М.И.Белишев, А.П.Качалов

ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И КВАЗИФОТОНЫ В ЗАДАЧЕ РЕКОНСТРУКЦИИ РИМАНОВА МНОГООБРАЗИЯ ПО ДИНАМИЧЕСКИМ ДАННЫМ

Представление о характере рассматриваемой задачи можно составить по следующему наглядному описанию. Рассмотрим упругую круговую мембрану, из которой удален круг меньшего радиуса. Вместо круга к ней "подшито" двумерное многообразие с нетривиальной топологией, составляющее вместе с оставшимся кольцом единую механическую систему - "мембрану со вздутием" (см.рис.Iа и Iб).

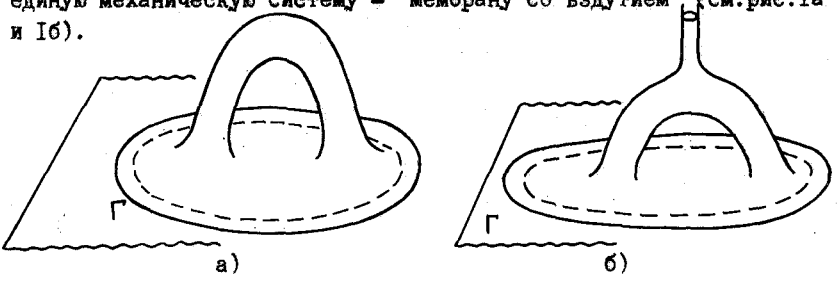

Рис.I.

Распространение колебаний в системе описывается волновым уравнением. Колебания инициируются граничными источниками, отклоняющими Г от положения равновесия. Там же, на Г, регистрируется отклик системы - возникающие усилия. По этим данным требуется восстановить форму вздутия (топологию, метрику). Мы предлагаем процедуру, позволяющую это сделать.

Настоящая статья продолжает серию публикаций, разрабатывающих связи между гиперболическими краевыми обратными задачами (о.з.) и теорией граничного управления [I-8]. Она является второй после [8] работой, посвященной восстановлению римановых многообразий. Как и в [8], центральный фрагмент разрешающей процедуры (визуализация волн с помощью амплитудных формул) воспроизводит последнюю версию подхода, предложенную в [6]. Результаты работы анонсированы в [22].

Мы признательны проф.А.Г.Рамму, познакомившему нас со статьей [9]. Приносим благодарность Ю.Д.Бураго и Г.Я.Перельману за полезные консультации по геометрии.

© М. И. Белишев, А. П. Качалов, 1992

§ I. Постановка задачи. Управляемые многообразия.

I.I. Начально-краевая задача. Пусть Ω - гладкое (класса C^∞) n-мерное риманово многообразие с компактным краем Γ, Δ - оператор Бельтрами-Лапласа на Ω, имеющий в локальных координатах вид

$$\Delta := g^{-1/2}(x)\partial_{x^i} g^{1/2}(x) g^{ij}(x)\partial_{x^j}, \tag{I.I}$$

где $x=\{x^1,\dots,x^n\}\in \mathrm{Int}\,\Omega := \Omega\setminus\Gamma$, $\{g^{ij}\}_{i,j=1}^n$ - матрица, обратная к матрице метрического тензора $\{g_{ij}\}_{i,j=1}^n$; $g(x) := \det\{g_{ij}\}_{i,j=1}^n$.

Рассмотрим задачу I

$$\begin{cases} Lu := \partial_t^2 u - \Delta u = 0 \quad \text{в } Q^T & (I.2)\\ u|_{t=0} = \partial_t u|_{t=0} = 0 & (I.3)\\ u|_{\Sigma^T} = f, & (I.4)\end{cases}$$

в которой $Q^T := \Omega\times(0,T)$; $\Sigma^T := \Gamma\times(0,T)$; $\nu=\nu(\gamma)$ $(\gamma\in\Gamma)$ - внутренняя нормаль к Γ; $f=f(\gamma,t)$ - граничный источник, $f\in F^T := L_2(\Sigma^T; d\Gamma dt)$, где $d\Gamma$ - канонический $n-1$-мерный риманов объем на Γ; $u=u^f(x,t)$ - решение ("волна"). Приведем основанное на результатах [I0] описание некоторых свойств решения:

а) $u^f\in C([0,T];\mathcal{H})$, где $\mathcal{H} := L_2(\Omega; d\Omega)$ ($d\Omega$ - объем: $d\Omega_x = g^{1/2}(x)dx = g^{1/2}(x)dx^1\dots dx^n$)

б) для $\forall f\in C_0^\infty(\Sigma^T)\subset F^T$ решение $u^f\in C^\infty(\overline{Q}^T)$, так что определен след производной по нормали $\partial_\nu u^f|_{\Sigma^T}$.

С задачей I свяжем оператор реакции $R^T: F^T \longrightarrow F^T$, $\mathrm{Dom}\,R^T = C_0^\infty(\Sigma^T)$,

$$R^T f := \partial_\nu u^f|_{\Sigma^T}, \tag{I.5}$$

описывающий наблюдаемый на Γ отклик динамической системы (I.2)-(I.4) на воздействие, производимое граничными источниками. Он линеен, но неограничен; ниже этот оператор играет роль данных о.з. Ее точной постановке предпошлем рассмотрения геометрического характера.

I.2. Эйконал. Заполненные области. Функцию

$$\tau(x) := dist_{\Omega}(x,\Gamma) := \inf_{\gamma\in\Gamma} dist_{\Omega}(x,\gamma) \qquad (I.6)$$

назовем эйконалом. По известному принципу причинности (конечности области влияния) для гиперболического уравнения (I.2) имеем

$$\operatorname{supp} u^f(\cdot,\xi) \subset \overline{\Omega}^{\xi}; \qquad (I.7)$$

(черта - замыкание в Ω), где

$$\Omega^{\xi} := \{x\in\Omega : \tau(x) < \xi\} \ (0<\xi\leq T) \qquad (I.8)$$

есть подобласть Ω , заполняемая волнами u^f к моменту $t=\xi$ (рис.2):

$$\overline{\bigcup_{f\in F^T} \operatorname{supp} u^f(\cdot,\xi)} = \overline{\Omega}^{\xi} \qquad (I.9)$$

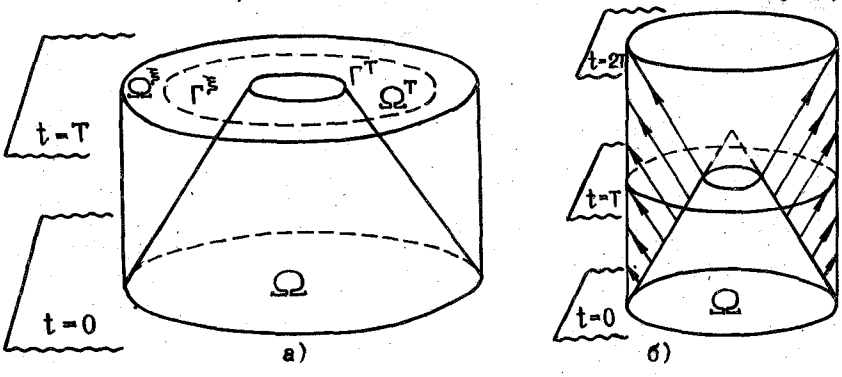

Рис.2.

Поверхности уровня эйконала

$$\Gamma^{\xi} := \{x\in\Omega : \tau(x)=\xi\} \ (0\leq\xi\leq T); \ \Gamma^{0}=\Gamma \qquad (I.10)$$

суть эквидистанты края. При этом $\partial\Omega^{\xi} = \Gamma\cup\Gamma^{\xi}$.

Здесь же введем числовую характеристику многообразия Ω - "время заполнения":

$$T_* := \inf\{T>0 : \Omega^T = \Omega\}. \qquad (I.11)$$

Если $\Omega\setminus\overline{\Omega}^T \neq \emptyset$ при $\forall T>0$, то полагаем $T_*=\infty$ (рисунки Iа и Iб иллюстрируют случаи $T_*<\infty$ и $T_*=\infty$).

ЗАМЕЧАНИЕ I. В силу того же принципа причинности след

$$\partial_\nu u^f\big|_{\Sigma^{2T}} = R^{2T} f$$

вполне определяется метрическими свойствами подобласти Ω^T.

С физической точки зрения сказанное означает, что в интервале времени $0 < t < 2T$ на Γ регистрируются лишь волны (указаны на рис.2а стрелками), отраженные от неоднородностей, локализованных в "приграничном слое" Ω^T. Волны, рассеянные на неоднородностях в $\Omega \setminus \Omega^T$, к моменту $t = 2T$ вернуться к краю не успевают и не вносят вклада в отклик $R^{2T} f$, наблюдаемый на Γ. Естественно предположить, что верно и обратное: отклик при временах $0 < t < 2T$ определяет свойства подобласти Ω^T.

I.3. Обратная задача. Основной результат. Замечание I и последующие пояснения п.I.2 мотивируют следующую постановку о.з., восходящую к принципу локальности А.С.Благовещенского ([II], см. также [4, 6]). Заданы:

I) $(n-1)$ -мерное риманово многообразие Γ (с внутренней метрикой, индуцированной метрикой Ω), являющееся краем неизвестного многообразия Ω;

2) оператор реакции R^{2T}.

По ним требуется построить изометрическую копию подобласти $\Omega^T \subset \Omega$ (коротко - реконструировать Ω^T).

Основной результат работы - процедура реконструкции для класса т.н. управляемых многообразий, описание которого дается в следующем п.I.4. Оговоримся, что дополнительно мы будем предполагать известными значения некоторого числа производных $\partial_\nu^{(p)} g^{k\ell}\big|_\Gamma$. Это требование носит технический характер и призвано упростить рассмотрения.

I.4. Управляемость. Класс $\mathcal{N}$. Опишем класс многообразий, охватываемый нашим подходом.

С областью Ω^T (см.(I.8)), заполняемой волнами к финальному моменту, свяжем подпространство

$$\mathcal{H}^T := \{ y \in \mathcal{H} : \operatorname{supp} y \subset \Omega^T \} \subset \mathcal{H} \qquad (I.I2)$$

и сопоставим задаче I оператор управления $W^T : F^T \to F^T$

$$W^T f := u^f(\cdot, T) \qquad (I.I3)$$

линейный и ограниченный по свойству а) п.I.I.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Многообразие Ω назовем управляемым (с края Γ), если

$$cl_{\mathcal{H}^T} W^T F^T = \mathcal{H}^T \ \forall T > 0. \tag{I.I4}$$

Класс управляемых многообразий обозначим через $\mathcal{N}$.

Терминология заимствована из теории граничного управления [I2] и связана с задачей о нахождении по заданному $y \in \mathcal{H}^T$ источника $f \in F^T$ такого, что

$$u^f(\cdot, T) = y. \tag{I.I5}$$

В силу (I.I4) для $\Omega \in \mathcal{N}$ эта задача разрешима для плотного в $\mathcal{H}^T$ множества правых частей.

Управляемость эквивалентна фундаментальной теореме единственности Хольмгрена-Йона для задачи Коши для уравнения (I.2) с данными на Σ^{2T} - см. [I2]. Класс $\mathcal{N}$ заведомо содержит все аналитические Ω . Вопрос об управляемости произвольного $\Omega \in C^k$ $(k \leqslant \infty)$ остается открытым. Результат „ $C^2 \subset \mathcal{N}$ " анонсирован в [I2], но доказательство не опубликовано.

В гипотетическом неуправляемом случае в Ω возможны начальные возмущения, инициирующие волны, при распространении которых нарушается правило Гюйгенса построения фронта по огибающей [2I; с.562, 625] (см.также [4]). В этом смысле для рассматриваемого класса задач ситуацию $\Omega \notin \mathcal{N}$ (если она вообще возможна!) можно считать нефизичной.

В следующем § 2 подготавливается главный фрагмент процедуры реконструкции - восстановление изображений волн по данным о.з. Описание конспективно, подробности - в [6, 8].

§ 2. Амплитудные формулы.

2.I. Полугеодезические координаты. Выкройка. Продолжим рассмотрения геометрического характера. Определим, следуя [I3, I4], множество раздела (cut locus) края Γ в Ω . Отнесем точку $x \in \operatorname{Int} \Omega$ к множеству ω , если выполнено хотя бы одно из условий:

I) точка x соединяется с Γ более чем одной кратчайшей (до Γ);

2) точка x является первой (от края Γ) фокальной точкой на кратчайшей, соединяющей x с Γ .

ЛЕММА I. $Cut\ locus\ \omega$ есть замкнутое множество нулевой меры:

$$mes_{\Omega}\,\omega = 0 \tag{2.I}$$

(см.[8]). Для каждой точки $x \in \Omega \setminus \omega$ существует единственная точка $\gamma(x) \in \Gamma$, ближайшая к x : $\tau(x) = dist_{\Omega}(x, \gamma(x))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пару (γ, τ) с компонентами $\gamma = \gamma(x), \tau = \tau(x)$ назовем полугеодезическими координатами (п.-г.к.) точки $x \in \Omega / \omega$.

Пусть $x \in \Omega \setminus \omega$; выберем в окрестности точки $\gamma(x) \in \Gamma$ локальные координаты $\{\gamma^1, \ldots, \gamma^{n-1}\}$. Совокупность $\{\gamma^1, \ldots, \gamma^{n-1}, \tau\}$ образует систему координат в некоторой окрестности $V_x \subset \Omega$. Элемент длины в ней имеет известный вид:

$$ds^2 = d\tau^2 + g_{\alpha\beta}(\gamma, \tau)\, d\gamma^{\alpha} d\gamma^{\beta} \tag{2.2}$$

$(\alpha, \beta = 1, \ldots, n-1)$; элемент объема есть

$$d\Omega_{(\gamma,\tau)} = g^{1/2}(\gamma,\tau)\, d\gamma^1 \ldots d\gamma^{n-1} d\tau = \beta(\gamma,\tau)\, d\Gamma_{\gamma} d\tau, \tag{2.3}$$

где $g(\gamma,\tau) := \det\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1}^{n-1}$, а множитель

$$\beta(\gamma,\tau) := \left(\frac{g(\gamma,\tau)}{g(\gamma,0)}\right)^{1/2} \tag{2.4}$$

положителен.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При подходе (из $\Omega \setminus \omega$) к фокальным точкам, расположенным на $cut\ locus$, множитель β стремится к нулю.

С п.-г.к. свяжем отображение $i : \Omega \setminus \omega \longrightarrow \Gamma \times \overline{\mathbb{R}}_+$ ($\overline{\mathbb{R}}_+$ - полуось $\tau \geqslant 0$),

$$i(x) = (\gamma(x), \tau(x)).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Область значений

$$\Theta := i(\Omega \setminus \omega) \subset \Gamma \times \overline{\mathbb{R}}_+$$

назовем выкройкой многообразия Ω.

На рис.3 приведен эскиз выкройки для плоского эллипса. Отображение i есть диффеоморфизм $\Omega \setminus \omega$ на выкройку Θ. Ее "верхний" край θ совпадает с графиком (непрерывной) функции

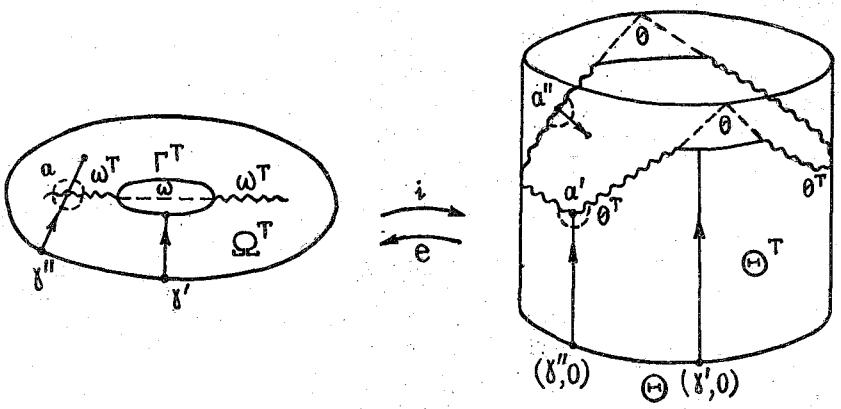

Рис.3.

$$\tau_*:\Gamma\to\mathbb{R}_+,\ \tau_*(\gamma):=\mathrm{dist}_\Omega(\gamma,\omega):$$

$$\theta=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(\gamma,\tau_*(\gamma)),$$

причем

$$\mathrm{mes}_{d\Gamma d\tau}\theta=0\,. \tag{2.5}$$

Подмножество

$$\Theta^T:=i(\Omega^T\setminus\omega)$$

есть выкройка заполненной области Ω^T. Отметим, забегая вперед, что именно выкройка Θ^T послужит материалом для построения изометрической копии подобласти Ω^T. Она будет восстановлена в ходе решения о.з., затем снабжена метрическим тензором и правилом склейки по части (верхнего) края, указанной на рис.3 волнистой линией.

Пусть $e=\exp_\Gamma$ есть каноническое отображение из $\Gamma\times\overline{\mathbb{R}}_+$ в Ω [I4]. Напомним, что e сопоставляет точке $(\gamma,s)\in\Gamma\times\overline{\mathbb{R}}_+$ точку $x\in\Omega$, лежащую на геодезической, выходящей из $\gamma\in\Gamma$ по нормали на расстоянии $s=\mathrm{dist}_\Omega(x,\gamma)$. Это отображение определено в некоторой окрестности выкройки Θ, причем

$$e\big|_\Theta=i^{-1};\ e(\theta^T)=\omega^T, \tag{2.6}$$

где $\theta^T:=\theta\cap\Theta^T$, $\omega^T:=\omega\cap\Omega^T$ (на рис.3 изображены волнистыми

линиями).

С отображением i свяжем преобразование I^T, переводящее функции на области Ω^T в функции на ее выкройке. Предварительно условимся через $x(\gamma,\tau)$ обозначать точку в $\Omega^T\setminus\omega$, имеющую заданные п.-г.к. (γ,τ). Пусть $y=y(x)\in\mathcal{H}^T$; примем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Функцию на $\Gamma\times[0,T)$ вида

$$\tilde{y}(\gamma,\tau)=(I^T y)(\gamma,\tau):=$$
$$=\begin{cases}\beta^{1/2}(\gamma,\tau)y(x(\gamma,\tau)) & (\gamma,\tau)\in\Theta^T\\ 0 & (\gamma,\tau)\notin\Theta^T\end{cases}$$

назовем изображением функции y.

Используя (2.1), (2.3) и определение 4, можно показать, что I^T есть изометрия $\mathcal{H}^T$ на подпространство $\tilde{\mathcal{H}}^T:=\{\tilde{a}:\operatorname{supp}\tilde{a}\subset\Theta^T\}$ пространства $L_2(\Gamma\times[0,T);d\Gamma d\tau)$:

$$(a,b)_{\mathcal{H}^T}=(\tilde{a},\tilde{b})_{\tilde{\mathcal{H}}^T}. \tag{2.7}$$

Проверка сводится к переходу к переменным γ,τ в интеграле, определяющем скалярное произведение в левой части (2.7).

2.2. Оператор C^T. Соотношения

$$(u^f(\cdot,T),u^g(\cdot,T))_{\mathcal{H}^T}\overset{(1.13)}{=}(W^Tf,W^Tg)_{\mathcal{H}^T}=(C^Tf,g)_{F^T} \tag{2.8}$$

определяют введенный в [2] оператор $C^T:F^T\to F^T$

$$C^T:=(W^T)^*W^T,$$

непрерывный по свойству а) п.1.1. Замечательный факт, объясняющий его центральную роль во всех вариантах нашего подхода к обратным задачам, состоит в том, что C^T явно и просто выражается через данные о.з. Для формулировки результата введем оператор $S^T:F^T\longrightarrow F^{2F}$, продолжающий источники по времени с $[0,T]$ на $[0,2T]$ нечетным относительно $t=T$ образом и оператор интегрирования по времени $\mathcal{J}^{2T}=\int_0^t:F^{2T}\longrightarrow F^{2T}$.

ТЕОРЕМА 1. Справедливо представление

$$C^T=-\tfrac{1}{2}[S^T]^*\mathcal{J}^{2T}R^{2T}S^T \tag{2.9}$$

(см. [6, 7]), в котором правая часть определяется на $C_0^\infty(\Sigma^T)$, а затем, расширяется по непрерывности на все F^T.

Отметим важное свойство [4]:

ЛЕММА 2. $\ker C^T = \{0\}$ при $T < T_*$. (2.10)

2.3. Внутреннее и внешнее пространства. Используемая терминология заимствована из теории систем.

Пространство F^T источников, воздействующих на (динамическую) систему (1.2)-(1.4), мы называем внешним. В нем выделим семейство подпространств $\{F^T_{T-\xi}\}$, отвечающих "запаздывающим" источникам:

$$F^T_{T-\xi} := \{f \in F^T : f|_{t\in(0,T-\xi)} = 0\} \quad (0<\xi<T);$$
$$F^T_0 := \{0\}; \; F^T_T := F^T. \tag{2.11}$$

Пространство $\mathcal{H}^T$, содержащее волны u^f, назовем внутренним. В нем отметим семейство подпространств, связанных с областями Ω^ξ (см.(1.8)):

$$\mathcal{H}^\xi := \{y \in \mathcal{H} : \operatorname{supp} y \subset \overline{\Omega}^\xi\} \quad (0<\xi\leqslant T);$$
$$\mathcal{H}^0 := \{0\}. \tag{2.12}$$

Коэффициенты волнового уравнения (1.2) не зависят от времени, чем обуславливается известное свойство

$$W^T \mathcal{T}^T_{T-\xi} f = u^f(\cdot,\xi) \overset{(1.7)}{\in} \mathcal{H}^\xi, \tag{2.13}$$

где $\mathcal{T}^T_{T-\xi} : F^T \to F^T$ - оператор запаздывания:

$$(\mathcal{T}^T_{T-\xi} f)(\gamma,t) := \begin{cases} 0 & 0<t<T-\xi \\ f(\gamma,t-T+\xi) & T-\xi\leqslant t<T; \end{cases} \tag{2.14}$$

$$\mathcal{T}^T_0 := E^T; \; \mathcal{T}^T_T := \mathbb{O}^T.$$

Подпространства внутреннего пространства

$$\mathcal{U}^\xi := cl_{\mathcal{H}^T} W^T F^T_{T-\xi}, \quad (0\leqslant\xi\leqslant T) \tag{2.15}$$

назовем волновыми. Согласно (2.13), имеем включение

$$\mathcal{U}^\xi \subset \mathcal{H}^\xi, \tag{2.16}$$

а в случае $\Omega \in \mathcal{N}$ – равенство

$$\mathcal{U}^{\xi} = \mathcal{H}^{\xi} \quad (0 \leq \xi \leq T). \tag{2.17}$$

Пусть $T < T_*$. Воспользовавшись свойством (2.10), введем на F^T новое скалярное произведение

$$(f, g)_{\Phi^T} := (C^T f, g)_{F^T} \tag{2.18}$$

и пополним F^T по соответствующей норме. Пополнение обозначим через Φ^T и сохраним за ним термин "внешнее пространство". Сопоставляя (2.8) и (2.18), имеем:

$$(u^f(\cdot, T), u^g(\cdot, t))_{\mathcal{H}^T} = (W^T f, W^T g)_{\mathcal{H}^T} = (f, g)_{\Phi^T}, \tag{2.19}$$

откуда следует изометричность оператора $W^T : \Phi^T \longrightarrow \mathcal{H}^T$, $\mathrm{Dom}\, W^T = F^T$. Он допускает расширение по непрерывности до изометрического оператора $\mathcal{W}^T : \Phi^T \longrightarrow \mathcal{H}^T$. Существенно, что в случае $\Omega \in \mathcal{N}$ он оказывается унитарным в силу (2.16) (с $\xi = T$):

$$\mathcal{W}^T \Phi^T = \mathcal{H}^T; \ (\mathcal{W}^T f, \mathcal{W}^T g)_{\mathcal{H}^T} = (f, g)_{\Phi^T}. \tag{2.20}$$

Оператор $C^T : \Phi^T \longrightarrow \Phi^T$, $\mathrm{Dom}\, C^T = F^T$ также допускает расширение на все Φ^T, обозначаемое $\overline{C}^T$. Устанавливается включение

$$\overline{C}^T \Phi^T \subset F^T. \tag{2.21}$$

2.4. <u>Проекторы $\mathcal{P}^{\xi}$</u>. В Φ^T рассмотрим семейство запаздывающих подпространств

$$\Phi^T_{T-\xi} := cl_{\Phi^T} F^T_{T-\xi} \qquad (0 \leq \xi \leq T). \tag{2.22}$$

Через $\mathcal{P}^{\xi}$ обозначим отвечающие им (орто)проекторы: $\mathcal{P}^{\xi} \Phi^T = \Phi^T_{T-\xi}$. В случае $\Omega \in \mathcal{N}$ $(T < T_*)$ двойственными к ним (в смысле изометрии (2.20)) оказываются проекторы $P^{\xi} : \mathcal{H}^T \longrightarrow \mathcal{U}^{\xi}$

$$P^{\xi} \mathcal{H}^T = \mathcal{U}^{\xi} \overset{(2.17)}{=} \mathcal{H}^{\xi} \qquad (0 \leq \xi \leq T) \tag{2.23}$$

действие которых сводится к срезке функций из $\mathcal{H}^T$ на заполненные

области Ω^{ξ}.

Для проекторов $\mathcal{P}^{\xi}\,(0 \leqslant \xi \leqslant T)$ справедливо представление

$$\mathcal{P}^{\xi} = \sum_{p=1}^{\infty} (\cdot, h_p^{\xi})_{\Phi^T} h_p^{\xi}, \tag{2.24}$$

в котором $\{h_p^{\xi}\}$ есть базис под пространства $\Phi^T_{T-\xi}$, построенный с помощью процесса ортогонализации по форме $(\cdot,\cdot)_{\Phi^T} = (C^T(\cdot),\cdot)_{F^T}$ какой-нибудь системы запаздывающих источников $\{f_k^{\xi}\} \subset F^T_{T-\xi}$, полной в $F^T_{T-\xi}$ (в метрике F^T). Вслед за $\mathcal{P}^{\xi}$ можно построить проекторы $\mathcal{P}_{\perp}^{\xi} = \mathcal{E}^T - \mathcal{P}^{\xi} : \Phi^T \to \Phi^T \ominus \Phi^T_{T-\xi}$,

$$\mathcal{P}_{\perp}^{\xi} = \mathcal{E}^T - \sum_{p=1}^{\infty} (\cdot, h_p^{\xi})_{\Phi^T} h_p^{\xi} \quad (0 \leqslant \xi \leqslant T). \tag{2.25}$$

Подчеркнем, что для построения ряда в (2.24), (2.25) достаточно располагать оператором C^T, который, в свою очередь, определяется данными о.з., согласно (2.9).

2.5. Амплитудные формулы. Приведем результат, позволяющий в ситуации о.з. восстанавливать изображения волн

$$\tilde{u}^f(\gamma,\tau;T) := (I^T u^f(\cdot,T))(\gamma,\tau),$$

локализованные на выкройке Θ^T (см. Определение 4):

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\Omega \in \mathcal{N}$, $T < T_*$ и $f \in C_0^{\infty}(\Sigma^T)$; в этом случае в точках $(\gamma,\xi) \in \{\Gamma \times [0,T)\} \setminus \theta^T$ справедливо равенство

$$\lim_{t \to T-\xi-0} (\bar{C}^T \mathcal{P}_{\perp}^{\xi} f)(\gamma,t) = \tilde{u}^f(\gamma,\xi;T). \tag{2.26}$$

Доказательство опускается; оно вполне аналогично приведенному в [6, 8] для задачи с неймановскими источниками. Мы называем (2.26) амплитудной формулой (АФ), имея ввиду способ ее вывода, основанный на нестационарном варианте метода ВКБ (см. [15]). Подробности – в цитированных работах; здесь скажем лишь, что существенным образом используется специфика управляемого случая – тривиальность проектирования в $\mathcal{H}^T$ на волновые подпространства $\mathcal{U}^{\xi}$: при $\Omega \in \mathcal{N}$ оно сводится к срезке – см. (2.23). Отметим еще, что выражение под знаком предела есть функция из F^T (см. (2.21)).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Способ вывода АФ [6, 8] не гарантирует существования предела (2.26) в точках $(\gamma,\tau_*(\gamma)) \in \theta^T \subset \theta$. Это

несущественно для дальнейшего в силу $mes_{d\Gamma d\tau}\,\theta^T=0$ (см.(2.5)).

После нахождения оператора C^T и проекторов $\mathcal{P}_\perp^\xi$ по данным о.з. (см.(2.9), (2.25)), мы получаем возможность, вычисляя левую часть (2.26), находить изображения волн по источникам. Именно это обстоятельство делает АФ эффективным инструментом решения о.з.

Выразительные возможности АФ расширяются с использованием свойства (2.13):

$$\lim_{t\to T-\xi-0}\left(\bar{C}^T\mathcal{P}_\perp^\xi\mathcal{T}_{T-s}^T f\right)(\gamma,t)=\tilde{u}^f(\gamma,\xi;s) \qquad (2.27)$$

при $(\gamma,\xi)\in\{\Gamma\times[0,T)\}\setminus\theta^T$, $0<s<T$. В таком виде АФ позволяет визуализировать на $\Gamma\times[0,T)$ эволюцию волны.

Физическое содержание АФ можно охарактеризовать следующим образом. Они позволяют, оперируя объектами внешнего пространства, извлекаемыми из наблюдений за реакцией системы на Γ, визуализировать волновой процесс, протекающий в недоступной для прямых измерений области Ω^T.

Изображение $\tilde{u}^f$ отличается от самой волны u^f (в п.-г.к.) множителем $\beta^{1/2}$, положительным на выкройке (см.Определение 4 и (2.4)). Из сказанного, с учетом представления (I.9), заключаем:

$$\overline{\bigcup_{f\in F^T}\operatorname{supp}\tilde{u}^f(\cdot,\cdot;T)}=\bar{\Theta}^T \qquad (2.28)$$

(замыкание - в топологии $\Gamma\times[0,T]$).

Осуществляющий визуализацию оператор $\tilde{w}^T:\Phi^T\longrightarrow\tilde{\mathcal{H}}^T$, $\tilde{w}^T f:=\tilde{u}^f(\cdot,\cdot;T)$, $\tilde{w}^T=I^T w^T$ унитарен в силу (2.7) и (2.20). С учетом Замечания 3 можно утверждать, что его действие вполне определяется формулой (2.26). Место $\tilde{w}^T$ в операторной схеме иллюстрирует рис.4:

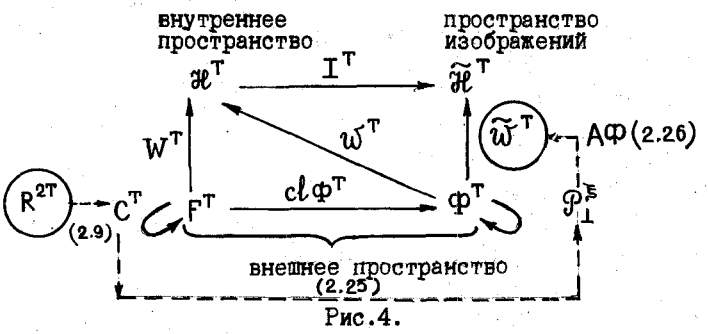

Рис.4.

Указанный пунктиром переход от R^{2T} к $\widetilde{w}^T$ отвечает процедуре визуализации $f \longrightarrow \widetilde{u}^f$ по данным о.з. Он резюмирует содержание § 2.

Для решения задачи реконструкции остается предъявить способ, позволяющий извлекать геометрические характеристики Ω^T (метрику, топологию) из картины изображений волн. Этому посвящен § 3.

§ 3. Реконструкция Ω^T.

3.I. Квазифотоны; идея применения. Ниже рассматриваются решения задачи I специального вида, сосредоточенные вблизи бихарактеристик уравнения (I.2). Дадим краткое описание их свойств и идею применения в о.з.

Пусть $\ell_{\gamma^0,\alpha}$ - геодезическая, выходящая в Ω из точки $\gamma^0 \in \Gamma$ в направлении орта α, образующего острый угол с ортом (внутренней) нормали $\nu(\gamma^0)$. Через $\ell_{\gamma^0,\alpha}[0,s]$ обозначим отрезок $\ell_{\gamma^0,\alpha}$ переменной длины $s \leqslant T$ с началом $b\gamma^0$; через $x_{\gamma^0,\alpha}(s)$ - конец этого отрезка. Условимся также рассматривать лишь те (допустимые) значения $s \in [0,T]$, при которых $\ell_{\gamma^0,\alpha}[0,s]$ не имеет общих точек с Γ, отличных от γ^0.

ТЕОРЕМА 3. Существуют (комплексные) источники $f = f^{\varepsilon}_{\gamma^0,\alpha}(\gamma,t) \in C_0^{\infty}(\Sigma^T)$, инициирующие решения ("квазифотоны")

$$u^{\varepsilon}_{\gamma^0,\alpha}(\cdot,s) := W^T \mathcal{T}^T_{T-s} f^{\varepsilon}_{\gamma^0,\alpha} \tag{3.I}$$

со следующими свойствами:

а) область локализации квазифотона

$$\Lambda^{\varepsilon}_{\gamma^0,\alpha}(s) := \left\{ x \in \Omega^T : |u^{\varepsilon}_{\gamma^0,\alpha}(x,s)| > \varepsilon^{-1} \right\}$$

является окрестностью точки $x_{\gamma^0,\alpha}(s)$. При $\varepsilon \longrightarrow 0$ она стягивается к $x_{\gamma^0,\alpha}(s)$:

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \Lambda^{\varepsilon}_{\gamma^0,\alpha}(s) = x_{\gamma^0,\alpha}(s), \ \operatorname{diam} \Lambda^{\varepsilon}_{\gamma^0,\alpha}(s) \longrightarrow 0 \tag{3.2}$$

равномерно по $s \in [0,T]$;

б) семейство множеств $\left\{ \Lambda^{\varepsilon}_{\gamma^0,\alpha}(s) \right\}$ со всевозможными $\varepsilon > 0$, $\gamma^0 \in \Gamma$, $\alpha : \langle \alpha, \nu(\gamma^0) \rangle > 0$, $s \in [0,T]$ образует базу топологии риманова (под)многообразия Ω^T (см. [20]). Доказательство отнесено в § 4. С физической точки зрения квазифотон

$u^{\varepsilon}_{\gamma^0,\alpha}$ представляет собой компактный волновой пакет, который перемещается со временем вдоль геодезической $\ell_{\gamma^0,\alpha}$ с единичной скоростью. Введение малого параметра позволяет стягивать область его локализации в произвольно малую окрестность геодезической (свойство а)). Кроме того, варьирование некоторых дополнительных параметров источника, генерирующего квазифотон, позволяет контролируемым образом изменять направление входа последнего в Ω. Свойство б) соответствует тому, что любая точка $x \in \Omega^T$ может быть "накрыта" некоторым квазифотоном не позднее, чем к моменту $t = T$.

Наметим план использования решений $u^{\varepsilon}_{\gamma^0,\alpha}$ в процедуре реконструкции. С помощью оператора $\widetilde{W}^T$, построенного в § 2 по данным о.з., находится изображение квазифотона $\widetilde{u}^{\varepsilon}_{\gamma^0,\alpha}(\gamma,t)$. С изменением времени область локализации $\widetilde{u}^{\varepsilon}_{\gamma^0,\alpha}$ вычерчивает на цилиндре $\Gamma \times [0,T)$ малую окрестность i-образа геодезической $\ell_{\gamma^0,\alpha}$. Проводя стягивание $(\varepsilon \to 0)$, можно восстановить сам образ $\widetilde{\ell}_{\gamma^0,\alpha} := i(\ell_{\gamma^0,\alpha})$ - "геодезическую в п.-г.к.". Отмечая на ней последовательные (с ростом t) положения "квазифотона" $\widetilde{u}^{\varepsilon}_{\gamma^0,\alpha}$, мы восстановим вдоль $\widetilde{\ell}_{\gamma^0,\alpha}$ натуральный параметр - длину. Меняя точку $\gamma^0 \in \Gamma$ и направление входа квазифотона α, восстановим на $\Gamma \times [0,T)$ достаточно богатое семейство геодезических, определяющее выкройку Θ^T и риманову структуру на ней. Далее стягивание используется для склейки, превращающей Θ^T в компакт Θ^T_*, изометричный Ω^T. Он и является искомой копией Ω^T.

3.2. <u>Визуализация геодезических.</u> Намеченный выше план мы реализуем следующим образом. Точное описание квазифотонов и инициирующих их граничных источников, имеющее весьма громоздкий характер, отложим до § 4, в котором $f^{\varepsilon}_{\gamma^0,\alpha}$ будут предъявлены. Сейчас же продолжим процедуру реконструкции Ω^T, считая, что они в нашем распоряжении.

Используя АФ (2.27), визуализируем на экземпляре $\Gamma \times [0,T)$ изображение $\widetilde{u}^{\varepsilon}_{\gamma^0,\alpha}(\cdot,s) = \widetilde{W}^T \mathcal{T}^T_{T-s} f^{\varepsilon}_{\gamma^0,\alpha}$ ("квазифотон в п.-г.к."). Пусть

$$M^{\varepsilon}_{\gamma^0,\alpha}(s) := \left\{(\gamma,\xi) \in \Gamma \times [0,T) : |\widetilde{u}^{\varepsilon}_{\gamma^0,\alpha}(\gamma,\xi;s)| > \varepsilon^{-1}\right\} \qquad (3.3)$$

есть область его локализации, располагающаяся на (пока ненайденной) выкройке $\Theta^T \subset \Gamma \times [0,T)$. В силу свойства а) Теоремы 3 имеем:

$$M^{\varepsilon}_{\gamma^0,\alpha}(s) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} i(x_{\gamma^0,\alpha}(s))$$

в смысле, вполне аналогичном (3.2) и, соответственно,

$$\bigcup_{\substack{0\le s\le\tau\\(\tau<T)}} M^{\varepsilon}_{\gamma^0,\alpha}(s) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \tilde{\ell}_{\gamma^0,\alpha}[0,\tau] := i\left(\ell_{\gamma^0,\alpha}[0,\tau]\right). \qquad (3.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из-за наличия множителя $\beta^{1/2}$ в Определении 4 образ $i(\Lambda^{\varepsilon}_{\gamma^0,\alpha})$, вообще говоря, не совпадает с $M^{\varepsilon}_{\gamma^0,\alpha}$, однако, в силу $\beta|_{\Theta^T}>0$, это несущественно для дальнейшего. Возможное при подходе к фокальным точкам стремление $\beta\to 0$ (Замечание 2) также не привносит осложнений, поскольку приводит лишь к сужению множества (3.3).

Отметим также, что если геодезическая $\ell_{\gamma^0,\alpha}$ пересекает cut locus, то ее образ $\tilde{\ell}_{\gamma^0,\alpha}$, найденный согласно (3.4), будет состоять более чем из одной связной компоненты (см.случай $\gamma^0=\gamma''$, $\alpha=\nu(\gamma'')$ на рис.3).

3.3. Визуализация выкройки. Склейка. Итак, предельный переход (3.4), выполнимый в ситуации с.з., позволяет указать на цилиндре $\Gamma\times[0,T)$ образы $\tilde{\ell}_{\gamma^0,\alpha}[0,\tau]$ $(0<\tau<T)$ отрезков геодезической. Сделать это можно для тех α, для которых удастся построить квазифотоны с соответствующим направлением входа в Ω. Как будет показано в § 4, такое построение возможно для $\forall\gamma^0\in\Gamma$ и любого некасательного $\alpha: \langle\alpha,\nu(\gamma^0)\rangle>0$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Множества

$$K^T := \bigcup_{\gamma^0\in\Gamma}\ \bigcup_{0\le\tau<T}\ \bigcup_{\alpha:\langle\alpha,\nu(\gamma^0)\rangle>0} \tilde{\ell}_{\gamma^0,\alpha}[0,\tau],$$

$$\mathcal{K}^T := i\left(K^T\setminus\omega\right)$$

назовем каркасом области Ω и каркасом выкройки Θ^T соответственно.

С физической точки зрения каркас - это множество траекторий квазифотонов, наблюдаемых при временах $0<t<T$.

Продолжим реконструкцию Ω^T. Визуализируя образы геодезических $\tilde{\ell}_{\gamma^0,\alpha}$ для всевозможных γ^0,α, восстановим на $\Gamma\times[0,T)$ каркас $\mathcal{K}^T$. Его прообраз, - каркас K^T, в силу свойства б) теоремы 3, покрывает Ω^T. Соответственно, $\mathcal{K}^T$ покроет выкройку Θ^T, что позволяет считать ее восстановленной (ср. с (2.28)).

К найденной выкройке Θ^T присоединим часть ее (верхнего) края θ^T (см.(2.6) и рис.3):

$$\Theta^T \cup \theta^T = \bigcup_{0<\delta<T} cl\,[\Theta^T \cap (\Gamma \times [0, T-\delta])]$$

(замыкание – в топологии $\Gamma \times \overline{\mathbb{R}}_+$). Каждое из множеств (3.3) дополним теми точками θ^T , которые являются предельными для $M^{\varepsilon}_{\gamma^0,\alpha}$ в топологии $\Gamma \times \overline{\mathbb{R}}_+$; образованные множества обозначим через $\widetilde{M}^{\varepsilon}_{\gamma^0,\alpha}$.

Множество $\Theta^T \cup \theta^T$ снабдим топологией, определяемой семейством $\{\widetilde{M}^{\varepsilon}_{\gamma^0,\alpha}(s)\}$ ($\varepsilon > 0$, $\gamma^0 \in \Gamma$, α – некасательно, $s \in [0,T)$) как базой. Получим компакт Θ^T_* , гомеоморфный Ω^T. Поясним, что при переходе к Θ^T_* отождествляются те точки края θ^T (см. т.т. a и a на рис.3), которые составляют полный прообраз некоторой точки cut locus (т. $a \in \omega^T$ на рис.3) при отображении e (см.(2.6)).

3.4. Метрический тензор на Θ^T_* . Реконструкция Ω^T. Покажем, как, располагая каркасом $\mathcal{K}^T$, снабдить Θ^T_* структурой риманова многообразия, превращающей его в изометрическую копию Ω^T .

Сначала восстановим метрический тензор на $\Theta^T \subset \Theta^T_*$, используя координаты (γ, τ) на Θ^T . Для этого фиксируем точку $(\gamma_0, \tau_0) \in \Theta^T$ и рассмотрим наклонную геодезическую $\tilde{\ell}_{\gamma',\alpha} \in \mathcal{K}^T$, $\alpha \neq \nu(\gamma')$, проходящую через (γ_0, τ_0) (см.рис.5).

Пусть $\{\gamma^1, \ldots, \gamma^{n-1}\}$ – локальные координаты на Γ в окрестности точки γ_0 ;

$$\tau = \tau(s) \quad \tau_0 = \tau(s_0)$$
$$\gamma^j = \gamma^j(s) \; ; \quad \gamma^j_0 = \gamma^j(s_0)$$

уравнение $\tilde{\ell}_{\gamma',\alpha}$ с (натуральным) параметром s .

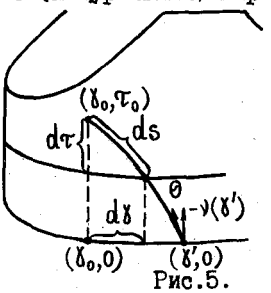

Рис.5.

Дифференцируя по s , найдем касательный орт $\{\dot{\gamma}^1(s_0), \ldots, \dot{\gamma}^{n-1}(s_0), \dot{\tau}(s_0)\}$,

$$[\dot{\tau}(s_0)]^2 + g_{\alpha\beta}(\gamma_0,\tau_0)\dot{\gamma}^\alpha(s_0)\dot{\gamma}^\beta(s_0) = 1 \tag{3.8}$$

(см.(2.2)). Варьируя геодезическую $\tilde{\ell}_{\gamma',\alpha}$ и используя равенства (3.8) как систему, определим из нее

$$\left\{ g_{\alpha\beta}(\gamma_0,\tau_0) \right\}_{\alpha,\beta=1}^{n-1}.$$

Восстановление тензора в точках "шва" $\Theta_*^T \mid \Theta^T$, образовавшихся при склейке Θ^T по части края, проведем в два приема. Сначала опишем для них локальные системы координат, используя в качестве координатных линий геодезические $\tilde{\ell}_{\gamma^0,\alpha} \in \mathcal{K}^T$ которыми располагаем в ситуации о.з.

Фиксируем точку $(\gamma_0,\tau_0) \in \Theta_*^T \mid \Theta^T$ и проведем $\tilde{\ell}_{\gamma^0,\nu(\gamma^0)}[0,\tau_0-0] \in \mathcal{K}^T$.

а) Если $g(\gamma_0,\tau) \not\to 0$, то точка (γ_0,τ_0) не является фокальной и в качестве карты можно использовать координаты $\{\gamma^1,\ldots,\gamma^{n-1},\tau\}$ в некоторой части трубки

$$\Xi^{(1)}_{(\gamma_0,\tau_0)} := \bigcup_{\gamma\in U_{\gamma^0}} \tilde{\ell}_{\gamma,\nu(\gamma)}[\tau_0-\varepsilon,\tau_0+\varepsilon],$$

где U_{γ^0} - окрестность на Γ (рис.6а)

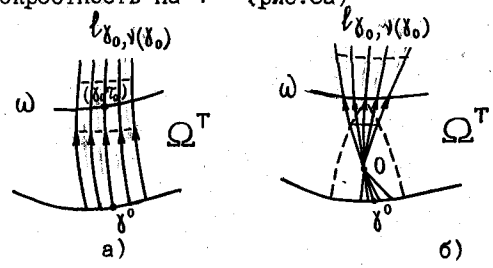

Рис.6.

б) Если $g(\gamma_0,\tau) \xrightarrow[\tau\to\tau_0-0]{} 0$, то точка (γ_0,τ_0) - фокальная и поэтому координаты (γ,τ) не годятся. В этом случае из входящих в $\mathcal{K}^T$ геодезических образуем двусторонний конус малого раствора с вершиной $O \in \tilde{\ell}$. Эти геодезические индексируем ортом $\Psi \sim \{\Psi^1,\ldots,\Psi^{n-1}\}$, задающим направление выхода из вершины O (рис.6б).

Варьируя положение $\mathcal{O}$ на $\tilde{\ell}_{\gamma_0,\nu(\gamma_0)}$, можно добиться того, что (γ_0,τ_0) не окажется точкой, сопряженной вершине. В этом случае "усеченный конус"

$$\overset{(2)}{\underset{(\gamma_0,\tau_0)}{\Xi}} := \bigcup_{\psi} \tilde{\ell}_{\gamma,\psi}[\tau_0-\varepsilon,\tau_0+\varepsilon]$$

является окрестностью, в которой регулярны координаты $\{\psi^1,\dots,\psi^{n-1},\tau\}$.

В обоих случаях найдем компоненты метрического тензора в точках

$$\overset{(1),(2)}{\underset{(\gamma_0,\tau_0)}{\Xi}} \cap \Theta^T,$$

после чего доопределим их по непрерывности в (γ_0,τ_0).

Компакт Θ^T_*, снабженный метрическим тензором по указанному выше правилу, является многообразием, изометричным области Ω^T. Задача реконструкции решена.

Приведем итоговую схему процедуры реконструкции (рис.7).

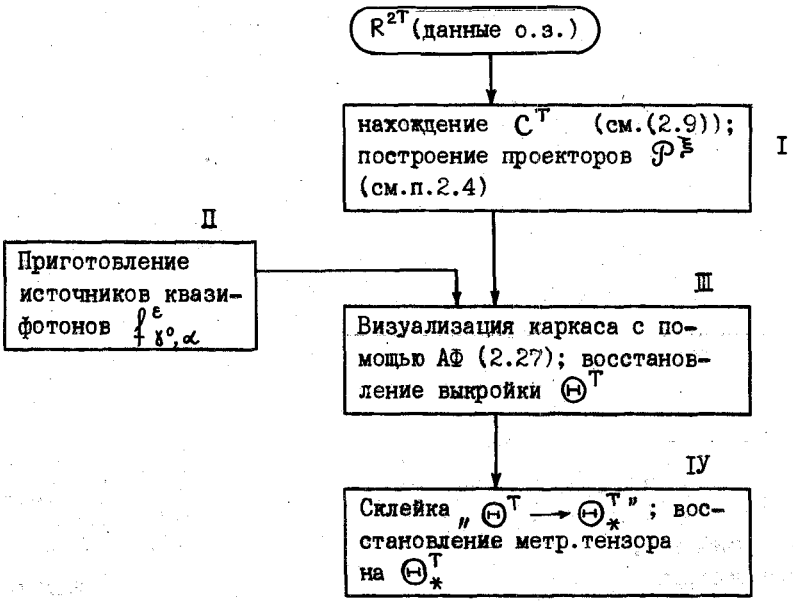

Рис.7.

Остающийся пробел – описание блока II. Ему посвящен § 4.

§ 4. Построение квазифотона.

4.I. Уравнения Гамильтона-Якоби и переноса. Переходим к построению квазифотона для волнового уравнения на римановом многообразии Ω. Начнем с описания формального асимптотического разложения решения, сосредоточенного вблизи точки, движущейся по многообразию. Впервые такое решение было построено в работе Бабич-Улин [I7] для волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$. При описании квазифотона мы будем следовать схеме, предложенной Качаловым (см. [I8, I9]).

Рассмотрим локальную карту V_x многообразия Ω с системой координат $x=\{x^1,\dots,x^n\}$. Траекторию точки в этой локальной карте можно описать уравнениями $x^i=X^i(t)$, $i=1,\dots,n$. Естественной системой координат при описании квазифотона в локальной карте V_x является система координат $\eta=\{\eta^1,\dots,\eta^n\}$, $\eta^i=x^i-X^i(t)$.

Решение волнового уравнения (I.2) будем искать в виде лучевого ряда

$$u^\varepsilon(x,t):=e^{i\varepsilon^{-1}\theta(\eta,t)}\sum_{\ell=0}^{\infty}u_{(\ell)}(\eta,t)(-i\varepsilon)^\ell. \tag{4.I}$$

Фазовая функция $\theta(\eta,t)$ и амплитудные функции $u_{(\ell)}(\eta,t)$ принимают комплексные значения. Параметр ε – малый параметр задачи. Он отвечает за размеры квазифотона. Для того, чтобы решение (4.I) было сосредоточено вблизи кривой $x=X(t)$, необходимо, чтобы $\operatorname{Im}\theta(\eta,t)\geqslant 0$ при малых $|\eta|$.

Для нахождения функций $\theta(\eta,t)$ и $u_{(\ell)}(\eta,t)$ подставим выражение (4.I) в уравнение (I.2) и приравняем при различных степенях малого параметра ε. Получим уравнение эйконала (Гамильтона-Якоби) для фазы $\theta(\eta,t)$

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}-\frac{dX^i}{dt}\frac{\partial\theta}{\partial\eta^i}\right)^2-g^{ik}(X+\eta)\frac{\partial\theta}{\partial\eta^i}\frac{\partial\theta}{\partial\eta^k}=0 \tag{4.2}$$

и уравнения переноса для амплитуд $u_{(\ell)}(\eta,t)$

$$L_{(0)}u_{(\ell)}+Lu_{(\ell-1)},\quad \ell=0,1,\dots;\ u_{-1}\equiv 0, \tag{4.3}$$

где

$$L_{(0)}u := 2\frac{\partial\theta}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t} - 2\frac{dx^i}{dt}\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial\eta^i} + \frac{\partial\theta}{\partial\eta^i}\frac{\partial u}{\partial t}\right) +$$
$$+ 2\frac{dx^i}{dt}\frac{\partial u}{\partial\eta^i}\frac{dx^j}{dt}\frac{\partial\theta}{\partial\eta^j} - 2g^{ik}(X+\eta)\frac{\partial\theta}{\partial\eta^i}\frac{\partial u}{\partial\eta^k} + L\theta\cdot u, \tag{4.4}$$

L - волновой оператор на многообразии, записанный в координатах η.

Будем искать функции $\theta(\eta,t)$ и $u_{(\ell)}(\eta,t)$ в виде разложений по однородным полиномам переменных η возрастающих степеней:

$$\theta(\eta,t) = \theta_0(t) + \theta_1(\eta,t) + \frac{1}{2}\theta_2(\eta,t) + \dots, \tag{4.5}$$

$$u_{(\ell)}(\eta,t) = u_{(\ell)0}(t) + u_{(\ell)1}(\eta,t) + \dots, \tag{4.6}$$

$$\theta_1(\eta,t) = \theta_{1i}(t)\eta^i,\ \theta_2(\eta,t) = \Gamma_{ij}(t)\eta^i\eta^j, \dots . \tag{4.7}$$

Условие сосредоточенности квазифотона вблизи кривой $x = X(t)$ будет выполнено, если функции θ_0, θ_{1i} - вещественные, а $\operatorname{Im}\Gamma(t)$ - положительно определенная матрица.

4.2. Решение уравнения Гамильтона-Якоби. Подставим (4.5) и (4.7) в уравнение Гамильтона-Якоби (4.2) и приравняем при последовательных степенях однородности по η. Равенства при нулевой и первой степенях однородности приводят к постоянству $\theta_0(t)$, а также к системе уравнений Гамильтона для координат $x^i = X^i(t)$ и импульсов $p_i = \theta_{1i}(t)$

$$\begin{cases} \dfrac{dx^i}{dt} = \dfrac{\partial\mathcal{H}(x,p)}{\partial p_i} \\ \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial\mathcal{H}(x,p)}{\partial x^i}, \quad i = 1,\dots,n \end{cases} \tag{4.8}$$

с гамильтонианом $\mathcal{H}(x,p) = \sqrt{g^{ik}(x)p_ip_k}$. Система уравнений (4.8) эквивалентна уравнениям геодезических в метрике g_{ik} на многообразии Ω и $X(t)$ - геодезические в этой метрике с каноническим параметром t. Задавая произвольные начальные данные

$$x^i\big|_{t=0} = X^i(0) = X_0^i,\ p_i\big|_{t=0} = \theta_{1i}(0) = P_{i0} \tag{4.9}$$

мы можем построить решение системы уравнений Гамильтона для любого времени t, пока геодезическая не выйдет на границу много-

образия.

Условия при второй степени однородности для уравнения Гамильтона-Якоби приводят к матричному уравнению Риккати для Γ.

$$\frac{d\Gamma}{dt}+A+(B\Gamma+\Gamma B^T)+\Gamma R\Gamma=0, \tag{4.10}$$

где матрицы коэффициентов A, B, R определяются вторыми производными от гамильтониана $\mathcal{H}$ вычисленными на геодезической

$$A_{ik}=\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial x^i\partial x^k},\quad B_{ik}=\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial x^i\partial p_k},\quad R_{ik}=\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial p_i\partial p_k}. \tag{4.11}$$

Решение матричного уравнения Риккати (4.10) можно найти в виде: $\Gamma=Z\cdot Y^{-1}$. Для комплексных матричных функций Z и Y имеет место линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases}\dfrac{dY}{dt}=B^TY+RZ\\[2mm] \dfrac{dZ}{dt}=-AY-BZ.\end{cases} \tag{4.12}$$

ЛЕММА 3. Для системы уравнений (4.12) выполняются следующие законы сохранения:

$$Z^T\cdot Y-Y^T\cdot Z=\mathrm{const}., \tag{4.13}$$

$$M=Z^*\cdot Y-Y^*\cdot Z=\mathrm{const}. \tag{4.14}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Законы сохранения (4.13) и (4.14) элементарно проверяются путем дифференцирования левых частей указанных равенств по времени с учетом уравнений (4.12), симметрии матриц A, R, а также вещественности всех матриц коэффициентов.

ЛЕММА 4. Если матрица Γ, являющаяся решением уравнения Риккати (4.10), принадлежит верхней полуплоскости Зигеля при $t=0$ (т.е. Γ - симметричная матрица с положительно определенной мнимой частью), то она принадлежит верхней полуплоскости Зигеля при всех $t>0$. При этом $\det(Y(t))\neq 0\ \forall t>0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим решение системы уравнений (4.12) с начальными данными $Y|_{t=0}=E, Z|_{t=0}=\Gamma|_{t=0}$. Матрица $iM(t)=-iY^*(\Gamma-\Gamma^*)Y=iM(0)=2\,\mathrm{Im}\,\Gamma|_{t=0}$ - положительно определена и, следовательно, невырождена при $\forall t>0$. Отсюда следует невырожденность матрицы Y при всех $t>0$. Из законов

сохранения (4.13) и начальных данных немедленно получаем, что $Z^T \cdot Y = Y^T Z$ для всех $t > 0$. Отсюда вытекает симметричность матрицы Γ $\forall t > 0$. Положительная определенность $\operatorname{Im}\Gamma(t)$ есть следствие положительной определенности матрицы $iM(t)$.

Таким образом, можно сделать следующий вывод: решение (4.1) волнового уравнения на многообразии сосредоточено в окрестности точки, движущейся по геодезической с единичной скоростью.

4.3. Высшие приближения уравнения Гамильтона-Якоби и уравнения переноса. Для последующих членов разложения нетрудно получить линейные дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial\theta_\ell}{\partial t} = -\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial\theta_\ell}{\partial\eta^k}\left[\frac{dx^k}{dt}\frac{\partial\theta_1}{\partial t} + \frac{\partial g^{ik}(x)}{\partial x^j}\eta^j\frac{\partial\theta_1}{\partial\eta^i} + \right.$$
$$\left. + \left(g^{ik}(x) - \frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt}\right)\frac{\partial\theta_2}{\partial\eta^i}\right] + F_\ell, \quad \ell \geq 3. \tag{4.15}$$

Функции F_ℓ определяются по $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{\ell-1}$. Поскольку уравнение (4.15) это дифференциальное уравнение на ℓ-формах переменных η, мы можем сделать комплексную замену переменных $\tilde{\eta}_i = Y^{-1}_{ik}(t)\eta^k$. Заметим, что $Y^{-1}_{ik}(t)$ существует при любом t. При такой замене ℓ-формы θ_ℓ переменных η переходят в ℓ-формы $\tilde{\theta}_\ell$ переменных $\tilde{\eta}$. Уравнение (4.15) в новых переменных $\tilde{\eta}, t$ приобретает вид:

$$\frac{\partial\tilde{\theta}_\ell}{\partial t} = \tilde{F}_\ell, \quad \ell \geq 3. \tag{4.16}$$

Интегрируя (4.16) по времени, мы последовательно найдем все члены разложения θ по степеням однородности $\tilde{\eta}$, а следовательно, и η.

Приступим теперь к изучению уравнений переноса (4.3). Подставляя в них разложения (4.5)-(4.7) и переходя к переменным $\tilde{\eta}, t$, после ряда преобразований можно получить уравнения для m-форм $\tilde{u}_{(\ell)m}$ разложения $u_{(\ell)}$ по $\tilde{\eta}$. Они имеют следующий вид:

$$\frac{\partial\tilde{u}_{(\ell)m}}{\partial t} + \frac{d}{dt}\ln\sqrt{g^{1/2}(x(t))\det(Y(t))}\,\tilde{u}_{(\ell)m} + \tilde{F}_{(\ell)m} = 0,$$
$$m = 0, 1, \ldots, \ell = 0, 1, \ldots, \tag{4.17}$$

где $\tilde{F}_{(\ell)m}$ зависят лишь от $\tilde{\theta}_r, \tilde{u}_{(\ell-1)r}, \tilde{u}_{(\ell)s}, 0 \leq r \leq m+2, 0 \leq s \leq m-1$. Отсюда последовательно можно найти $\tilde{u}_{(\ell)m}$:

$$\tilde{u}_{(\ell)m} = \frac{1}{g^{1/4}(X(t))\det^{1/2}(Y(t))} \cdot \Big\{ C_{(\ell)m} - \int_0^t g^{1/4}(X(s))\det^{1/2}(Y(s))\tilde{F}_{(\ell)m}(s)ds \Big\}. \tag{4.18}$$

В частности главный член асимптотики (4.I) имеет вид:

$$u_{(0)0} = \frac{C_{(0)0}}{g^{1/4}(X(t))\det^{1/2}(Y(t))}. \tag{4.19}$$

В силу невырожденности метрического тензора g_{ik} и матрицы $Y(t)$ решения (4.I8), (4.I9) не имеют особенностей ни при каких значениях t. Более того, для бесконечно дифференцируемого метрического тензора g_{ik} функции θ_ℓ и $u_{(\ell)m}$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями переменных η, t.

4.4. Построение приближенного решения волнового уравнения. В предыдущем пункте мы построили формальное асимптотическое решение уравнения (I.2). Если мы рассмотрим область, окружающую точку $x = X(t)$ с размерами $O(\varepsilon^{1/2-\mu})$, $0<\mu<1/6$ и возьмем конечное число членов разложения в фазе θ и в амплитудных функциях $u_{(\ell)}$, то мы получим приближенное решение волнового уравнения на многообразии Ω, сосредоточенное в окрестности $O(\varepsilon^{1/2})$. Вне этой окрестности наше решение экспоненциально убывает.

Более того, рассмотрим функцию

$$U_N^\varepsilon(x,t) := e^{i\varepsilon^{-1}\theta^N(\eta,t)}\Big(\sum_{\ell=0}^{N} u_{(\ell)}^N(\eta,t)(-i\varepsilon)^\ell\Big)\chi(|\eta|\varepsilon^{-1/2+\mu}), \tag{4.20}$$

где $0<\mu<1/6$, $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\chi=1$ при $x<1$, $\chi=0$ при $x>2$,

$$\theta^N = \theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_{K(N)},$$
$$u_{(\ell)}^N = u_{(\ell)0}+\ldots+u_{(\ell)L(N-\ell)}, \tag{4.21}$$

а

$$K(N) = [(2N-n+4)/(1-2\mu)],$$
$$L(N) = [(2N-n+2)/(1-2\mu)]. \tag{4.22}$$

ЛЕММА 5. $U_N^\varepsilon(x,t)$ есть бесконечно дифференцируемая финитная $\forall t$ функция, удовлетворяющая уравнению

$$L U_N^\varepsilon(x,t) = f_N^\varepsilon(x,t), \tag{4.23}$$

где функция f_N^ε удовлетворяет неравенствам

$$\sup_{t\in[0,T]} \| f_N^\varepsilon(\cdot,t)\|_{(s)} \leq C(T)\varepsilon^{N-s}, \tag{4.24}$$

$$\sup_{t\in[0,T]} \left\| \frac{\partial^\ell f_N^\varepsilon(\cdot,t)}{\partial t^\ell} \right\|_{(s-\ell)} \leq C(T)\varepsilon^{N-s}. \tag{4.25}$$

Здесь $\|\cdot\|$ это норма в $H_s(\Omega)$ с весом $\sqrt{g}$.

Доказательство нетрудно провести, используя метод стационарной фазы, поскольку по построению

$$\sup_{x,t} | f_N^\varepsilon(x,t)| \leq C\,\varepsilon^{N-n/2}. \tag{4.26}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Для функций U_N^ε справедливы свойства а) и б) теоремы 3 § 3. Действительно, область локализации U_N^ε определяется $\operatorname{Im}\theta^N(\eta,t)$. При $\varepsilon\to 0$ эта область приближается эллипсоидом. Его оси направлены по собственным векторам $\operatorname{Im}\Gamma(t)$, а полуоси равны $\sqrt{\varepsilon/\lambda_i}$, где λ_i – i собственное число $\operatorname{Im}\Gamma(t)$. В частности, область локализации содержит шар с центром в точке $X(t)$ и радиуса $r=\sqrt{\varepsilon/\lambda}$, $\lambda = \max\limits_{i=1,\dots,n}\lambda$.

4.5. Оценки для точного решения волнового уравнения. Рассмотрим геодезическую на Ω, выходящую из точки на краю Γ в момент времени t_0 под ненулевым углом к Γ. Пусть V_x – локальная карта в окрестности выхода геодезической. Уравнение края в этой локальной карте имеет вид: $x = x^*(\gamma)$, где $\gamma=\{\gamma^1,\dots,\gamma^{n-1}\}$ координаты на Γ в окрестности точки выхода геодезической. В координатах x,t геодезическая $x = X(t)$ выходит из точки $x^*(\gamma_0) = x_0 \in \Gamma$.

Рассмотрим след решения $U_N^\varepsilon(x,t)$, соответствующего этой геодезической на краю Γ: $\Phi_N^\varepsilon(\gamma,t) = U_N^\varepsilon(x^*(\gamma),t)$. Нетрудно видеть, что он определяется уравнением границы $x^*(\gamma)$, а также наборами функций θ_i, $1\leq i\leq K(N)$, $u_{(\ell)s}$, $0\leq\ell\leq N$, $0\leq s\leq L(N-\ell)$, которые в свою очередь определяются производными метрического тензора на геодезической $x = X(t)$. Поскольку эта геодезическая

трансверсальна Γ, то $\varphi_N^\varepsilon(\gamma,t)$ – бесконечно дифференцируемая функция с носителем в окрестности $\sim O(\varepsilon^{1/2-\mu})$, $0<\mu<1/6$ по переменным γ и t. В связи с этим все функции, определяющие φ_N^ε, можно переразложить в ряды по степеням $(t-t_0)$. Коэффициенты этих разложений определяются из уравнений (4.8), (4.12), (4.16), (4.17). Нетрудно понять, что они зависят только от метрического тензора g_{ik} и его производных, вычисленных в точке x_0, а также набора начальных данных (начальный импульс $P_0, \dots$). Следовательно, взяв достаточное число членов разложения по $(t-t_0)$, мы получим граничную функцию $\Psi_N^\varepsilon(\gamma,t)$ такую, что

$$\left\| \frac{\partial^l}{\partial t^l}\left(\Psi_N^\varepsilon(\gamma,t)-\varphi_N^\varepsilon(\gamma,t)\right)\right\|_{(s-l)} < C\,\varepsilon^{N+2-s}. \tag{4.27}$$

Функция Ψ_N^ε определяется начальным импульсом P_0, значениями метрического тензора и его производных в точке x_0 и уравнением края $x=x^*(\gamma)$ и не зависит от значений метрического тензора внутри Ω.

Далее сформулируем начально-краевую задачу для волнового уравнения на римановом многообразии Ω с краем Γ, решения которой будут близки к функциям $U_N^\varepsilon(x,t)$. Решение такой начально-краевой задачи будем называть квазифотонами. Функции $U_N^\varepsilon(x,t)$ являются их асимптотикой

$$\begin{cases} L\tilde{w}_N^\varepsilon = 0 & \text{в } Q^T \\ \tilde{w}_N^\varepsilon\big|_{t=0} = \partial_t \tilde{w}_N^\varepsilon\big|_{t=0} = 0 \\ \tilde{w}_N^\varepsilon\big|_{\Sigma^T} = \Psi_N^\varepsilon(\gamma,t). \end{cases} \tag{4.28}$$

Аналогичная задача для функции U_N^ε имеет вид:

$$\begin{cases} LU_N^\varepsilon = f_N^\varepsilon & \text{в } Q^T \\ U_N^\varepsilon\big|_{t=0} = \partial_t U_N^\varepsilon\big|_{t=0} = 0 \\ U_N^\varepsilon\big|_{\Sigma^T} = \varphi_N^\varepsilon(\gamma,t). \end{cases} \tag{4.29}$$

Обозначим разность $R(x,t)=\tilde{w}_N^\varepsilon(x,t)-U_N^\varepsilon(x,t)$ точного и приближенного решений волнового уравнения. Без нарушения общности мы можем считать, что Ω – компактное многообразие. Если это не так, то вместо него можно взять $\Omega^{2T+\varepsilon}$ и поставить нулевые граничные условия на дополнительной границе. В силу гиперболичности уравнения решения в Q^T будут совпадать.

<u>ТЕОРЕМА 4</u>. Существуют единственные решения $\tilde{w}_N^\varepsilon(x,t)$ и $U_N^\varepsilon(x,t)$ начально-краевых задач (4.28), (4.29) бесконечно

дифференцируемые в Q^T. Решение U_N^ε совпадает с (4.20).

Доказательство теоремы основано на теореме Хермандера (т.24.I.I [I6]). Так как $f_N^\varepsilon \in \bar{H}^{loc}_{(s)}(Q^T)$ $\forall s>0$, то, по этой теореме, существуют единственные решения указанных начально-краевых задач принадлежащие $\bar{H}^{loc}_{(s+1)}(Q^T)$ $\forall s>0$. Таким образом, эти функции бесконечно дифференцируемы и U_N^ε совпадает с (4.20).

Займемся теперь получением оценок для $R(x,t)$. Доказательство их основывается на энергетическом тождестве

$$\int_0^T \frac{\partial E(t)}{\partial t}dt = 2\mathrm{Re}\int_{Q^T}(Lu,\bar{u}_t)\partial\Omega_x dt + \int_{\Sigma^T}\partial_\nu u\,\partial_t u\,d\Gamma dt, \qquad (4.30)$$

где $E(t)$ - энергия волнового поля

$$E(t):=\int_\Omega\left\{\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + g^{ik}\frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x^k}\right\}d\Omega_x. \qquad (4.3I)$$

Прежде, чем приступить к оценке для $R(x,t)$, заметим, что $R(x,t)$ удовлетворяет начально-краевой задаче (4.29), но с граничной функцией $\Psi_N^\varepsilon - \Phi_N^\varepsilon$. Вводя замену функции $R(x,t) = \tilde{R}(x,t) + \{\Psi_N^\varepsilon(\gamma,t) - \Phi_N^\varepsilon(\gamma,t)\}\chi(\varepsilon^{-1/2}\mathrm{dist}(x,\Gamma))$ мы получим для $\tilde{R}$ начально-краевую задачу вида (4.29) с функцией f, удовлетворяющей оценкам (4.24), (4.25) и с нулевым краевым условием. Дальнейшие оценки будем проводить для функций, удовлетворяющих начально-краевой задаче с нулевыми начальными и краевыми условиями.

<u>ЛЕММА 6</u>. Пусть $R(x,t)$ - решение начально-краевой задачи

$$\begin{cases} LR(x,t) = f(x,t) \ \text{в} \ Q^T \\ R|_{t=0} = \partial_t R|_{t=0} = 0 \\ R|_{\Sigma^T} = 0, \end{cases} \qquad (4.32)$$

где $f \in C_0^\infty(Q^T)$. Тогда

$$\sup_{t\in[0,T]}\|R(\cdot,t)\|_{(1)} \leqslant C(T)\sup_{t\in[0,T]}\|f(\cdot,t)\|_{(0)}. \qquad (4.33)$$

<u>ДОКАЗАТЕЛЬСТВО</u>. Применим энергетическое тождество к $R(x,t)$ и используем положительную определенность метрического тензора на компактном многообразии Ω. Получим следующее неравенство

$$m'^2(t) \leqslant \alpha m(t) = 2 \sup_{t\in[0,T]} \|f(\cdot,t)\|_{(0)} \cdot m(t), \tag{4.34}$$

где $m(t) = \int_0^t \left\| \frac{\partial R(\cdot,t')}{\partial t'} \right\|_{(0)} dt'$. Отсюда находим, что

$$m'(t) \leqslant \frac{\alpha}{2} + m(t).$$

Умножая полученное неравенство на e^{-t} и интегрируя по t от 0 до t, получим $m(t) \leqslant C(T)\alpha$. Подставив последнее неравенство в (4.34), получим

$$\sup_{t\in[0,T]} \left\| \frac{\partial R(\cdot,t)}{\partial t} \right\|_{(0)} \leqslant C(T) \sup_{t\in[0,T]} \|f(\cdot,t)\|_{(0)}.$$

Еще раз применив энергетическое тождество, получим оценку для первых производных

$$\sup_{t\in[0,T]} \left\{ \left\| \frac{\partial R}{\partial t}(\cdot,t) \right\|_{(0)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial R}{\partial x^i}(\cdot,t) \right\|_{(0)} \right\} \leqslant C(T) \sup_{t\in[0,T]} \|f(\cdot,t)\|_{(0)}.$$

Далее, используя неравенство

$$\|R(\cdot,t)\|^2_{(0)} = \int_0^t dt' \int_\Omega (R\partial_{t'}\bar{R} + \bar{R}\partial_{t'}R)\, d\Omega_x \leqslant C(T) \sup_{t\in[0,T]} \left\| \frac{\partial R(\cdot,t)}{\partial t} \right\|_{(0)} \cdot \int_0^t \|R(\cdot,\tau)\|_{(0)} d\tau$$

и проделав еще раз выкладки, аналогичные тем, которые использовались при анализе неравенства (4.34), но с функцией $m(t) = \int_0^t \|R(\cdot,t')\|_{(0)} dt'$, получим окончательный ответ.

<u>ЛЕММА 7.</u> В предположениях леммы 6 справедливы следующие неравенства

$$\sup_{t\in[0,T]} \left\| \frac{\partial^{(k)} R(\cdot,t)}{\partial t^k} \right\|_{(2s+1)} \leqslant C(T) \sup_{t\in[0,T]} \left\| \frac{\partial f^{(k)}(\cdot,t)}{\partial t^k} \right\|_{(2s)}, k=1,2,\ldots$$

$$\sup_{t\in[0,T]} \|R(\cdot,t)\|_{(2s+1)} \leqslant C(T) \sum_{\ell=0}^{2s} \sup_{t\in[0,T]} \left\| \frac{\partial^{(\ell)} f(\cdot,t)}{\partial t^\ell} \right\|_{(2s-\ell)}. \tag{4.35}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое неравенство есть элементарное следствие леммы 6. Второе неравенство доказывается применением оператора Бельтрами-Лапласа к $R(x,t)$ и использованием леммы 6 и энергетического тождества.

ТЕОРЕМА 5. Для функций U_N^ε и w_N^ε справедливо неравенство

$$\sup_{t\in[0,T]} \|U_N^\varepsilon(\cdot,t) - w_N^\varepsilon(\cdot,t)\|_{(2s+1)} \leq C(T)\varepsilon^{N-2s}. \qquad (4.36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Левую часть (4.36) нетрудно оценить через $\|\tilde{R}(\cdot,t)\|$, а именно

$$\sup_{t\in[0,T]} \|U_N^\varepsilon(\cdot,t) - w_N^\varepsilon(\cdot,t)\|_{(2s+1)} \leq \sup_{t\in[0,T]} \|\tilde{R}(\cdot,t)\|_{(2s+1)} + C(T)\varepsilon^{N-2s+1}.$$

Далее, используя оценки (4.24), (4.25) и выражения для функций $f_N^\varepsilon(x,t)$ и $\varphi_N^\varepsilon(\gamma,t) - \psi_N^\varepsilon(\gamma,t)$, можно получить оценку для правой части f_N^ε уравнения для $\tilde{R}$.

$$\sup_{t\in[0,T]} \left\| \frac{\partial^{(\ell)} f_N^\varepsilon(\cdot,t)}{\partial t^\ell} \right\|_{(2s-\ell)} \leq C(T)\varepsilon^{N-2\varepsilon}. \qquad (4.37)$$

Эта оценка получается по методу стационарной фазы. Окончательное неравенство получается применением леммы 7 к $\tilde{R}(x,t)$ и использованием неравенства (4.37).

СЛЕДСТВИЕ I. Выбирая достаточно большое N, т.е. достаточно большое число членов разложения для U_N^ε, можно добиться того, что разность между точным решением $w_N^\varepsilon(x,t)$ и приближенным решением $U_N^\varepsilon(x,t)$ волнового уравнения будет стремиться к нулю в $H_{(s)}$ с любым наперед заданным s и, следовательно, в C^ℓ. Последнее утверждение есть элементарное следствие теорем вложения.

СЛЕДСТВИЕ 2. Теорема 3 непосредственно вытекает из Замечания 5 и следствия I.

Литература

I. Б е л и ш е в М.И. Об одном подходе к многомерным обратным задачам для волнового уравнения. Докл.АН СССР, 1987, т.297, № 3, с.524-527.

2. Б е л и ш е в М.И. Уравнения типа Гельфанда-Левитана в многомерной обратной задаче для волнового уравнения. Зап.научн.

семин.ЛОМИ, т.165, с.15-20.

3. Белишев М.И., Благовещенский А.С. Прямой метод решения нестационарной обратной задачи для волнового уравнения. В сб.: Условно-корректные задачи математической физики и анализа. Красноярск, 1988, с.43-49.
4. Белишев М.И. Волновые базисы в многомерных обратных задачах. Матем.сб., 1989, т.180, № 5, с.584-602.
5. Белишев М.И., Качалов А.П. Методы теории граничного управления в обратной спектральной задаче для неоднородной струны. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1989, т.179, с.14-22.
6. Белишев М.И. Граничное управление и продолжение волновых полей. Ленинград, Препринт ЛОМИ Р-1-90, Л., 1990, 41 с.
7. Авдонин С.А., Белишев М.И., Иванов С.А. Граничное управление и матричная обратная задача для уравнения $u_{tt} - u_{xx} + v(x)u = 0$. Матем.сб., 1991, т.182, № 3, с.307-331.
8. Белишев М.И., Курылев Я.В. Граничное управление и реконструкция риманова многообразия по спектральным данным. Ленингр.Препринт ЛОМИ Р-7-91, Л., 1991, 39 с.
9. Ramm A.G., Rakesh. Property C and inverse problem for a hyperbolic equation. J.Math.Anal.Appl., 1991, v.156, N 1. p.209-219.
10. Lasiecka I., Lions J.-L., Triggiani R. Non homogeneous boundary value problems for second order hyperbolic operators Jounr.Math.Pures et Appl., 1986, v.65, p.149-192.
11. Благовещенский А.С. О локальном методе решения обратной задачи для неоднородной струны. Труды МИАН СССР, 1971, т.115, с.28-38.
12. Russell D.L. Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations. SIAM Review, 1978, v.20, N 4, p.639-739.
13. Hartman P. Geodesic parallel coordinates in the Large. Amer.Journ.of Math., 1964, v.86, N 4, p.705-727.
14. Громол В.Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. М., 1971,
15. Вайнберг Б.Р. Асимптотические методы в уравнениях математической физики. М., 1982.
16. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т3. М., 1987.
17. Бабич В.М., Улин В.В. Комплексный пространственно-временной лучевой метод и "квазифотоны". Зап.научн.семин.

ЛОМИ, 1981, т.117, с.5-12.
18. Качалов А.П. Система координат при описании "квазифотона". Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1984, т.140, с.73-76.
19. Качалов А.П. Применение "квазифотонов" для расчетов волновых полей в упругой среде. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1985, т.148, с.89-103.
20. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1978.
21. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., 1964.
22. Белишев М.И., Качалов А.П. Квазифотоны в динамической обратной задаче для управляемых римановых многообразий. Препринт ПОМИ Р-12-91, СПб., 1991, 50 с.

M.I.Belishev, A.P.Katchalov. Boundary controls and quasiphotons in a Riemannian manifold reconstruction problem via dynamical data.

The problem of reconstruction of a Riemannian manifold via it's dynamical Dirichlet to Newmann response operator is considered. The approach for solving the problem is based upon the boundary control theory method. The procedure of reconstruction uses nonstationary Gaussian beams (quasiphotons). The essential feature of the procedure is locality. The class of manifolds which may be reconstructed by this approach is described in terms of the boundary control theory. It includes for instance all analitical manifolds.