В. С. Шевелев, Суммы подперманентов линейных оболочек подстановочных матриц, *Дискрет. матем.*, 1990, том 2, выпуск 3, 65–80

Дискретная математика

том 2 выпуск 3 * 1990

УДК 519.1

СУММЫ ПОДПЕРМАНЕНТОВ ЛИНЕЙНЫХ ОБОЛОЧЕК ПОДСТАНОВОЧНЫХ МАТРИЦ

В. С. Шевелев

Введенная Твербергом [1] матричная функция $\sigma_{t,n}(A)$ — сумма всех подперманентов порядка t квадратичной матрицы порядка n — впервые вычисляется на линейных оболочках двух и трех подстановочных и близких к ним матриц. Результаты статьи, являющиеся обобщением классических формул Тушара — Капланского, решающих задачу о супружеских парах, а также результатов Минка [7], Мозера [8] и др., получены развитым автором методом «индекса размещений» [6].

В качестве приложения доказана явная формула (анонсированная в [11]) для чисел обобщенной (линейной) задачи о гостях порядка 3, для которых недавно Кэнфилд и Уормэлд [10] установили существование рекуррентной формулы весьма высокого порядка.

Введение

Сумма $\sigma_{t,n}(A)$ всех подперманентов порядка t (или перманентов подматриц порядка t) $(n\times n)$-матрицы $A=\{a_{ij}\}$ впервые введена в рассмотрение Твербергом [1]. Большой цикл работ (подробную библиографию см. в [2—3]), группировавшихся на протяжении двух десятилетий вокруг поставленной в [1] обобщенной гипотезы Ван дер Вардена, был посвящен главным образом качественным исследованиям $\sigma_{t,n}(A)$ в классе дважды стохастических матриц. Это исследование завершилось доказательством гипотезы, полученным Фридлендом [4], что явилось важнейшим результатом после доказательств гипотезы Ван дер Вардена для перманента, полученных советскими математиками Г. П. Егорычевым [20] и Д. И. Фаликманом [21].

Комбинаторный смысл функции $\sigma_{t,n}(A)$ состоит прежде всего в том, что она является «весовым» обобщением t-го коэффициента ладейного многочлена матрицы A. Действительно, t-й ладейный коэффициент (0,1)-матрицы по определению есть число способов выбора t ее неколлинеарных (т. е. попарно не находящихся в одной строке или в одном столбце) единиц. Если каждому выбору ненулевых неколлинеарных элементов матрицы A сопоставить «вес», равный произведению выбранных элементов, то сумма всех «весов», очевидно, равна $\sigma_{t,n}(A)$.

В настоящее время формулы для $\sigma_{t,n}(A)$ известны лишь для немногих классов (0, 1)-матриц. Например, если $A=I+P$, где P — подстановочная матрица цикла $(1,2,\ \ldots,\ n)$, из исследований Тушара и Капланского следует, что

$$\sigma_{t,n}(I+P)=\frac{2n}{2n-t}\binom{2n-t}{t}. \qquad (1)$$

Если же $A=I+P^{(1)}$, где $P^{(1)}$ получается из P при замене единицы с позицией $(n, 1)$ нулем, то

$$\sigma_{t,n}(I+P^{(1)})=\binom{2n-t}{t}. \tag{2}$$

Обе эти формулы получаются с помощью лемм Капланского (см., например, [5, с. 130—133]). Однако уже в случае линейной комбинации подстановочных матриц $\alpha I+\beta P$ (или близкой матрицы $\alpha I+\beta P^{(1)}$) метод, основанный на леммах Капланского, недостаточен.

В настоящей статье развитым автором методом «индекса размещений» [6] функция $\sigma_{t,n}(A)$ вычисляется на оболочке любых двух и в ряде случаев — трех подстановочных, а также близких к ним матриц. Эти результаты являются широким обобщением формул (1), (2), а также результатов, полученных в работах [7—9] и некоторых других. В качестве одного из следствий, насколько известно автору, впервые выписывается явная формула для чисел $v_n^{(3)}$ обобщенной линейной задачи о гостях порядка 3, для которых недавно Кэнфилд и Уормэлд [10] установили рекуррентное соотношение порядка 67. Эта формула была анонсирована нами в работе [11].

§ 1. Определения. Лемма об индексе размещения

Пусть M — квадратная (0, 1)-матрица порядка n. Множество позиций (размещение) r ее неколлинеарных единиц

$$(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_r, j_r)$$

назовем *циклическим*, если числа $j_1, j_2, \ldots, j_r$ являются некоторой перестановкой чисел $i_1, i_2, \ldots, i_r$.

Пусть E — некоторое размещение неколлинеарных единиц матрицы M. Рассмотрим множество его максимальных подмножеств вида

$$(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots, (i_{t-1}, i_t), (i_t, i_{t+1}). \tag{1.1}$$

Число тех из них, которые не являются циклическими, назовем *индексом* E $(\operatorname{ind} E)$. Из определения следует, что размещение имеет нулевой индекс тогда и только тогда, когда оно является циклическим.

Проекцией $\operatorname{pr} E$ на главную диагональ размещения E назовем множество позиций вида (i, i), коллинеарных по крайней мере одной из позиций E.

Через $|E|$, как обычно, будем обозначать число элементов E. Важное значение в дальнейшем имеет следующее утверждение.

Лемма 1.1. $|\operatorname{pr} E|=|E|+\operatorname{ind} E$.

Доказательство. Пусть $C_1, C_2, \ldots, C_r$ — все максимальные подмножества E вида (1.1), $\varkappa$ из которых не являются циклическими. Тогда $C_i \cap C_j=\varnothing$ $(i \neq j)$ и, следовательно,

$$|E|=\sum_{i=1}^{r}|C_i|, \quad \operatorname{ind} E=\varkappa.$$

Из определения проекции следует, что

$$\begin{aligned} &|\operatorname{pr} C_i|=|C_i|, && \text{если } C_i \text{ — циклическое подмножество,}\\ &|\operatorname{pr} C_i|=|C_i|+1, && \text{если } C_i \text{ — не циклическое подмножество,}\end{aligned}$$

и ввиду того, что $C_i \cap C_j=\varnothing$ $(i \neq j)$ (и максимальности C_i)

$$\operatorname{pr} C_i \cap \operatorname{pr} C_j=\varnothing \qquad (i \neq j).$$

Поэтому

$$|\operatorname{pr} E|=\sum_{i=1}^{r}|\operatorname{pr} C_i|=\sum_{i=1}^{r}|C_i|+\sum_{i=1}^{\varkappa} 1=|E|+\operatorname{ind} E.$$

Из леммы 1.1 следует, что

$$\operatorname{ind} E = |\operatorname{pr} E| - |E| \leqslant n - |E| \tag{1.2}$$

и, поскольку $\operatorname{ind} E \leqslant |E|$, всегда

$$0 \leqslant \operatorname{ind} E \leqslant [n/2].$$

Кроме того, из (1.2) следует, что если $|E| = n$, то $\operatorname{ind} E = 0$.

Пусть $\operatorname{tr} M = n$. Через $L_{M-I}(k, \varkappa)$ обозначим число размещений k неколлинеарных единиц матрицы $M - I$ с индексом $\varkappa$. Примем естественные соглашения

$$L_{M-I}(k, \varkappa) = 0 \quad \text{при} \quad \varkappa > k; \; L_{M-I}(0, 0) = 1.$$

Функцию L_{M-I} назовем *индикаторной функцией* матрицы M. Если на позициях единиц матрицы $M - I$ мысленно расставлять ладьи, то $L_{M-I}(k, \varkappa)$ равна числу расстановок k не атакующих друг друга ладей, держащих под контролем $k + \varkappa$ позиций главной диагонали, и совпадает с ладейной функцией, введенной нами в [12].

§ 2. Индикаторные функции матриц $I + P$, $I + P^{(1)}$

Пусть E ($|E| < n$) — некоторое размещение неколлинеарных единиц матрицы P ($P^{(1)}$) порядка n. Скажем, что две единицы в E *следуют подряд*, если они находятся в соседних (по $\operatorname{mod} n$) строках. Каждое максимальное множество следующих подряд единиц размещения E называется его *серией*. В силу структуры матрицы P ($P^{(1)}$) для любой серии $C \subset E$ $|\operatorname{pr} C| = |C| + 1$ и, следовательно, по лемме 1 $\operatorname{ind} C = 1$. Замечая, что проекции отдельных серий не пересекаются, заключаем, что $\operatorname{ind} E$ равен числу содержащихся в E серий. Имея в виду соответствие π_1: $(i, i \oplus 1) \leftrightarrow i \,(\operatorname{mod} n)$, множество позиций единиц матрицы P можно рассматривать как множество n циклически расположенных равноотстоящих точек. Используя известный результат [13, с. 217] о числе (0, 1)-конфигураций в n циклически расположенных точках с числом k единиц и заданным числом $\varkappa$ серий, получаем формулу для индикаторной функции матрицы $M = I + P$:

$$L_P(k, \varkappa) = \frac{n}{k} \binom{k}{\varkappa} \binom{n-k-1}{\varkappa-1}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad 0 \leqslant \varkappa \leqslant [n/2]. \tag{2.1}$$

Заметим, что при $k = n$ формула (2.1) остается верной, если принять $\binom{-1}{-1} = 1$ (это соглашение мы будем иметь в виду и в дальнейшем). При этом $L_P(n, \varkappa) = \delta_{\varkappa, 0}$, где δ — символ Кронекера.

Вполне аналогично, используя известный результат о числе (0, 1)-последовательностей длины $n - 1$ с числом единиц k и числом серий $\varkappa$ [13, с. 215—216], получим формулу

$$L_{P^{(1)}}(k, \varkappa) = \binom{k-1}{\varkappa-1} \binom{n-k}{\varkappa}. \tag{2.2}$$

§ 3. Вычисление $\sigma_{t,n}(\alpha, \beta) = \sigma_{t,n}(\alpha I + \beta P)$, $\sigma^{(1)}_{t,n}(\alpha, \beta) = \sigma_{t,n}(\alpha I + \beta P^{(1)})$

Для вычисления функции $\sigma_{t,n}(\alpha, \beta)$ используем формулу (2.1). С этой целью подсчитаем число способов выбора t неколлинеарных позиций ненулевых элементов матрицы $\alpha I + \beta P$. На главной диагонали эти позиции можно выбрать $\binom{n}{t}$ способами. Можно, однако, вначале выбрать $k \geqslant 1$ позиций вида $(i, i \oplus 1)$, составляющих некоторое размещение E с условием $\operatorname{ind} E = \varkappa$, $L_P(k, \varkappa)$ способами. Тогда число позиций главной диагонали, на которых могут быть выбраны остальные $t - k$ позиций, равно $n - |\operatorname{pr} E|$. Однако по лемме 1.1 $|\mathrm{pr}\, E| = k + \varkappa$. Таким образом, общее число способов выбора t неколлинеарных позиций при фиксированных $k, \varkappa$ составляет $\binom{n-k-\varkappa}{t-k} L_p(k, \varkappa)$. При этом общий вклад в величину $\sigma_{t,n}(\alpha, \beta)$ равен $\binom{n-k-\varkappa}{t-k} L_p(k, \varkappa)\, \alpha^{t-k}\beta^k$. Суммируя по всем возможным значениям $k, \varkappa$ и принимая во внимание (2.1), получим формулу

$$\sigma_{t,n}(\alpha, \beta) = \binom{n}{t}\alpha^t + \sum_{k=1}^{t}\sum_{\varkappa=0}^{q} \frac{n}{k}\binom{k}{\varkappa}\binom{n-k-1}{\varkappa-1}\binom{n-k-\varkappa}{t-k}\alpha^{t-k}\beta^k, \tag{3.1}$$

где $q = \min(n-t,\ k,\ [n/2])$.

Вполне аналогично с помощью (2.2) получим формулу

$$\sigma^{(1)}_{t,n}(\alpha, \beta) = \binom{n}{t}\alpha^t + \sum_{k=1}^{t}\sum_{\varkappa=1}^{q}\binom{k-1}{\varkappa-1}\binom{n-k}{\varkappa}\binom{n-k-\varkappa}{t-k}\alpha^{t-k}\beta^k. \tag{3.2}$$

Полученные формулы допускают упрощение. Действительно, суммирование по $\varkappa$ в них можно проводить до k (добавляя в случае $q < k$ некоторое число нулевых слагаемых). Замечая далее, что при $t < n$

$$\binom{k}{\varkappa}\binom{n-k-1}{\varkappa-1}\binom{n-k-\varkappa}{t-k} = \frac{\varkappa}{n-t}\binom{n-k-1}{n-t-1}\binom{k}{\varkappa}\binom{n-t}{\varkappa},$$

$$\binom{k-1}{\varkappa-1}\binom{n-k}{\varkappa}\binom{n-k-\varkappa}{t-k} = \frac{\varkappa}{k}\binom{n-k}{n-t}\binom{k}{\varkappa}\binom{n-t}{\varkappa},$$

и принимая во внимание тождество [14, с. 622]

$$\sum_{\varkappa=1}^{k}\varkappa\binom{k}{\varkappa}\binom{a}{\varkappa} = k\binom{a+k-1}{k},$$

заключаем, что при $t < n$

$$\sigma_{t,n}(\alpha, \beta) = \frac{n}{n-t}\sum_{k=0}^{t}\binom{n-k-1}{t-k}\binom{n-t+k-1}{k}\alpha^{t-k}\beta^k, \tag{3.3}$$

$$\sigma^{(1)}_{t,n}(\alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{t}\binom{n-k}{t-k}\binom{n-t+k-1}{k}\alpha^{t-k}\beta^k. \tag{3.4}$$

Эти формулы при $t = n$ должны быть дополнены очевидными равенствами

$$\sigma_{n,n}(\alpha, \beta) = \mathrm{per}(\alpha I + \beta P) = \alpha^n + \beta^n, \tag{3.5}$$

$$\sigma^{(1)}_{n,n}(\alpha, \beta) = \mathrm{per}(\alpha I + \beta P^{(1)}) = \alpha^n, \tag{3.6}$$

формально получающимися из (3.1), (3.2), если учесть, что $\binom{n-k-1}{-1} = \delta_{n,k}$.

Легко видеть, что при $t < n$ в случае $\alpha = \beta = 1$ из (3.3), (3.4) вытекают формулы Тушара — Капланского (1), (2).

§ 4. Суммы подперманентов линейных оболочек двух подстановочных матриц

Функция $\sigma_{t,n}(A)$, как и перманент, очевидно, инвариантна относительно перестановки строк и столбцов матрицы A: для любых двух подстановочных матриц Π_1 и Π_2

$$\sigma_{t,n}(\alpha\Pi_1 + \beta\Pi_2) = \sigma_{t,n}(\alpha I + \beta\Pi_1^{-1}\Pi_2).$$

Поэтому важную роль играет циклическая структура матрицы $\Pi_1^{-1}\Pi_2$. Пусть она имеет вид $(l_1, l_2, \ldots, l_k)$, $l_i \geqslant 2$. Подматрицы A', A'' матрицы A называются разобщенными, если нет ни одной строки или столбца матрицы A, в которых бы одновременно находились элементы из A' и A''. В силу разобщенности подматриц матрицы $\alpha I+\beta\Pi_1^{-1}\Pi_2$, соответствующих отдельным компонентам циклической структуры, а также ввиду того, что подматрица, соответствующая компоненте l_i, перестановочно эквивалентна матрице $I_{l_i}+P_{l_i}$,

$$\sigma_{t,n}(\alpha\Pi_1+\beta\Pi_2)=\sum\prod_{i=1}^{k}\sigma_{t_i,l_i}(\alpha,\beta), \tag{4.1}$$

где суммирование проводится по всем t_i, $0\leqslant t_i\leqslant l_i$, $i=1,\ldots,k$, $t_1+t_2+\ldots+t_k=t$, а функция $\sigma_{t_i,l_i}(\alpha,\beta)$ определяется формулами (3.3), (3.5).

В частности, в случае $t=n$ сумма содержит единственное слагаемое, соответствующее равенствам $t_i=l_i$, $i=1,\ldots,k$. В этом специальном случае из (4.1) и (3.5) вытекает известный результат о перманенте оболочки $\alpha\Pi_1+\beta\Pi_2$ [13, с. 325]

$$\sigma_{n,n}(\alpha\Pi_1+\beta\Pi_2)=\operatorname{per}(\alpha\Pi_1+\beta\Pi_2)=\prod_{i=1}^{k}(\alpha^{l_i}+\beta^{l_i}).$$

§ 5. Обзор дальнейших результатов

В следующей части статьи будет решена более трудная задача, состоящая в вычислении суммы подперманентов линейной оболочки трех подстановочных матриц I, P, P^2:

$$\sigma_{t,n}(\alpha,\beta,\gamma)=\sigma_{t,n}(\alpha I+\beta P+\gamma P^2),\qquad 1\leqslant t\leqslant n, \tag{5.1}$$

а затем рассмотрена и несколько более общая ситуация. Полученная ниже формула для функции (5.1) является обобщением как известного результата Минка [7] о перманенте оболочки подстановочных матриц I, P, P^2, так и результата Мозера [8], вычислившего функцию (5.1) в специальном случае $\alpha=\beta=\gamma=1$ в связи с перечислением некоторого подкласса латинских прямоугольников $4\times n$. Мозер использовал тонкую модификацию метода Тушара — Капланского. Однако точно так же, как использование лемм Капланского не позволяет решить задачу о $\sigma_{t,n}(\alpha,\beta)$ в «двумерном» случае, так и метод Мозера не позволяет сделать это для функции $\sigma_{t,n}(\alpha,\beta,\gamma)$. Заметим, что в случае $t=n$ для функции $\sigma_{n,n}(\alpha,\beta,\gamma)=\operatorname{per}(\alpha I+\beta P+\gamma P^2)$ ранее нами было установлено интегральное представление и указаны другие явные формулы [16, 17], отличные от формулы Минка [7].

Вычисление $\sigma_{t,n}(\alpha,\beta,\gamma)$ мы проведем путем перечисления некоторых специальных (0, 1)-конфигураций, названных нами гипермассивами. Перечисление этих объектов предварительно проводится при фиксировании некоторых характеризующих их параметров излагаемым ниже приемом «стыковки — расщепления».

§ 6. Дополнительные определения

Пусть M — квадратная (0, 1)-матрица. Множество ее позиций вида (i, j), $j=i\oplus k\,(\mathrm{mod}\,n)$, $1\leqslant i\leqslant n$, $0\leqslant k\leqslant n-1$, будем называть *$P^k$-диагональю* матрицы, а элементы, находящиеся на P^k-диагонали — *P^k-элементами.*

Направление следования P^k-элементов назовем *положительным*, если первые компоненты их позиций следуют в естественном порядке по модулю n: $1, 2, 3, \ldots$, и *отрицательным* — в противоположном случае: $1, n, n-1, \ldots$

Обозначим $\mathfrak{M}_{1,2}$ множество (0, 1)-матриц M, единицы которых попарно неколлинеарны и являются P^1, P^2-элементами. Очевидно, каждому размещению неколлинеарных единиц матрицы P^1+P^2 взаимнооднозначно соответствует некоторая матрица из $\mathfrak{M}_{1,2}$.

Любую серию P^1-единиц матрицы $M\in\mathfrak{M}_{1,2}$ назовем *P^1-массивом*; любую серию P^2-единиц матрицы M вместе со следующим после нее в положительном направлении P^2-нулем назовем *P^2-массивом*, а заключающий его нуль — *буферным нулем*. Такое название связано с вводимым в § 10 понятием стыковки. Общий термин «массив» мы будем употреблять, подразумевая под ним P^1- или P^2-массив. Число элементов массива назовем его *длиной*.

Элементы матрицы, входящие в один из массивов, назовем *m-элементами*. Будем говорить о *подряд идущих* m-элементах (не обязательно находящихся на одной P^k-диагонали), если они находятся в подряд следующих (по модулю n) строках.

Любое максимальное множество Γ подряд идущих m-элементов будем называть *гипермассивом*, а величину $|\Gamma|$ — его *длиной*. Если $|\Gamma| = n$, гипермассив будем называть *круговым*.

Цепью единиц матрицы $M \in \mathfrak{M}_{1,2}$, назовем любое не являющееся циклическим максимальное множество единиц с позициями вида (1.1). Заметим, что если M содержит цепь единиц с позициями (1.1), то ее столбец i_1 и строка i_{t+1} являются нулевыми вследствие максимальности множества (1.1). Отметим также, что две цепи, имеющие общую единицу, совпадают.

Скажем, что цепь единиц *отнесена к массиву E* матрицы M, если последняя единица цепи (в положительном направлении) принадлежит E. Число всех отнесенных к E цепей единиц обозначим через $\nu(E)$. Общее число всех цепей единиц матрицы M обозначим через $\nu(M)$. В соответствии с введенным в § 1 определением $\nu(M)$ совпадает с индексом множества всех единиц матрицы $M \in \mathfrak{M}_{1,2}$ (условимся писать $\operatorname{ind} M$).

§ 7. Леммы об индексах гипермассивов

Заметим, что индекс массива E матрицы $M \in \mathfrak{M}_{1,2}$ не обязательно совпадает с $\nu(E)$. Например, если E есть P^1-массив и $|E| < n$, то $\operatorname{ind} E = 1$. Однако, если E составляет часть цепи, продолжающейся в следующем P^2-массиве, то $\nu(E) = 0$. Покажем, что для гипермассивов такая ситуация невозможна.

Лемма 7.1. *Если Γ — гипермассив матрицы $M \in \mathfrak{M}_{1,2}$, то* $\operatorname{ind}\Gamma = \nu(\Gamma)$.

Доказательство. Если Γ — круговой гипермассив ($|\Gamma| = n$), то он содержит все единицы матрицы M и равенство $\operatorname{ind}\Gamma = \nu(\Gamma)$ совпадает с отмеченным выше равенством $\operatorname{ind} M = \nu(M)$. Если же Γ — некруговой гипермассив и его последней (в положительном направлении) единицей является P^1-единица с позицией $(i, i \oplus 1)$, то следующая строка матрицы является нулевой, и цепь, содержащая последнюю единицу гипермассива, не может быть продолжена в следующем гипермассиве. Точно так же, если последней единицей Γ является P^2-единица с позицией $(i, i \oplus 2)$, то следующие после нее две строки матрицы являются нулевыми (так как гипермассив по определению в этом случае завершается буферным нулем), и, как и выше, цепь, содержащая последнюю единицу гипермассива, обрывается.

Следствие. *Индекс матрицы $M \in \mathfrak{M}_{1,2}$ равен сумме индексов всех содержащихся в ней гипермассивов.*

Лемма 7.2. *Индекс кругового гипермассива равен числу входящих в него P^2-массивов длины, не меньшей* 3.

Доказательство. Подсчитаем число цепей, отнесенных к различным массивам кругового гипермассива. Структура кругового гипермассива такова, что последняя единица каждого его массива входит в цепь, продолжающуюся в следующем массиве. Это означает, что к любому P^1-массиву, равно как и к P^2-массиву длины 2 (содержащему одну единицу), не отнесена ни одна цепь гипермассива. В то же время, единицы каждого P^2-массива длины, не меньшей 3, принадлежат (поочередно) к двум разным цепям, лишь одна из которых продолжается в следующем массиве. Таким образом, каждая из цепей кругового гипермассива (и притом только одна) отнесена к некоторому P^2-массиву длины, не меньшей 3.

Лемма 7.3. *Индекс гипермассива длины, не превосходящей $n-1$, равен числу входящих в него P^2-массивов длины, не меньшей 3, увеличенному на единицу.*

Доказательство. Число цепей, отнесенных к массивам гипермассива, кроме последнего (в положительном направлении), таково же, как и в предыдущем случае. К последнему массиву отнесено на одну цепь больше, так как ни одна его цепь уже не может быть продолжена в следующем массиве по соображениям, указанным в доказательстве леммы 7.1.

§ 8. Леммы о числе некоторых (0, 1)-конфигураций

В этом параграфе приводятся некоторые важные для дальнейшего формулы о числе (0, 1)-конфигураций, близкие к формулам, содержащимся в [13, с. 215—218]. Предварительно докажем одну композиционную лемму.

Лемма 8.1. *Число композиций n точно с $r<n$ частями, m из которых равны 1, равно*

$$C^{(m)}(r, n)=\binom{r}{m}\binom{n-r-1}{r-m-1}. \tag{8.1}$$

Доказательство. Число $C^{(m)}(r, n)$, очевидно, равно

$$C^{(m)}(r, n)=\binom{r}{m}C_2(r-m,\ n-m), \qquad r<m,$$

где $C_2(l, n)$ — число композиций n точно с l частями, каждая из которых не меньше 2. Формула леммы следует теперь из известного равенства [18, с. 76]

$$C_2(l, n)=\binom{n-l-1}{l-1}.$$

Обозначим $M_n^{(h)}(2p, n_0, n_1)$ число (0, 1)-конфигураций, элементы которых расположены в n равноотстоящих точках окружности, имеющих p серий нулей с общим их числом n_0 и p серий единиц с общим их числом n_1, причем точно h серий единиц состоят из одной единицы.

Лемма 8.2.

$$M_n^{(h)}(2p, n_0, n_1)=\frac{n}{p}\binom{n_0-1}{p-1}C^{(h)}(p, n_1) \qquad (n_0+n_1=n). \tag{8.2}$$

Доказательство следует из соображений, аналогичных приведенным в [13, с. 217]. Действительно, при фиксированном положении начальной единицы какой-либо из p серий число рассматриваемых (0, 1)-конфигураций равно количеству решений в натуральных числах системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{p} x_i=n_0, \qquad \sum_{i=1}^{p} y_i=n_1$$

при условии, что h чисел y_i равны 1, т. е. равно

$$\binom{n_0-1}{p-1}C^{(h)}(p, n_1).$$

Но для расположения на окружности фиксированной единицы имеется n вариантов, и деление на p исключает повторение ситуаций, связанное с одновременными циклическими перемещениями координат векторов $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_p)$.

Обозначим $N^{(h)}(p, m_0, m_1)$ число (0, 1)-последовательностей длины m_0+m_1, имеющих m_0 нулей и m_1 единиц с заданным числом p серий единиц, h из которых состоят из одной единицы.

Лемма 8.3.

$$N^{(h)}(p, m_0, m_1)=\binom{m_0+1}{p}C^{(h)}(p, m_1). \tag{8.3}$$

Доказательство. Аналогично [13, с. 215] разобьем все исследуемые (0,1)-последовательности на 3 класса в соответствии с тем, что последовательность: а) начинается и кончается сериями из единиц; б) начинается и кончается сериями из нулей; в) начинается серией из единиц, кончается серией из нулей или, наоборот, начинается серией из нулей и кончается серией из единиц. Число последовательностей в классе а) равно $C^{(h)}(p, m_1)\times \times\binom{m_0-1}{p-2}$; в классе б) $C^{(h)}(p, m_1)\binom{m_0-1}{p}$; в классе в) $2C^{(h)}(p, m_1)\binom{m_0-1}{p-1}$. Суммируя, получим формулу леммы.

Замечание. Если $m_1=0$, то $p=h=0$ и $N^{(0)}(0, m_0, 0)=1$, что согласуется с формулами лемм 8.3 и 8.1 с учетом соглашения $\binom{-1}{-1}=1$.

§ 9. Число матриц класса $\mathfrak{M}_{1,2}$, содержащих один гипермассив с заданными числовыми характеристиками

Обозначим $\mathfrak{M}_{1,2}(m, l, k, i, \varkappa)$ подкласс матриц из $\mathfrak{M}_{1,2}$ с индексом $\varkappa$, имеющих k единиц, i из которых находятся на P^2-диагонали, и содержащих m гипермассивов суммарной длины l.

Пусть матрица $M\in\mathfrak{M}_{1,2}$ содержит единственный гипермассив Г. Из определения (§ 6) следует, что $\Gamma=E_1\cup E_2\cup B$, где E_j — множество его P^j-единиц, $j=1, 2$, B — множество его буферных нулей. Рассмотрим 2 случая: $l=n$ и $l<n$.

Лемма 9.1. *Если $k\leqslant n-1$, то*

$$|\mathfrak{M}_{1,2}(1, n, k, i, \varkappa)|=M_n^{(n-k-\varkappa)}(2(n-k), n-i, i).$$

Доказательство. По условию Г — круговой гипермассив ($|\Gamma|=n$). В этом случае Г полностью определяется заданием единиц множества E_2. Действительно, если между двумя P^2-единицами из Г нет других P^2-единиц, а расстояние (по модулю n) равно $r\geqslant 1$, то в разделяющих их строках по определению должны находиться буферный нуль и $r-1$ P^1-единиц. По условию $|E_1|+|E_2|=k$, $|E_2|=i$, $\operatorname{ind}\Gamma=\varkappa$. Из определения следует, что число P^2-массивов совпадает с $|B|=n-k$. По лемме 7.2 точно $\varkappa$ из $n-k$ P^2-массивов имеют длину, не меньшую 3. Поэтому число P^2-массивов минимальной длины 2 (содержащих единицу и буферный нуль) равно $n-k-\varkappa$. Имея в виду соответствие π_2: $(j, j\oplus 2)\leftrightarrow j\pmod n$, заметим, что Г вполне определяется циклической (0, 1)-конфигурацией, единицам которой соответствуют P^2-единицы, а нулям — P^1-единицы и буферные нули. Такая (0,1)-конфигурация имеет, следовательно, $n-k$ серий единиц с общим числом единиц i, причем $n-k-\varkappa$ серий содержат по одной единице. Общее число таких конфигураций вычисляем по лемме 8.2 при $p=n-k$, $n_0=n-i$, $n_1=i$, $l=n-k-\varkappa$.

Замечание. Очевидным дополнением к лемме 9.1 является формула

$$|\mathfrak{M}_{1,2}(1, n, n, i, \varkappa)|=\begin{cases}1, & \text{если } \varkappa=0,\ i=0 \text{ или } n,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Лемма 9.2. *Если $l\leqslant n-1$, то*

$$|\mathfrak{M}_{1,2}(1, l, k, i, \varkappa)|=nN^{(l-k-\varkappa+1)}(l-k, l-i-1, i).$$

Доказательство. Число P^2-массивов, входящих в Г, равно $|B|=l-k$, а число P^2-массивов длины 2, содержащих одну единицу, согласно лемме 7.3 равно $l-k-\varkappa+1$. Пусть вначале $l\geqslant 2$. Заметим, что некруговой гипермассив завершается либо P^1-единицей, либо буферным нулем. При этом его последний элемент полностью определяется предыдущим. Действительно, если $(l-1)$-й элемент является P^2-единицей, то гипермассив оканчивается буферным нулем; если же $(l-1)$-й элемент есть P^1-единица или буферный нуль, то гипермассив оканчивается P^1-единицей (в противном случае его длина окажется больше l). Поэтому каждому некруговому гипермассиву длины $l\geqslant 2$ с началом в фиксированной строке можно поставить во взаимно однозначное соответствие $(0, 1)$-последовательность длины $l-1$, единицам которой соответствуют P^2-единицы гипермассива, а нулям соответствуют P^1-единицы гипермассива и буферные нули (при этом последний элемент гипермассива во внимание не принимается). Такая последовательность имеет $l-k$ серий единиц (по числу P^2-массивов) с общим числом единиц, равным i, причем $l-k-\varkappa+1$ серий (по числу P^2-массивов длины 2) содержат по одной единице. Общее число таких последовательностей равно $N^{(l-k-\varkappa+1)}(l-k,\ l-i-1,\ i)$. Освобождаясь от фиксации начальной строки гипермассива, получим, что имеется всего $nN^{(l-k-\varkappa+1)}(l-k,\ l-i-1,\ i)$ матриц класса $\mathfrak{M}_{1,2}$, содержащих единственный гипермассив с заданными параметрами.

Остается заметить, что число гипермассивов длины 1 (содержащих одну P^1-единицу), очевидно, равно n. Это согласуется с формулой леммы при $l=k=\varkappa=1$, $i=0$, если принять $N^{(0)}(0, 0, 0)=1$ (см. замечание после леммы 8.3).

Обозначим $\mathfrak{M}^*_{1,2}$ подкласс матриц класса $\mathfrak{M}_{1,2}$, содержащих нули на местах $(n-1, 1)$, $(n, 1)$, $(n, 2)$. Обозначим, далее, через $\mathfrak{M}^*_{1,2}(m, l, k, i, \varkappa; s)$ подкласс матриц из $\mathfrak{M}^*_{1,2}$ с теми же параметрами m, l, k, i, $\varkappa$, что и для $\mathfrak{M}_{1,2}(m, l, k, i, \varkappa)$, и параметром s, означающим номер первой ненулевой строки матрицы.

Лемма 9.3. *Если* $l\leqslant n-s$, *то*

$$|\mathfrak{M}^*_{1,2}(1, l, k, i, \varkappa; s)|=N^{(l-k-\varkappa+1)}(l-k,\ l-i-1,\ i).$$

Доказательство повторяет предыдущее (с фиксацией начальной строки гипермассива).

Замечание. Заключительный элемент гипермассива может занимать позицию $(n-1, 1)$, если является буферным нулем.

§ 10. Число матриц класса $\mathfrak{M}_{1,2}$ с заданными числом единиц и индексом

В этом параграфе мы используем конгруэнтное перемещение гипермассивов по модулю n, имея в виду следующие определения. Элемент $m'_{i,j}$ называется *r-перемещением по модулю n* элемента m_{ij} матрицы M, если $m'_{ij}=m_{i\oplus r,\, j\oplus r}$; множество H' называется *перемещением* (*по модулю* n) подмножества элементов H матрицы M, если H' получается r-перемещением всех элементов H при некотором r. При этом направление перемещения определяется знаком числа r.

Перечисление матриц класса $\mathfrak{M}_{1,2}$ с заданными числом единиц и индексом проведем, используя процедуры стыковки и расщепления гипермассивов.

а) **Стыковка гипермассивов.** Пусть матрица $M\in\mathfrak{M}_{1,2}$ содержит m гипермассивов Γ_i, $i=1, 2, \ldots, m$, пронумерованных в порядке их следования и в положительном направлении, начиная с какого-либо из них. Зафиксировав для определенности Γ_1, будем последовательно перемещать $\Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$ $\ldots, \Gamma_m$ в отрицательном направлении до полного слияния всех гипермассивов в один. Эту процедуру преобразования матрицы, действующую из $\mathfrak{M}_{1,2}$ в $\mathfrak{M}_{1,2}$, будем называть *стыковкой* гипермассивов.

Лемма 10.1. *Последовательно фиксируя каждый гипермассив* Γ_i *матрицы* $M\in\mathfrak{M}_{1,2}$, $i=1, 2, \ldots, m$, *и каждый раз проводя процедуру стыковки, всего получим* m *различных гипермассивов* H_j *длины* $\sum_{i=1}^{m}|\Gamma_i|$ *и индекса* $\operatorname{ind} H_j=\sum_{i=1}^{m}\operatorname{ind}\Gamma_i-m+1$, $j=1, 2, \ldots, m$.

Доказательство. Все гипермассивы H_j, $j=1, 2, \ldots, m$, различны, поскольку различны позиции их начальных элементов. При стыковке любых двух гипермассивов их суммарный индекс уменьшается на 1, поскольку цепь, содержащая последнюю единицу фиксированного гипермассива, объединяется с цепью, содержащей первую единицу стыкующегося с ним гипермассива. Следовательно, при стыковке m гипермассивов их суммарный индекс уменьшается на $m-1$.

б) Расщепление гипермассивов. Процедуру, обратную стыковке гипермассивов, назовем их *расщеплением*. Расщепление гипермассивов проводится в противоположном (т. е. положительном) направлении с последовательным фиксированием отщепляемых частей гипермассива, которые становятся самостоятельными гипермассивами. Поскольку гипермассив может завершаться лишь P^1-единицей или буферным нулем, то местами возможного его расщепления (м. в. р.) могут быть лишь места после названных элементов. Если гипермассив длины l содержит k единиц, i из которых — P^2-единицы, то он имеет $l-k$ буферных нулей и $k-i$ P^1-единиц. Отсюда следует, что имеется всего $(l-k)+(k-i)-1=l-i-1$ м. в. р. (место после завершающего гипермассив элемента, разумеется, не является м. в. р.). Для расщепления гипермассива на $m \geqslant 2$ частей из общего числа $l-i-1$ выберем $m-1$ м. в. р. Однако для осуществления такого расщепления необходимо, чтобы число нулевых строк вне гипермассива было не меньше m. Поэтому $m \leqslant \min(l-i, n-l)$.

Обозначим $\mathfrak{M}_{1,2}(1, l, k, i, \varkappa; \langle m\rangle)$ подмножество матриц класса $\mathfrak{M}_{1,2}(1, l, k, i, \varkappa)$, гипермассивы которых допускают расщепление на m частей. Поскольку расщепление является обратной процедурой относительно стыковки, из леммы 10.1 прямо следует

Лемма 10.2. *При всевозможных расщеплениях всех матриц множества $\mathfrak{M}_{1,2}(1, l, k, i, \varkappa-m+1; \langle m\rangle)$ на m частей в совокупности получим, и притом в m экземплярах, все матрицы класса $\mathfrak{M}_{1,2}(m, l, k, i, \varkappa)$.*

Замечание. Из леммы 7.3 вытекает, что индекс некругового гипермассива не меньше 1. Следовательно, если $M \in \mathfrak{M}_{1,2}(1, l, k, i, \varkappa-m+1; \langle m\rangle)$, то $\varkappa-m+1 \geqslant 1$, или $m \leqslant \varkappa$. Вместе со сказанным выше, это означает, что

$$1 \leqslant m \leqslant r = \min(\varkappa, l-i, n-l). \tag{10.1}$$

Случай $m=1$ соответствует сохранению гипермассива нерасщепленным.

Общее число матриц класса $\mathfrak{M}_{1,2}$ с индексом $\varkappa$, имеющих k единиц, i из которых являются P^2-единицами, равно

$$L_i(k, \varkappa) = |\mathfrak{M}_{1,2}(1, n, k, i, \varkappa)| + \left|\bigcup_{l=k}^{n-1} \bigcup_{m=1}^{r} \mathfrak{M}_{1,2}(m, l, k, i, \varkappa)\right|.$$

Заметим, что

$$L(k, \varkappa) = \sum_{i=0}^{k} L_i(k, \varkappa)$$

— индикаторная функция матрицы $I+P+P^2$.

Лемма 10.3. *Если $k \leqslant n-1$, то*

$$L_i(k, \varkappa) = M_n^{(n-k-\varkappa)}(2(n-k), n-i, i) + \\ + \sum_{l=k}^{n-1} \sum_{m=1}^{r} \frac{n}{m} \binom{l-i-1}{m-1} \binom{n-l-1}{m-1} N^{(l-k-\varkappa+m)}(l-k, l-i-1, i).$$

Доказательство. Расщепляя каждый из гипермассивов матриц класса $\mathfrak{M}_{1,2}(1, l, k, i, \varkappa-m+1; \langle m\rangle)$ на m частей, выберем в каждом гипермассиве $m-1$ м. в. р. $\binom{l-i-1}{m-1}$ способами. Каждому такому выбору соответствует $\binom{n-l-1}{m-1}$ композиций $n-l$ нулевых строк матрицы вне гипермассива с m частями. Следовательно, на основании леммы 10.2

$$|\mathfrak{M}_{1,2}(m, l, k, i, \varkappa)| = \\ = \frac{1}{m}\binom{l-i-1}{m-1}\binom{n-l-1}{m-1}|\mathfrak{M}_{1,2}(1, l, k, i, \varkappa-m+1; \langle m\rangle)|. \quad (10.2)$$

При замене $\varkappa$ на $\varkappa-m+1$ из леммы 9.2 вытекает равенство

$$|\mathfrak{M}_{1,2}(1, l, k, i, \varkappa-m+1)| = nN^{(l-k-\varkappa+m)}(l-k, l-i-1, i),$$

из которого следует, что

$$\frac{1}{m}\binom{l-i-1}{m-1}\binom{n-l-1}{m-1}|\mathfrak{M}_{1,2}(1, l, k, i, \varkappa-m+1)| = \\ = \frac{n}{m}\binom{l-i-1}{m-1}\binom{n-l-1}{m-1}N^{(l-k-\varkappa+m)}(l-k, l-i-1, i). \quad (10.3)$$

Здесь, однако, $\mathfrak{M}_{1,2}(1, l, k, i, \varkappa-m+1)$ можно заменить на $\mathfrak{M}_{1,2}(1, l, k, i; \varkappa-m+1, \langle m\rangle)$, так как при невыполнении требования о возможности расщепления гипермассивов матриц класса $\mathfrak{M}_{1,2}(1, l, k, i, \varkappa-m+1)$ на m частей, т. е. неравенства $\min(n-l, l-i)\geqslant m$, обе части равенства (10.3) равны 0. Поэтому из (10.2) и (10.3) вытекает равенство

$$|\mathfrak{M}_{1,2}(m, l, k, i, \varkappa)| = \frac{n}{m}\binom{l-i-1}{m-1}\binom{n-l-1}{m-1}N^{(l-k-\varkappa+m)}(l-k, l-i-1, i),$$

из которого с учетом леммы 9.1 о числе круговых гипермассивов следует формула леммы.

Замечание. При $k=n$ очевидным дополнением к лемме 10.3 является формула, вытекающая из замечания к лемме 9.1,

$$L_i(n, \varkappa) = \delta_{x,0}(\delta_{i,0}+\delta_{i,n}). \quad (10.4)$$

§ 11. Число матриц класса $\mathfrak{M}^*_{1,2}$ с заданным числом единиц и заданным индексом

При применении процедуры стыковки гипермассивов к матрице $M\in\mathfrak{M}^*_{1,2}$, содержащей m гипермассивов, отличие от предыдущего параграфа состоит в том, что здесь фиксируется только первый (а не произвольный) гипермассив Γ_1, и к нему стыкуются в отрицательном направлении остальные. Поэтому вместо лемм 10.1, 10.2, здесь имеют место следующие леммы 11.1, 11.2.

Лемма 11.1. *Процедура стыковки гипермассивов* Γ_i, $i=1, 2, \ldots, m$, *матрицы* $M\in\mathfrak{M}^*_{1,2}$ *приводит к матрице, содержащей один гипермассив* H *длины* $\sum_{i=1}^{m}\Gamma_i$ *и индекса* $\sum_{i=1}^{m}\operatorname{ind}\Gamma_i-m+1$.

Обозначим через $\mathfrak{M}^*_{1,2}(1, l, k, i, \varkappa; s, \langle m\rangle)$ подмножество матриц класса $\mathfrak{M}^*_{1,2}(1, l, k, i, \varkappa; s)$, гипермассивы которых допускают расщепление на m частей.

Лемма 11.2. *При всевозможных расщеплениях гипермассивов всех матриц класса* $\mathfrak{M}^*_{1,2}(1, l, k, i, \varkappa; s, \langle m\rangle)$ *на* m *частей в совокупности получим все матрицы класса* $\mathfrak{M}^*_{1,2}(m, l, k, i, \varkappa; s)$.

Заметим, что для возможности расщепления гипермассива матрицы $M\in\mathfrak{M}^*_{1,2}(1, l, k, i, \varkappa; s)$ на m частей необходимо, чтобы число нулевых строк, следующих после содержащегося в M гипермассива до $(n-1)$-й строки включительно, было не меньше $m-1$. Следовательно, должно выполняться условие $n-1-(s-1+l)\geqslant m-1$ или $m\leqslant n-l-s+1$. Поэтому здесь вместо (10.1) справедлива оценка

$$1\leqslant m\leqslant r_s = \min(\varkappa, l-i, n-l-s+1). \quad (11.1)$$

Полагая

$$L^*_{i,s}(k,\ \varkappa)=\left|\bigcup_{l=k}^{n-1}\bigcup_{m=1}^{r_s}\mathfrak{M}^*_{1,2}(m,\ l,\ k,\ i,\ \varkappa;\ s)\right|,$$

аналогично доказательству леммы 10.3 для $L^*_{i,s}(k,\ \varkappa)$ получим следующую формулу.

Лемма 11.3. $L^*_{i,s}(k,\ \varkappa)=\sum_{l=k}^{n-1}\sum_{m=1}^{r_s}\binom{l-i-1}{m-1}\binom{n-l-s}{m-1}N^{(l-k-\varkappa+m)}(l-k,$ $l-i-1,\ i)$.

Общее число матриц класса $\mathfrak{M}^*_{1,2}$ с индексом $\varkappa$, имеющих k единиц, i из которых являются P^2-единицами, равно

$$L^*_i(k,\ \varkappa)=\sum_{s=1}^{n-l}L^*_{i,s}(k,\ \varkappa).$$

Замечая [14, с. 608], что

$$\sum_{s=1}^{n-l}\binom{n-l-s}{m-1}=\sum_{j=0}^{n-l-1}\binom{j}{m-1}=\binom{n-l}{m},$$

на основании леммы 11.3 заключаем, что

$$L^*_i(k,\ \varkappa)=\sum_{l=k}^{n-1}\sum_{m=1}^{r}\binom{l-i-1}{m-1}\binom{n-l}{m}N^{(l-k-\varkappa+m)}(l-k,\ l-i-1,\ i),\tag{11.2}$$

где

$$r=\max_{1\leqslant s\leqslant n-l}r_s=\min(\varkappa,\ l-i,\ n-l).$$

Ниже через $P^{(2)}$ обозначим матрицу, получаемую из P^2 заменой единиц с позициями $(n-1,\ 1)$, $(n,\ 2)$ нулями.

§ 12. Вычисление $\sigma_{t,n}(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=\sigma_{t,n}(\alpha I+\beta P+\gamma P^2)$, $\sigma^*_{t,n}(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=\sigma^*_{t,n}(\alpha I+\beta P^{(1)}+\gamma P^{(2)})$

Подсчитаем число способов выбора t неколлинеарных позиций ненулевых элементов матрицы $\alpha I+\beta P+\gamma P^2$. На главной диагонали выбор можно осуществить $\binom{n}{t}$ способами. Выберем теперь некоторое множество E неколлинеарных позиций на P^1, P^2-диагоналях с условием $|E|=k\geqslant 1$, $\operatorname{ind}E=\varkappa$, число P^2-позиций равно i.

Каждому выбору E можно поставить во взаимно однозначное соответствие матрицу $M\in\mathfrak{M}_{1,2}$ с индексом $\varkappa$, имеющую k единиц, i из которых являются P^2-единицами. Следовательно, выбор E можно осуществить $L_i(k,\ \varkappa)$ способами. Число позиций главной диагонали, на которых могут быть выбраны остальные $t-k$ позиций согласно лемме 1.1 равно $n-|\operatorname{pr}E|=n-k-\varkappa$. Следовательно, общее число способов выбора t неколлинеарных позиций при фиксированных $k(\geqslant 1)$ и $\varkappa$ равно $\binom{n-k-\varkappa}{t-k}L_i(k,\ \varkappa)$. При этом «вес» выбранного множества позиций, являющийся вкладом в величину $\sigma_{t,n}(\alpha,\beta,\gamma)$, равен $\binom{n-k-\varkappa}{t-k}L_i(k,\ \varkappa)\alpha^{t-k}\beta^{k-i}\gamma^i$. Следовательно,

$$\sigma_{t,n}(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=\binom{n}{t}\alpha^t+\sum_{k=1}^{t}\sum_{i=0}^{k}\sum_{\varkappa=0}^{[n/2]}L_i(k,\ \varkappa)\binom{n-k-\varkappa}{t-k}\alpha^{t-k}\beta^{k-i}\gamma^i\quad(1\leqslant t\leqslant n),\tag{12.1}$$

где $L_i(k, \varkappa)$ определяется формулой леммы 10.3 и формулой (10.4). Для функции $\sigma^*_{t,n}(\alpha, \beta, \gamma)$ аналогично устанавливается формула

$$\sigma^*_{t,n}(\alpha, \beta, \gamma) = \binom{n}{t}\alpha^t + \sum_{k=1}^{t}\sum_{i=0}^{k}\sum_{\varkappa=0}^{[n/2]} L^*_i(k, \varkappa)\binom{n-k-\varkappa}{t-k}\alpha^{t-k}\beta^{k-i}\gamma^i \quad (1 \leqslant t \leqslant n), \tag{12.2}$$

где $L^*_i(k, \varkappa)$ определяется формулой (11.2).

В случае $t=n$ вместо (12.1) имеет место более простая формула [17]

$$\sigma_{n,n}(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n + \sum_{j=1}^{[n/2]} \frac{n}{j}\binom{n-j-1}{j-1}\alpha^j\beta^{n-2j}\gamma^j. \tag{12.3}$$

Кроме того, очевидно, что $\sigma^*_{n,n}(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha^n$.

В случае $\alpha=\beta=\gamma=x$ формулы (12.1) и (12.2) дают решение классической задачи о ладьях [19, с. 196] для матриц $I+P+P^2$, $I+P^{(1)}+P^{(2)}$.

§ 13. Вычисление $\sigma_{t,n}(\alpha\Pi^{-1}+\beta I+\gamma\Pi)$ для подстановочной матрицы Π

Пусть Π — подстановочная матрица подстановки π, все циклы которой содержат не менее 3 элементов. Покажем, что если

$$\pi = \prod_{i=1}^{k} \pi^{(l_i)}$$

— представление π в виде произведения циклов, то матрица $\Pi^{-1}+I+\Pi$ перестановочно эквивалентна прямой сумме матриц $\bigoplus_{i=1}^{k}\left(P_{l_i}^{-1}+I+P_{l_i}\right)$, т. е. матрице, в которой $P_{l_i}^{-1}+I+P_{l_i}$ — клетки размера $l_i \times l_i$, расположенные вдоль главной диагонали, а остальные элементы — нули.

Действительно, если

$$\pi = (a_1, a_2, \ldots, a_{l_1})(b_1, b_2, \ldots, b_{l_2}) \ldots (c_1, c_2, \ldots, c_{l_k}),$$

то

$$\pi^{-1} = (a_{l_1}, a_{l_1-1}, \ldots, a_1)(b_{l_2}, b_{l_2-1}, \ldots, b_1) \ldots (c_{l_k}, c_{l_k-1}, \ldots, c_1).$$

По аналогии с [13, с. 325] рассмотрим подстановку

$$\tilde{\pi} = \begin{pmatrix} a_1\, a_2 \ldots a_{l_1} & b_1 & b_2 & \ldots & b_{l_2} & \ldots & c_1 & \ldots c_{l_k} \\ 1\ 2 \ \ldots \ l_1 & l_1+2 & l_1+2 & \ldots & l_1+l_2 & \ldots & n-l_k+1 & \ldots\ n \end{pmatrix},$$

подстановочную матрицу которой обозначим через $\tilde{\Pi}$. Непосредственно проверяется, что

$$\tilde{\pi}^{-1}\pi\tilde{\pi} = (1, 2, \ldots, l_1)(l_1+1, \ldots, l_1+l_2) \ldots (n-l_k+1, \ldots, n),$$
$$\tilde{\pi}^{-1}\pi^{-1}\tilde{\pi} = (1, l_1, l_1-1, \ldots, 2)(l_1+1, l_1+l_2, l_1+l_2-1, \ldots, l_1+2) \ldots$$
$$\ldots (n-l_k+1, n, \ldots, n-l_k+2).$$

Это означает, что

$$\tilde{\Pi}^{-1}\Pi\tilde{\Pi} = \bigoplus_{i=1}^{k} P_{l_i}; \qquad \tilde{\Pi}^{-1}\Pi^{-1}\tilde{\Pi} = \bigoplus_{i=1}^{k} P_{l_i}^{-1}. \tag{13.1}$$

Следовательно,

$$\tilde{\Pi}^{-1}(\Pi^{-1}+I+\Pi)\tilde{\Pi} = \bigoplus_{i=1}^{k}\left(P_{l_i}^{-1}+I+P_{l_i}\right),$$

что и доказывает упомянутую эквивалентность.

Используя (13.1), находим, что

$$\sigma_{t,n}(\alpha\Pi^{-1}+\beta I+\gamma\Pi)=\sigma_{t,n}(\tilde{\Pi}^{-1}(\alpha\Pi^{-1}+\beta I+\gamma\Pi)\tilde{\Pi})=$$

$$=\sigma_{t,n}\left(\bigoplus_{i=1}^{k}\left(\alpha P_{l_i}^{-1}+\beta I_{l_i}+\gamma P_{l_i}\right)\right)=\sum\prod_{i=1}^{k}\sigma_{t_i,l_i}(\alpha,\ \beta,\ \gamma),$$

где суммирование проводится по всем t_i, $0\leqslant t_i\leqslant l_i$, $i=1, \ldots, k$, $t_1+t_2+\ldots$ $\ldots+t_k=t$, а функция $\sigma_{t_i,l_i}(\alpha, \beta, \gamma)$ определяется формулой (12.1), причем при $t=0$ по определению $\sigma_{0,l}=1$. В частности, в случае $t=n$ сумма содержит единственное слагаемое, соответствующее равенствам $t_i=l_i$, $i=1, 2, \ldots, k$. Следовательно,

$$\sigma_{n,n}(\alpha\Pi^{-1}+\beta I+\gamma\Pi)=\operatorname{per}(\alpha\Pi^{-1}+\beta I+\gamma\Pi)=\prod_{i=1}^{k}\sigma_{l_i,l_i}(\alpha,\ \beta,\ \gamma),$$

и для вычисления $\sigma_{l_i,l_i}(\alpha, \beta, \gamma)$ можно использовать формулу (12.3).

§ 14. Формула для чисел обобщенной линейной задачи о гостях порядка 3

Обозначим $v_n^{(s)}$ число перестановок σ чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$ таких, что $\sigma(i)\neq i,\ i+1, \ldots, \min(i+k-1,\ n)\,(\operatorname{mod} n)$. Числа $v_n^{(s)}$ обобщают числа, решающие задачу о встречах ($s=1$) и «линейную» задачу о гостях ($s=2$), расположившихся вдоль одной из сторон прямоугольного стола [19, с. 71—74; 231—238], [5, с. 73—75; 148—149].

Задача вычисления чисел $v_n^{(s)}$ при $s\geqslant 3$ весьма трудна. Даже для чисел $v_n^{(3)}$ до последнего времени не было найдено ни явной, ни рекуррентной формул. Недавно Кэнфилд и Уормэлд [10] путем тонких построений доказали существование для чисел $v_n^{(3)}$ рекуррентной формулы порядка 67.

Используя формулы (11.2), (12.2), мы имеем возможность выписать явную формулу для чисел $v_n^{(3)}$. С этой целью заметим, что из определения чисел $v_n^{(3)}$ следует, что

$$v_n^{(3)}=\operatorname{per}(J-I-P^{(1)}-P^{(2)}), \tag{14.1}$$

где J — $(n\times n)$-матрица, составленная из единиц.

В силу сказанного во введении, ладейный многочлен матрицы $I+P^{(1)}+P^{(2)}$ имеет вид

$$R_n^*(x)=1+\sum_{t=1}^{n}\sigma_{t,n}^*(x,\ x,\ x)=1+\sum_{t=1}^{n}\sigma_{t,n}^*(1,\ 1,\ 1)\,x^t.$$

Переходя обычным образом [19, с. 197] к многочлену попаданий $N_n^*(y)$ этой доски, получим формулу

$$N_n^*(y)=n!+\sum_{t=1}^{n}\sigma_{t,n}^*(1,\ 1,\ 1)\,(n-t)!\,(y-1)^t.$$

Полагая здесь $y=0$ и замечая, что $N^*(0)=\operatorname{per}(J-I-P^{(1)}-P^{(2)})$, с помощью (14.1) находим, что

$$v_n^{(3)}=n!+\sum_{t=1}^{n}(-1)^t\sigma_{t,n}^*(1,\ 1,\ 1)\,(n-t)! \tag{14.2}$$

Наконец, используя формулу (12.2) при $\alpha=\beta=\gamma=1$, после некоторых преобразований получим, что

$$v_n^{(3)}=D_n+\sum_{\varkappa=1}^{[n/2]}\sum_{t=1}^{n}(-1)^t(n-t)!\sum_{k=1}^{t}\binom{n-k-\varkappa}{t-k}L_{(n)}^*(k,\ \varkappa), \tag{14.3}$$

где

$$D_n=\sum_{t=0}^{n}(-1)^t (n-t)!\binom{n}{t}, \quad L^*_{(n)}(k, \varkappa)\equiv L^*(k, \varkappa)=\sum_{i=0}^{k} L^*_i(k, \varkappa)$$

-- индикаторная функция матрицы $I+P^{(1)}+P^{(2)}$, вычисленная с помощью формул (11.2), (8.3) и (8.1).

Изменяя еще порядок внутреннего суммирования (по переменным t, k), запишем (14.3) в виде

$$v_n^{(3)}=D_n+\sum_{\varkappa=1}^{[n/2]}\sum_{k=1}^{n}\sum_{t=k}^{n}(-1)^t\binom{n-k-\varkappa}{t-k}(n-t)!\,L^*_{(n)}(k, \varkappa)$$

или после несложных преобразований — в виде

$$v_n^{(3)}=D_n+\sum_{\varkappa=1}^{[n/2]}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k D^{(\varkappa)}_{n-k} L^*_{(n)}(k, \varkappa), \tag{14.4}$$

где

$$D_n^{(r)}=\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^j\binom{n-k}{j}(n-j)!, \qquad k=0, \ldots, n,$$

$$L^*_{(n)}(k, \varkappa)=\sum_{i=0}^{k}\sum_{l=k}^{n-1}\sum_{m=1}^{r}\binom{l-i-1}{m-1}\binom{n-l}{m}\binom{l-i}{l-k}\binom{l-k}{\varkappa-m}\binom{i-l+k-1}{\varkappa-m-1}, \tag{14.5}$$

$$r=\min(\varkappa, l-i, n-l).$$

Формула (14.4) несколько более удобна для вычислений, чем (14.3), поскольку для чисел $D_n^{(k)}$ имеет место указанное в [9] рекуррентное соотношение

$$D_n^{(n)}=n!, \quad D_n^{(k-1)}=D_n^{(k)}-D_{n-1}^{(k-1)}, \qquad k=n, n-1, \ldots, 1,$$

из которого следует, что значения $D_n^{(k)}$ легко выписываются путем построения треугольной таблицы с диагональю из факториалов (табл. 1).

Таблица 1. **Числа $D_n^{(k)}$**

n	k							
	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	1	1	2					
3	2	3	4	6				
4	9	11	14	18	24			
5	44	53	64	78	96	120		
6	265	309	362	426	504	600	720	
7	1854	2119	2428	2790	3216	3720	4320	5040

Таблица 2. **Значения $L^*_{(7)}(k, \varkappa)$**

k	$\varkappa$			$\binom{12-k}{k}$
	1	2	3	
1	11	0	0	11
2	16	29	0	45
3	20	49	15	84
4	17	41	12	70
5	7	14	0	21
6	1	0	0	1

В качестве примера вычислим по формуле (14.4) $v_7^{(3)}$. С помощью (14.5) составим таблицу значений $L^*_{(7)}(k, \varkappa)$ (табл. 2). Для контроля вычислений (правый столбец) использовано тождество

$$\sum_{\varkappa=1}^{[n/2]} L^*_{(n)}(k, \varkappa)=\sigma_{k,\,n-1}(I+P^{(1)})=\binom{2(n-1)-k}{k},$$

вытекающее из определения индикаторной функции матрицы. Используя табл. 1 и 2, по формуле (14.4) находим

$$v_7^{(3)} = D_7 - \sum_{\varkappa=1}^{3} D_6^{(\varkappa)} L_{(7)}^*(1, \varkappa) + \sum_{\varkappa=1}^{3} D_5^{(\varkappa)} L_{(7)}^*(2, \varkappa) -$$
$$- \sum_{\varkappa=1}^{3} D_4^{(\varkappa)} L_{(7)}^*(3, \varkappa) + \sum_{\varkappa=1}^{3} D_3^{(\varkappa)} L_{(7)}^*(4, \varkappa) - \sum_{\varkappa=1}^{3} D_2^{(\varkappa)} L_{(7)}^*(5, \varkappa) + \sum_{\varkappa=1}^{3} D_1^{(\varkappa)} L_{(7)}^*(6, \varkappa) =$$
$$= 1854 - 309 \cdot 11 + 53 \cdot 16 + 64 \cdot 29 - 11 \cdot 20 - 14 \cdot 49 - 18 \cdot 15 + 3 \cdot 17 + 4 \cdot 41 +$$
$$+ 6 \cdot 12 - 7 \cdot 1 - 2 \cdot 14 + 1 \cdot 1 = 236,$$

что совпадает со значением $v_7^{(3)}$, полученным в [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tverberg H. On the permanent of a bistochastic matrix // Math. Scand.— 1963.— № 12.— P. 25—35.
2. Минк Х. Перманенты.— М.: Мир, 1982.
3. Mink H. Theory of permanents 1978—1981 // Linear and Multilinear Algebra.— 1983.— № 12.— P. 227—263.
4. Friedland S. A proof of a generalized Van Der Warden conjecture on permanents // Linear and Multilinear Algebra.— 1982.— № 11.— P. 107—120.
5. Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику.— М.: Наука, 1975.— 480 с.
6. Шевелев В. С. Об индексе размещения/Деп. в ВИНИТИ № 6976— В 86 от 2.10.86.
7. Mink H. On permanents of circulants // Pasific J. Math.— 1972.— № 42.— P. 477—484.
8. Moser W. The number of very reduced 4×n Latin rectangles // Canad. J. Math.— 1967.— № 19.— P. 1011—1017.
9. Шевелев В. С. Новое решение задачи о гостях и вычисление per $(J_n - I - P - P^2)$/ Деп. в ВИНИТИ № 1359—В 86 от 28.02.86.
10. Canfield E., Wormald C. Menage numbers, bijections and p-recursiveness // Discrete Math.— 1987.— № 63.— P. 117—129.
11. Шевелев В. С. Суммы подперманентов некоторых матриц/Деп. в ВИНИТИ № 895—В 88 от 2.02.88.
12. Шевелев В. С. Формула для ладейного многочлена доски, содержащей главную диагональ/Деп. в ВИНИТИ № 2425—В 87 от 3.04.87.
13. Сачков В. Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики.— М.: Наука, 1982.— 384 с.
14. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. Н. Интегралы и ряды.— М.: Наука, 1981.— 798 с.
15. Риордан Д. Комбинаторные тождества.— М.: Наука, 1982.— 255 с.
16. Шевелев В. С. Интегральные представления, оценки и рекуррентные формулы для перманентов теплицевых матриц и циркулянтов/Деп. в ВИНИТИ № 4876 — В 87 от 9.07.87.
17. Шевелев В. С. Композиционный метод вычисления перманентов циркулянтов/Деп. в ВИНИТИ № 4877—В 87 от 9.07.87.
18. Эндрюс Г. Теория разбиений.— М.: Наука, 1982.— 255 с.
19. Риордан Д. Введение в комбинаторный анализ.—М.: ИЛ, 1963.— 287 с.
20. Егорычев Г. П. Доказательство гипотезы Ван дер Вардена для перманентов // Сиб. мат. журн.— 1981.— Вып. 22.— С. 65—71.
21. Фаликман Д. И. Доказательство гипотезы Ван дер Вардена о перманенте дважды стохастической матрицы // Мат. заметки.— 1981.— Т. 29, № 6.— С. 931—938.

Статья поступила 19.10.89