.4}$$

Это неравенство и теорема 2.1 влекут второе неравенство из (3.1). □

Наша следующая цель — уточнение оценок постоянных $C_2(\Omega)$, $C_2^*(\Omega)$ и $c_2(2,\Omega)$ для случая трехмерных областей. Докажем сначала одно новое одномерное интегральное неравенство типа Харди.

Лемма 3.1. *Пусть $\gamma \in (1,\infty)$. Тогда для любой абсолютно непрерывной функции $f : [1,\gamma\,] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям*

$$f(1) = 0, \quad f \not\equiv 0, \quad \int_1^\gamma |f'(r)|\, r^2\, dr < \infty,$$

имеет место неравенство

$$\int_1^\gamma |f'(r)|^2\, r^2\, dr > \frac{1}{4}\int_1^\gamma \frac{|f(r)|^2}{(r-1)^2}\, r^2\, dr \quad \text{для случая} \quad 1 < \gamma \leqslant 2, \tag{3.5}$$

а также неравенство

$$\int_1^\gamma |f'(r)|^2\, r^2\, dr \geqslant \frac{\gamma-1}{\gamma^2}\int_1^\gamma \frac{|f(r)|^2}{(r-1)^2}\, r^2\, dr \quad \text{для случая} \quad 2 < \gamma < \infty. \tag{3.6}$$

Постоянные $1/4$, $(\gamma-1)/\gamma^2$ в этих неравенствах являются точными, т.е. максимальными из возможных. Равенство в неравенстве (3.6) имеет место тогда и только тогда, когда $f(r) = C(r-1)^{1-1/\gamma}/r$, где C — постоянная.

Доказательство леммы 3.1. Неравенство (3.5) и точность постоянной $1/4$ в этом неравенстве доказаны нами в [14]. Поэтому рассмотрим здесь лишь случай $\gamma \in (2,\infty)$. Пусть $\nu = 1-1/\gamma \in (1/2,1)$. Определим функцию $q : [1,\gamma] \to \mathbb{R}$ равенством $q(r) = (r-1)^\nu/r$. Простые вычисления показывают, что функция q удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(r^2 q')' + \frac{\nu(1-\nu)r^2}{(r-1)^2}\, q = 0$$

и граничным условиям $q(1) = q'(\gamma) = 0$, причем $q'(r) > 0$ при $r \in (1, \gamma)$. Далее мы применяем приемы классического вариационного исчисления. Имеем: $I(f) \geqslant 0$, где

$$\begin{aligned} I(f) &:= \int\limits_1^\gamma \left(f'(r) - \frac{q'(r)}{q(r)} f(r) \right)^2 r^2 \, dr \\ &= \int\limits_1^\gamma \left(f'^2(r) - 2\frac{q'(r)}{q(r)} f'(r) f(r) + \frac{q'^2(r)}{q^2(r)} f^2(r) \right) r^2 \, dr. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям среднее слагаемое $\big(r^2 q'(r)/q(r)\big) \, d\, f^2(r)$, получаем

$$\begin{aligned} I(f) &= \int\limits_1^\gamma f'^2(r) \, r^2 \, dr + \int\limits_1^\gamma \frac{(r^2 q'(r))'}{q(r)} f^2(r) \, dr \\ &= \int\limits_1^\gamma f'^2(r) \, r^2 \, dr - \nu(1-\nu) \int\limits_1^\gamma \frac{f^2(r)}{(r-1)^2} \, r^2 \, dr. \end{aligned}$$

Очевидно, неравенство $I(f) \geqslant 0$ влечет (3.6). Поскольку $I(f) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(r) \equiv C q(r)$, $C = \mathrm{const}$, то равенство в (3.6) реализуется тогда и только тогда, когда $f(r) = C(r-1)^{1-1/\gamma}/r$, где C — постоянная. Отсюда следует и точность постоянной $(\gamma - 1)/\gamma^2$. □

Теорема 3.2. *Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — область, λ-близкая к выпуклой с радиусом $\lambda = \lambda_0(\Omega) \in (0, \infty)$, внутренний радиус области $\delta_0(\Omega) \in (0, \infty)$. Тогда для любой функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$*

$$\int\limits_\Omega |\nabla f(x)|^2 \, dx \geqslant \mu_2(\gamma) \int\limits_\Omega \frac{|f(x)|^2}{\mathrm{dist}^2(x, \partial\Omega)} \, dx, \tag{3.7}$$

$$\int\limits_\Omega |\Delta f|^2 \, dx \geqslant \left(1 + \frac{2}{\gamma}\right)^2 \frac{\mu_2(\gamma)}{4} \int\limits_\Omega \frac{|f|^2}{\mathrm{dist}^4(x, \partial\Omega)} \, dx, \tag{3.8}$$

$$\int\limits_\Omega \mathrm{dist}^2(x, \partial\Omega) |\Delta f|^2 \, dx \geqslant \mu_2^2(\gamma) \int\limits_\Omega \frac{|f|^2}{\mathrm{dist}^2(x, \partial\Omega)} \, dx, \tag{3.9}$$

где $\gamma = \gamma_0(\Omega) = 1 + \delta_0(\Omega)/\lambda_0(\Omega)$ и

$$\mu_2(\gamma) = \begin{cases} 1/4, & \text{если } \gamma \leqslant 2; \\ (\gamma - 1)/\gamma^2, & \text{если } \gamma \in (2, \infty). \end{cases}$$

Как следствие теоремы 3.2 для трехмерных областей $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с характеристикой $\gamma = \gamma_0(\Omega) = 1 + \delta_0(\Omega)/\lambda_0(\Omega)$ имеем неравенства

$$c_2(2,\Omega) \geqslant \mu_2(\gamma), \quad C_2(\Omega) \geqslant \left(1 + \frac{2}{\gamma}\right)^2 \frac{\mu_2(\gamma)}{4}, \quad C_2^*(\Omega) \geqslant \mu_2^2(\gamma).$$

Доказательство теоремы 3.2. Неравенство (3.9) является следствием неравенств (3.7) и (3.4), а (3.8) следует из (3.7), (3.3) и неравенства (2.5) теоремы 2.1. Таким образом, остается обосновать неравенство (3.7). При доказательстве (3.7) мы будем следовать схеме доказательства теоремы 2.1 с необходимыми изменениями. Пусть f — вещественнозначная функция из семейства $C_0^\infty(\Omega)$, $f \not\equiv 0$. Пусть $\varepsilon \in (0, \operatorname{dist}(K(f), \partial\Omega)/2)$, где $K(f) = \operatorname{supp} f$ — носитель функции f. Далее, строим ограниченное открытое множество $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$, повторяя без каких-либо изменений этап 1 доказательства теоремы 2.1.

Этап 2 отличается тем, что вместо неравенства (2.15) из доказательства теоремы 2.1 мы теперь рассматриваем неравенство

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla f|^2\, dx \geqslant \mu_2(\gamma_0(\Omega)) \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \frac{|f|^2}{\operatorname{dist}^2(x, \partial\Omega_\varepsilon)}\, dx, \tag{3.10}$$

и приходим к выводу, что это неравенство влечет (3.7).

На этапе 3 пользуемся разбиениями $\partial\Omega_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^m S_j$, $\Omega_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^m S_j(\Omega_\varepsilon)$, где S_j и $S_j(\Omega_\varepsilon)$ определены в доказательстве теоремы 2.1.

Неравенство (3.10) будет верно, если что для каждого $j = 1, 2, \ldots, m$ имеет место неравенство

$$\int\limits_{S_j(\Omega_\varepsilon)} |\nabla f|^2\, dx \geqslant \mu_2(\gamma_0(\Omega)) \int\limits_{S_j(\Omega_\varepsilon)} \frac{|f|^2}{\operatorname{dist}^2(x, S_j)}\, dx, \tag{3.11}$$

для функции $f \in C^1\left(\overline{S_j(\Omega_\varepsilon)}\right)$, удовлетворяющей условию: $f(x) = 0$ для всех точек $x \in S_j$. Далее в доказательстве для краткости используем обозначение λ вместо $\lambda_0(\Omega)$.

Интегралы в (3.11) записываем в полярной системе координат с центром в точке x_j. Здесь, как и ранее, x_j — центр шара B_j, $x - x_j = r\,\omega$, $|x - x_j| = r$, $dx = r^{d-1} dr d\omega$, $(S_j - x_j)/\lambda := \{(x - x_j)/\lambda \,:\, x \in S_j\}$, $S_j(\Omega_\varepsilon) = \{x_j + r\omega \in \Omega_\varepsilon : x_j + \lambda\omega \in S_j,\ \lambda < r \leqslant \varphi_j(\omega)\}$, где

$$\varphi_j : (S_j - x_j)/\lambda \to \mathbb{R}$$

— некоторая непрерывная функция.

Неравенство (3.11) запишется в следующем виде

$$\int\limits_S d\omega \int\limits_{\lambda}^{\varphi_j(\omega)} \left(|\nabla f|^2 - \mu_2(\gamma_0(\Omega)) \frac{|f|^2}{(r-\lambda)^2} \right) r^2\, dr \geqslant 0, \tag{3.12}$$

где $S = (S_j - x_j)/\lambda$. Поскольку

$$\operatorname{dist}(x, S_j) = r - \lambda \leqslant \varphi_j(\omega) - \lambda \leqslant \delta_0(\Omega_\varepsilon) < \delta_0(\Omega),$$

где $x = x_j + r\omega \in S_j(\Omega_\epsilon)$, то внутренний интеграл в (3.12) можно представить в виде

$$Y(\omega) = \int\limits_{\lambda}^{\lambda\, a_j(\omega)} \left(|\nabla f|^2 - \mu_2(\gamma_0(\Omega)) \frac{|f|^2}{(r-\lambda)^2} \right) r^2\, dr,$$

где $1 \leqslant a_j(\omega) \leqslant \gamma_0(\Omega)$. Как и в доказательстве теоремы 2.1, рассматриваем гладкую функцию $g_\omega(r) := f(x_j + r\omega)$, удовлетворяющую граничному условию $g_\omega(\lambda) = 0$ и соотношениям $|\nabla f| \geqslant \left|\frac{\partial f}{\partial r}\right| = |g'_\omega(r)|$. Имеем

$$Y(\omega) \geqslant \int\limits_{\lambda}^{\lambda\, a_j(\omega)} \left(|g'_\omega(r)|^2 - \mu_2(\gamma_0(\Omega)) \frac{|g_\omega(r)|^2}{(r-\lambda)^2} \right) r^2\, dr.$$

Этап 4. Последний интеграл неотрицателен в силу леммы 3.1, в этом легко убедиться заменой переменной $t = r/\lambda$. Следовательно, $Y(\omega) \geqslant 0$ при любых $\omega \in (S_j - x_j)/\lambda$. Поэтому имеют место неравенства (3.12), (3.11) и (3.10). Таким образом, неравенство (3.7) доказано, этим и завершается доказательство. □

Применяя (3.3) и (3.4) к областям вида $\Omega \times \mathbb{R}^k$ и учитывая равенство $c_p(s, \Omega) = c_p(s, \Omega \times \mathbb{R}^k)$, из теоремы 3.2 получаем

Следствие 3.1. *Пусть d и k — натуральные числа, $d \geqslant 2$, $k \geqslant 1$, и пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — область, λ-близкая к выпуклой с радиусом $\lambda = \lambda_0(\Omega) \in (0, \infty)$. Если $\delta_0(\Omega) \in (0, \infty)$ и $\gamma = \gamma_0(\Omega) = 1 + \delta_0(\Omega)/\lambda_0(\Omega)$, то*

$$C_2(\Omega \times \mathbb{R}^k) \geqslant \left(1 + \frac{2}{\gamma}\right)^2 \frac{\mu_2(\gamma)}{4}, \qquad \sqrt{C_2^*(\Omega \times \mathbb{R}^k)} \geqslant c_2(2, \Omega \times \mathbb{R}^k) \geqslant \mu_2(\gamma).$$

В частном случае, когда область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, из теорем 2.1 и 3.1 вытекают следующие нижние оценки

$$c_2(2, \Omega) \geqslant \frac{\mu^2(3,2,\gamma)}{4}, \quad C_2(\Omega) \geqslant \frac{\mu^2(3,2,\gamma)\, \mu^2(3,4,\gamma)}{16}, \quad C_2^*(\Omega) \geqslant \frac{\mu^4(3,2,\gamma)}{16}.$$

Сравним эти неравенства с нижними оценками

$$c_2(2,\Omega) \geqslant \mu_2(\gamma), \quad C_2(\Omega) \geqslant \left(1+\frac{2}{\gamma}\right)^2 \frac{\mu_2(\gamma)}{4}, \quad C_2^*(\Omega) \geqslant \mu_2^2(\gamma),$$

обоснованными в теореме 3.2 лишь для трехмерных областей.

Легко показать, что $1+2/\gamma < \mu(3,4,\gamma) < 3$. Поэтому ключевой является задача сравнения величин $\mu^2(3,2,\gamma)/4$ и $\mu_2(\gamma)$ при $1<\gamma<\infty$. Напомним, что $\mu_2(\gamma) = 1/\gamma - 1/\gamma^2$ при $\gamma \geqslant 2$, следовательно, $\mu_2(\gamma) \sim 1/\gamma$ при $\gamma \to \infty$.

Предложение 3.1. *Для любого* $\gamma \in (1,\infty)$ *справедливы неравенства*

$$\frac{\mu^2(3,2,\gamma)}{4} \leqslant \mu_2(\gamma), \quad 1+\frac{2}{\gamma} < \mu(3,4,\gamma) < 3.$$

Кроме того, $\mu^2(3,2,\gamma) = O(1/\gamma^2)$ *при* $\gamma \to \infty$. *Следовательно,*

$$\frac{\mu^2(3,2,\gamma)}{4} < \mu_2(\gamma), \quad \frac{\mu^2(3,2,\gamma)\,\mu^2(3,4,\gamma)}{16} < \left(1+\frac{2}{\gamma}\right)^2 \frac{\mu_2(\gamma)}{4}$$

для достаточно больших γ.

Доказательство предложения 3.1. Пусть $1<\gamma<\infty$. Согласно лемме 3.1 для любой функции $f : [1,\gamma\,] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям этой леммы, справедливо неравенство

$$\int_1^\gamma |f'(r)|^2\, r^2\, dr \geqslant \mu_2(\gamma) \int_1^\gamma \frac{|f(r)|^2}{(r-1)^2}\, r^2\, dr,$$

причем постоянная $\mu_2(\gamma)$ в этом неравенстве является точной, т.е. максимальной из возможных. Получим теперь по-другому аналогичное неравенство с другой константой. А именно, полагая $g(r) := f^2(r)$, пользуясь тождеством $g'(r) \equiv 2f(r)f'(r)$, предложением 2.1 при $d=3$, $s=2$ и неравенством Коши–Буняковского–Шварца, будем иметь

$$\mu(3,2,\gamma) \int_1^\gamma \frac{|f(r)|^2}{(r-1)^2}\, r^2\, dr \leqslant 2\int_1^\gamma \frac{|f(r)f'(r)|}{r-1}\, r^2\, dr$$

$$\leqslant 2\sqrt{\int_1^\gamma \frac{|f(r)|^2}{(r-1)^2}\, r^2\, dr}\,\sqrt{\int_1^\gamma |f'(r)|^2\, r^2\, dr}.$$

Отсюда следует, что

$$\int_1^\gamma |f'(r)|^2\, r^2\, dr \geqslant \frac{\mu^2(3,2,\gamma)}{4} \int_1^\gamma \frac{|f(r)|^2}{(r-1)^2}\, r^2\, dr.$$

Поэтому с учетом максимальности $\mu_2(\gamma)$ в аналогичном неравенстве получаем: $\mu^2(3,2,\gamma)/4 \leqslant \mu_2(\gamma)$ для любого $\gamma \in (1,\infty)$.

Далее, по определению 2.2 имеем: $\mu(3,4,\gamma) = 1 + 2/\beta$, где величина $\beta = \beta_3(4,\gamma) \in (1,\gamma)$ определяется как единственный корень некоторого уравнения. Очевидно, неравенства $1 + 2/\gamma < \mu(3,4,\gamma) < 3$ являются тривиальным следствием неравенств $1 < \beta < \gamma$.

Исследуем теперь поведение $\mu(3,2,\gamma)$ при $\gamma \to \infty$. По определению 2.2 имеем: $\mu(3,2,\gamma) = -1 + 2/\beta$, где величина $\beta = \beta_3(2,\gamma) \in (1,\gamma)$ является единственным корнем уравнения

$$-\frac{1}{\beta-1} + \frac{2-\beta}{\beta^3}\int\limits_\beta^\gamma \frac{r^2}{(r-1)^2}dr = 0, \qquad \beta \in (1,\gamma), \tag{3.13}$$

(см. (2.2) при $d = 3$ и $s = 2$). Очевидно, если $\gamma \in (2,\infty)$, то число $\beta \in [2,\gamma)$ не может быть корнем уравнения (3.13). Следовательно, $\beta = \beta_3(2,\gamma) \in (1,2)$ для любого $\gamma \in (1,\infty)$.

Далее, из предложения 2.2 следует, что $\mu(3,2,\gamma)$ является невозрастающей функцией от γ. Поскольку $\mu(3,2,\gamma) = -1+2/\beta$, то $\beta = \beta_3(2,\gamma) \in (1,2)$ не убывает с ростом γ. Этот факт и уравнение (3.13) показывают, что $\beta = \beta_3(2,\gamma) \to 2$ при $\gamma \to \infty$. Пользуясь снова уравнением (3.13) и простой оценкой интеграла, будем иметь

$$\mu(3,2,\gamma) = \frac{\beta^2}{(\beta-1)\int\limits_\beta^\gamma r^2(r-1)^{-2}dr} < \frac{\beta^2}{(\beta-1)(\gamma-\beta)},$$

где $\beta^2/[(\beta-1)(\gamma-\beta)] \sim 4/\gamma$ при $\gamma \to \infty$. Поэтому $\mu^2(3,2,\gamma) = O(1/\gamma^2)$ при $\gamma \to \infty$, что и требовалось доказать. □

§4. Об областях, λ-близких к выпуклым

Сначала докажем три простых свойства областей, удовлетворяющих условию внешней сферы с заданным радиусом, т.е. областей, близких к выпуклым в смысле определения 2.1. Предположим, что d — натуральное число, $d \geqslant 2$, λ — фиксированное положительное число. Пусть $\Phi_d(\lambda)$ обозначает множество всех областей $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, λ-близких к выпуклым.

Предложение 4.1. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *если* $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \infty$, *то* $\Phi_d(\lambda_2) \subset \Phi_d(\lambda_1)$;

2) *если* $\Omega' \in \Phi_d(\lambda)$, $\Omega'' \in \Phi_d(\lambda)$, $\Omega' \cap \Omega'' \neq \varnothing$ *и* Ω — *одна из компонент открытого множества* $\Omega' \cap \Omega''$, *то* $\Omega \in \Phi_d(\lambda)$;

3) *если* $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \infty$, $\Omega' \in \Phi_d(\lambda_1)$, $\Omega'' \in \Phi_d(\lambda_2)$, $\Omega' \cap \Omega'' \neq \varnothing$, *то любая компонента* Ω *пересечения* $\Omega' \cap \Omega''$ *принадлежит* $\Phi_d(\lambda_1)$.

Доказательство предложения 4.1. Пусть $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \infty$ и $\Omega \in \Phi_d(\lambda_2)$. По определению 2.1 мы имеем: для любой граничной точки $y \in (\partial\Omega) \setminus \{\infty\}$ существует такая точка $a_y \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$, что $|y - a_y| = \lambda_2$ и $B_y = \{x \in \mathbb{R}^d : |x - a_y| < \lambda_2\} \subset \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$. Пусть $a'_y := y + (a_y - y)\lambda_1/\lambda_2$. Тогда $|y - a'_y| = \lambda_1$ и $B'_y := \{x \in \mathbb{R}^d : |x - a'_y| < \lambda_1\} \subset B_y \subset \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$. Следовательно, $\Omega \in \Phi_d(\lambda_1)$. Таким образом, первое утверждение предложения 4.1 доказано.

Докажем второе утверждение. Предположим, что $\Omega' \in \Phi_d(\lambda)$, $\Omega'' \in \Phi_d(\lambda)$, $\Omega' \cap \Omega'' \neq \varnothing$ и Ω — одна из компонент открытого множества $\Omega' \cap \Omega''$. Пусть $y \in (\partial\Omega) \setminus \{\infty\}$. Поскольку $\partial\Omega \subset (\partial\Omega') \cup (\partial\Omega'')$, то $y \in (\partial\Omega') \setminus \{\infty\}$ или $y \in (\partial\Omega'') \setminus \{\infty\}$. Поэтому существует такая точка a_y, что $|y - a_y| = \lambda$ и шар $B_y := \{x \in \mathbb{R}^d : |x - a_y| < \lambda\}$ лежит в множестве $\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega'}$ или в множестве $\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega''}$. Тогда $B_y \cap \Omega' \cap \Omega'' = \varnothing$ следовательно, $B_y \cap \Omega = \varnothing$, что и требовалось доказать.

Ясно, что третье утверждение предложения 4.1 является следствием 1) и 2). Этим и завершается доказательство. □

Следствие 4.1. *Пусть λ — положительное число, и пусть B_1, B_2 — шары в $\mathbb{R}^d$ с радиусами $\delta_0(B_1) \in [\lambda, \infty)$, $\delta_0(B_2) \in [\lambda, \infty)$, соответственно. Предположим, что $\overline{B_1} \cup \overline{B_2} \subset \Omega_0$, где Ω_0 — выпуклая область, в частности, $\Omega_0 = \mathbb{R}^d$. Тогда область $\Omega = \Omega_0 \setminus (\overline{B_1} \cup \overline{B_2})$ является λ-близкой к выпуклой.*

Это утверждение немедленно следует из предложения 4.1, так как легко видеть, что $\Omega_0 \setminus \overline{B_1} \in \Phi_d(\lambda)$, $\Omega_0 \setminus \overline{B_2} \in \Phi_d(\lambda)$ и $\Omega = (\Omega_0 \setminus \overline{B_1}) \cap (\Omega_0 \setminus \overline{B_2})$.

Приведем еще три примера.

Пример 4.1. На плоскости рассмотрим неограниченную область

$$\Omega_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < \infty, |x_2| < 1/x_1\}.$$

Легко показать, что Ω_2 является областью, λ-близкой к выпуклой с радиусом $\lambda = \lambda_0(\Omega_2) = \sqrt{2}$. Вычисление внутреннего радиуса связано с решением геометрической задачи о нахождении наибольшего числа $\rho > 0$, обладающего свойством

$$B_\rho := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - \rho)^2 + x_2^2 < \rho^2\} \subset \Omega_2.$$

Имеем: $\rho_{\max} = \delta_0(\Omega_2) = 2/3^{3/4}$, следовательно,

$$\gamma_0(\Omega_2) = 1 + 2^{1/2}/3^{3/4} \approx 1,62.$$

Пример 4.2. Пусть $\rho > 0$, $a > \rho$. Рассмотрим тор $T_{a\rho} \subset \mathbb{R}^3$, порожденный вращением круга $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0, (x_2 - a)^2 + x_3^2 < \rho^2\}$

вокруг оси Ox_3. Ясно, что тор $T_{a\rho}$ является областью, λ-близкой к выпуклой с радиусом $\lambda = \lambda_0(T_{a\rho}) = a-\rho$. Очевидно, внутренний радиус тора $\delta_0(T_{a\rho}) = \rho$ и поэтому $\gamma_0(T_{a\rho}) = a/(a-\rho)$.

Пример 4.3. Пусть $\rho \in (0, 1/2)$. Рассмотрим шары

$$B_\rho(z) := \{x \in \mathbb{R}^d : |x - z| < \rho\} \subset \mathbb{R}^d,$$

центры которых $z = (z_1, z_2, \ldots, z_d)$ расположены в точках с целочисленными координатами, т.е. $z \in \mathbb{Z}^d$. Очевидно, неограниченная область

$$\Omega(\rho, \infty) := \bigcap_{z \in \mathbb{Z}^d} \left(\mathbb{R}^d \setminus \overline{B_\rho(z)}\right)$$

является λ-близкой к выпуклой с радиусом $\lambda = \lambda_0(\Omega(\rho, \infty)) = \rho$. Можно показать, что внутренний радиус $\delta_0(\Omega(\rho, \infty)) = \sqrt{d}/2 - \rho$, следовательно, $\gamma_0(\Omega(\rho, \infty)) = \sqrt{d}/(2\rho)$.

Автор благодарен рецензенту за ряд полезных замечаний.

Список литературы

[1] Balinsky A. A., Evans W. D., Lewis R. T., *The analysis and geometry of Hardy's inequality*, Universitext, Springer, Heidelberg, 2015.

[2] Matskewich T., Sobolevskii P. E., *The best possible constant in a generalized Hardy's inequality for convex domains in* $\mathbb{R}^n$, Nonlinear Anal. **28** (1997), no. 9, 1601–1610.

[3] Marcus M., Mitzel V. J., Pinchover Y., *On the best constant for Hardy's inequality in* $\mathbb{R}^n$, Trans. Amer. Math. Soc. **350** (1998), no. 8, 3237–3250.

[4] Davies E. B, *A review of Hardy inequalities*, The Maz'ya anniversary collection, Vol.2. (Rostok, 1998), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 110, Birkhäuser, Boston, 1999, pp. 5–67.

[5] Barbatis G., Filippas S, Tertikas A., *A unified approach to improved* L^p *Hardy inequalities with best constants*, Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004), no. 6, 2169–2196.

[6] Avkhadiev F. G., *Hardy type inequalities in higher dimensions with explicit estimate of constants*, Lobachevskii J. Math. **21** (2006), 3–31.

[7] Авхадиев Ф. Г., *Неравенства типа Харди в плоских и пространственных открытых множествах*, Тр. Мат. ин-та РАН **255** (2006), 8–18.

[8] Авхадиев Ф. Г., Шафигуллин И. К., *Точные оценки констант Харди для областей со специальными граничными свойствами*, Изв. вузов. Мат. **2014**, №2, 69–73.

[9] Avkhadiev F. G., Wirths K.-J., *Unified Poincaré and Hardy inequalities with sharp constants for convex domains*, ZAMM Z. Angew. Math. Mech. **87** (2007), no. 8–9, 632–642.

[10] Avkhadiev F. G., Wirths K.-J., *Sharp Hardy-type inequalities with Lamb's constants*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **18** (2011), no. 4, 723–736.

[11] Avkhadiev F. G., Wirths K.-J., *On the best constants for the Brezis-Marcus inequalities in balls*, J. Math. Anal. Appl. **396** (2012), no. 2, 473–480.

[12] Avkhadiev F. G., Laptev A., *Hardy inequalities for nonconvex domains. Around the Research of Vladimir Maz'ya.* I, Int. Math. Ser. (N. Y.), vol. 11, Springer, New York, 2010, pp. 1–12.

[13] Avkhadiev F. G., *Hardy inequalities in non-convex domains of the Euclidean space*, J. Anal. **23** (2015), 1–20.

[14] Авхадиев Ф. Г., *Геометрическое описание областей, для которых константа Харди равна* 1/4, Изв. РАН. Сер. мат. **78** (2014), №5, 3–26.

[15] Owen M. P., *The Hardy-Rellich inequality for polyharmonic operators*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **129** (1999), no. 4, 825–839.

[16] Avkhadiev F. G., *Hardy-Rellich inequalities in domains of the Euclidean space*, J. Math. Anal. Appl. **442** (2016), no. 2, 469–484.

[17] Авхадиев Ф. Г., *Интегральные неравенства в областях гиперболического типа и их применения*, Мат. сб. **206** (2015), №2, 3–28.

[18] Авхадиев Ф. Г., Насибуллин Р. Г., *Неравенства типа Харди в произвольных областях с конечным внутренним радиусом*, Сиб. мат. ж. **55** (2014), №2, 239–250.

[19] Авхадиев Ф. Г., Шафигуллин И. К., *Оценки констант Харди при трубчатом расширении множеств и в областях с конечными граничными моментами*, Мат. тр. **16** (2013), №2, 3–12.

[20] Ладыженская О. А., *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973.

Казанский федеральный
университет,
ул. Кремлевская, 18,
420008, Казань, Россия
E-mail: avkhadiev47@mail.ru

Поступило 16 февраля 2017 г.