



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

M. M. Malamud, Some analogues of von-Heumann's inequality for J -contractions,
Zap. Nauchn. Sem. LOMI, 1987, Volume 157, 165–172

<https://www.mathnet.ru/eng/zns15215>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.86

April 19, 2025, 14:18:41



О НЕКОТОРЫХ АНАЛОГАХ НЕРАВЕНСТВА ДЖ.ФОН НЕЙМАНА ДЛЯ J -СЖАТИЙ

В спектральной теории операторов в гильбертовом пространстве H разнообразные приложения находит известное неравенство Дж.фон Неймана [1] (см. также [2-4]): $\|f(T)\| \leq \sup_{z \in D} |f(z)|$ для любого сжатия T ($\|T\| \leq 1$) и функции $f(z)$ аналитической в замыкании \bar{D} круга $D = \{z: |z| < 1\}$.

В заметке доказываются некоторые аналоги этого неравенства для J -сжатий ($J = J^* = J^{-1}$).

Будем придерживаться обычных обозначений: $[H]$ - множество линейных ограниченных операторов в H , $T_I = (T - T^*)/2i$, $T_R = (T + T^*)/2$ - мнимая и реальная части оператора T , $\rho(T)$ - резольвентное множество оператора T ; $\sigma(T)$ - его спектр; $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$, $\sigma_r(T)$ - соответственно точечный, непрерывный и остаточный спектры; C_J - совокупность всех J -сжатий: $T \in C_J \iff T \in [H]$ и $T^*J T - J \leq 0$.

1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $J = J^* = J^{-1}$, $B \in [H]$, $\|B\| < 1$, $BJ = JB$, и $1 \in \rho(B^*T)$. Тогда справедлива импликация: $T \in C_J \implies \Phi_B(T) \in C_J$, где

$$T_1 = \Phi_B(T) = (I - BB^*)^{-1/2} (T - B)(I - B^*T)^{-1} (I - B^*B)^{1/2}. \quad (1)$$

Если к тому же $-1 \in \rho(B^*T_1)$, то верна обратная импликация:

$$T_1 = \Phi_B(T) \in C_J \implies T \in C_J.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $D_B = (I - B^*B)^{1/2}$. Тогда

$$J - T_1^* J T_1 = D_B (I - T^*B)^{-1} K (I - B^*T)^{-1} D_B, \quad (2)$$

где

$$K = (I - T^*B) D_B^{-1} J D_B^{-1} (I - B^*T) - (T^* - B^*) D_B^{-1} J D_B^{-1} (T - B). \quad (3)$$

Из соотношений $B D_B^{-1} = D_B^{-1} B$, $B^* D_B^{-1} = D_B^{-1} B^*$, $D_B^{-1} J = J D_B^{-1}$ следуют равенства

$$T^* D_B^{-1} J D_B^{-1} B = T^* B D_B^{-1} J D_B^{-1}, \quad B^* D_B^{-1} J D_B^{-1} T = D_B^{-1} J D_B^{-1} B^* T, \\ B^* D_B^{-1} J D_B^{-1} B = J D_B^{-2} - J, \quad T^* B D_B^{-1} J D_B^{-1} B^* T = -T^* J T + T^* J D_B^{-2} T$$

с учетом которых выражение (3) для оператора K примет вид:
 $K = J - T^* J T$. Поэтому из (2)

$$J - T_1^* J T_1 = \mathcal{D}_B (I - T^* B)^{-1} (J - T^* J T) (I - B^* T)^{-1} \mathcal{D}_B , \quad (4)$$

что доказывает импликацию $T \in C_J \Rightarrow \Phi_B(J) \in C_J$. Обратная импликация (при условии $(-1) \in \rho(B^* T)$) следует теперь из равенства $T = \mathcal{D}_B^{-1} (T_1 + B) (I + B^* T_1) \mathcal{D}_B$. Предложение доказано. ●

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| < 1$, $f(z) = \vartheta_\alpha(z) = (a-z)(1-\bar{a}z)^{-1} |\alpha|^{-1} (\bar{\alpha})^{-1} \in \rho(T)$. Тогда верна импликация: $T \in C_J \Rightarrow f(\bar{T}) \in C_J$.

Напомним, что функцию $f(z) \in H^\infty(\mathbb{D})$ называют внутренней, если $|f(z)| = 1$ для п.в. $z \in \partial \mathbb{D} = \{z : |z| = 1\}$. Хорошо известно (см. [5, 3]), что $f(z) = g(z) B(z)$, где $B(z)$ - произведение Бляшке:

$$B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \vartheta_{\alpha_k}(z), \quad \vartheta_{\alpha_k}(z) = \frac{\alpha_k - z}{1 - \bar{\alpha}_k z} \frac{|\alpha|}{\alpha} . \quad (5)$$

$g(z) = \exp\left(\int_{\partial \mathbb{D}} \frac{z+\xi}{z-\xi} d\mu(\xi)\right)$ - сингулярная внутренняя функция.

Обозначим через \mathcal{H}_f область голоморфности функции f . Известно (см. [5]), что $B(z)$ сходится равномерно на любом замкнутом подмножестве $G \subset \mathbb{C} \setminus K_1$, где $K_1 = \text{clos}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (\bar{\alpha}_k)^{-1}\right)$ и, тем самым, $\mathcal{H}_{B(z)} = \mathbb{C} \setminus K_1$. Далее, $\mathcal{H}_{g(z)} = \mathbb{C} \setminus K_2$, где $K_2 = \text{supp } \mu$ - носитель меры.

ТЕОРЕМА I. Пусть $T \in C_J$, $f(z)$ внутренняя в круге \mathbb{D} функция, голоморфная на спектре $\sigma(T)$ оператора T (т.е. $\sigma(T) \subset \mathcal{H}_f$). Тогда $f(T) \in C_J$. Если же $f(z) \in H^\infty(\mathbb{D})$, но не является внутренней и $J \neq \pm I$, то $\exists T \in C_J$, что $\sigma(T) \subset \mathcal{H}_f$, но $f(T) \notin C_J$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произведений Бляшке $B(z)$ вида (5) утверждение следует из следствия I, мультипликативности класса C_J и его замкнутости в равномерной операторной топологии. Для доказательства в общем случае воспользуемся теоремой Фростмана ([3, 5]), в силу которой для п.в. $\lambda \in \mathbb{D}$ внутренняя функция $g_\lambda(z) = \vartheta_\lambda(f(z)) = (f(z) - \lambda)(1 - \bar{\lambda} f(z))^{-1}$ является произведением Бляшке и, следовательно, $g_\lambda(T) \in C_J$, если $T \in C_J$ и $\sigma(T) \subset \mathcal{H}_{g_\lambda}$. Далее, для произвольного (не обязательно лежащего в круге) компакта K , на котором функция f голоморфна, имеем

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \|f(z) - g_\lambda(z)\|_{L^\infty(K)} = 0. \quad (6)$$

Действительно, если $\|f\|_{L^\infty(K)} = M$ и $|\lambda| < (2M)^{-1}$, то

$$\left\| f(z) - \frac{f(z) - \lambda}{1 - \lambda f(z)} \right\|_{L^\infty(K)} = \sup_K \left| \frac{\lambda - \lambda f(z)^2}{1 - \lambda f(z)} \right| \leq \frac{1 + M^2}{|\lambda^{-1}| - M} \leq 2|\lambda|(1 + M^2) \quad (7)$$

и (6) следует из (7). Осталось заметить, что $\sigma(T) \subset \mathcal{A}_{g_\lambda}$, если $\sigma(T) \subset \mathcal{A}_f$ и $|\lambda|$ достаточно мал. Первая часть теоремы доказана.

Второе утверждение достаточно доказать для $H = C^2$, $J = \text{diag}(1, -1)$. Если $f(z) \in H^\infty(D)$ и не является внутренней, то \exists множество $E \subset \partial D$ положительной меры, на котором $\|f\|_{L^\infty(E)} < 1$ (или > 1). Тогда оператор $T = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \in C_J$ при $|\lambda_1| < 1$ и $|\lambda_2| < 1$. При $\lambda_2(\lambda_1)$ достаточно близком к E $|f(\lambda_2)| < 1$ ($|f(\lambda_1)| > 1$) и $f(T) = \text{diag}(f(\lambda_1), f(\lambda_2)) \notin C_J$. Теорема доказана. ●

2. Хорошо известно, что дробно-линейное преобразование

$$T = (JA - I)(JA + I)^{-1} \quad (8)$$

переводит m -аккретивные*) операторы A (у которых $-1 \in \rho(A)$) в операторы класса C_J . Если же A m -секториален (с вершиной в нуле и полууглом φ), то условие $\text{Re}(Af, f) \geq$

$\geq ctg \varphi |\text{Im}(Af, f)|$ трансформируется с учетом равенств

$$\text{Re}(A(I-T)f, (I-T)f) = ((J-T^*T)f, f) \quad \text{и} \quad \text{Im}(A(I-T)f, (I-T)f) = 2\text{Im}(JTf, f)$$

в условии (9) для оператора T .

ЛЕММА I. Пусть $\varphi \in [0, \pi/2]$, $T \in [H]$. Тогда следующие условия эквивалентны:

$$a) \quad 2 ctg \varphi |\text{Im}(JTf, f)| \leq ((J - T^*T)f, f) \quad (9)$$

$$b) \quad ctg \varphi |[(T - T^+)f, f]| \leq [(I - T^+T)f, f] \quad (10)$$

*) Оператор A называется m -аккретивным, если $\text{Re}(Af, f) \geq 0$ и $\rho(A) \neq \emptyset$ m -секториальным с вершиной в нуле и полууглом φ , если $\rho(A) \neq \emptyset$ и $\text{Re}(Af, f) \geq ctg \varphi |\text{Im}(Af, f)|$ ($\forall f \in \mathcal{D}(A)$).

$$в) T \sin \varphi \pm i \cos \varphi I \in C_J \quad (II)$$

$$г) 2 \operatorname{ctg} \varphi |(JT)_1 f, g| \leq \|(J-T^*JT)^{1/2} f\| \|(J-T^*JT)^{1/2} g\| \quad (I2)$$

$$д) 4 \operatorname{ctg} \varphi |(JT)_1 f, g| \leq ((J-T^*JT)f, f) + ((J-T^*JT)g, g). \quad (I3)$$

Доказательство очевидно.

Совокупность операторов $T \in [H]$, удовлетворяющих одному из эквивалентных условий леммы I, обозначим $C_J(\varphi)$. Ясно, что $C_J(\varphi_1) \subset C_J(\varphi_2)$ при $\varphi_1 < \varphi_2$ и, в частности, $\forall \varphi \in [0, \pi/2]$ $C_J(\varphi) \subset C_J \equiv C_J(\pi/2)$. В силу а), б) - класс $C_J(0)$ - совокупность J -эрмитовых сжатий.

Отметим два простых свойства класса $C_J(\varphi)$:

1) если $\varphi < \pi/2$, $T \in C_J(\varphi)$ и $|\alpha| = 1$, то $\alpha \in \sigma_p(T) \Rightarrow \alpha \in \sigma_p(T^*)$

2) если $\varphi < \pi/2$, $1 \in \rho(T)$ и $T \in C_J(\varphi)$, то* $T^* \in C_J(\varphi)$.

Свойство 1) следует из (I2), а свойство 2) из следующих тождеств

$$A + A^* = 2J(I-T)^{-1}(J-TJT^*)(I-T^*)^{-1}J$$

$$A - A^* = -2J(I-T)^{-1}(JT^* - TJ)(I-T^*)^{-1}J,$$

в которых $A = J(I+T)(I-T)^{-1}$ - m -секториальный оператор с вершиной в нуле и полууглом φ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $T_1, T_2 \in C_J(\varphi)$ и $T_1 T_2 = T_2 T_1$, то $T_1 T_2 \in C_J(\varphi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия $T_1 \in C_J(\varphi)$ и $T_2 \in C_J(\varphi)$ в силу (I3) ведут к неравенствам:

$$2 \operatorname{ctg} \varphi |(JT_1 - T_1^*J)T_2 f, f| \leq ((J-T_1^*JT_1)f, f) + ((J-T_1^*JT_1)T_2 f, T_2 f)$$

$$2 \operatorname{ctg} \varphi |(T_1^*(JT_2 - T_2^*J)f, f)| \leq ((J-T_2^*JT_2)f, f) + ((J-T_2^*JT_2)T_1 f, T_1 f).$$

Сложив их с учетом тождества $JT_1 T_2 - (T_1 T_2)^* J = (JT_1 - T_1^*J)T_2 + T_1^*(JT_2 - T_2^*J)$, придем к неравенству (9) для оператора $T_1 T_2$.

СЛЕДСТВИЕ. $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ верна импликация: $T \in C_J(\varphi) \Rightarrow T^n \in C_J(\varphi)$

ЛЕММА 2. Пусть $a = \bar{a}$, $|a| < 1$, $b_a(z) = (z - a)(1 - \bar{a}z)^{-1}$ и $a^{-1} \in \rho(T)$.

* Возможно, импликация $T \in C_J(\varphi) \Rightarrow T^* \in C_J(\varphi)$ верна без условия $1 \in \rho(T)$. При $\varphi = \pi/2$ это не так (см. [6]).

Тогда $\forall \varphi \in [0, \pi/2]$ справедлива импликация:

$$T \in C_J(\varphi) \Rightarrow T_1 = b_a(T) \in C_J(\varphi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из тождеств:

$$\begin{aligned} J - T_1^* J T &= (1 - |a|^2)(I - a T^*)^{-1} (J - T^* J T) (I - a T)^{-1} \\ \pm i(J T_1 - T_1^* J) &= \pm i(1 - |a|^2)(I - a T^*)^{-1} (J T - T^* J) (I - a T)^{-1}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3. Пусть $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$, $B_a(z) = b_a(z) \bar{b}_a(z)$ и $1/a, 1/\bar{a} \in \rho(T)$. Тогда $\forall \varphi \in [0, \pi/2]$ верна импликация:

$$T \in C_J(\varphi) \Rightarrow B_a(T) \in C_J(\varphi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся следующим представлением $B_a(z)$ через элементарные множители Бляшке: $B_a(z) = b_\alpha(z) \bar{b}_\alpha(z)$. Здесь

$$\begin{aligned} b_\alpha(z) &= (z - \alpha)(1 - \alpha z)^{-1}, \quad \alpha = \bar{\alpha} = (a + \bar{a})(1 + |a|^2)^{-1} \\ b_\beta(z) &= (z - \beta)(1 - \beta z)^{-1}, \quad \beta = \bar{\beta} = -|a|^2. \end{aligned}$$

Так как α и β вещественны, то утверждение следует из леммы 2 и предложения 2.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $T \in [H]$, $f(z)$ - внутренняя в круге функция, причем $f^\dagger(z) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{f(\bar{z})} = f(z)$. Если $A_f \supset \sigma(T)$, то $\forall \varphi \in [0, \pi/2]$ справедлива импликация: $T \in C_J(\varphi) \Rightarrow f(T) \in C_J(\varphi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произведений Бляшке $B(z) = B^\dagger(z) = \overline{B(\bar{z})}$ теорема следует из лемм 2, 3, предложения 2, и замкнутости (в равномерной операторной топологии) класса $C_J(\varphi)$. Из доказательства теоремы Фростмана, приведенного в [3, с. 77] видно, что можно выбрать вещественную последовательность $\lambda_n = \bar{\lambda}_n$, для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$ и $g_{\lambda_n}(z) = b_{\lambda_n}(f(z))$ - произведения Бляшке. В таком случае $g_{\lambda_n}(z) = g_{\lambda_n}^\dagger(z)$, ибо $f(z) = f^\dagger(z)$ и доказательство завершается также, как в теореме 1.

ЗАМЕЧАНИЕ. При $J = I$ заключение теоремы сохраняется для более широкого класса функций, а именно $\forall f(z) \in H^\infty(D)$ и таких, что $\|f(z)\|_{H^\infty(D)} \leq 1$. Для этого случая, т.е. для класса $C(\varphi)$ ($C(\varphi) \equiv C_I(\varphi)$) теорема доказана в [7]. Отметим еще,

что в скалярном случае ($\dim H = 1$) последнее утверждение означает следующее (аналог леммы Шварца): если $f(z) \in H^\infty(D)$ и отображает в себя круг D и отрезок $(-1, 1)$, то $f(z)$ отображает в себя также дуги $|z \sin \varphi \pm i \cos \varphi| \leq 1$ ($\forall \varphi \in (0, \pi/2)$).

3. Здесь будут приведены еще некоторые утверждения о классах $C_J(\varphi)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $B = B^*$, $\|B\| < 1$ и $\Phi_B(T)$ определено равенством (1). Тогда: $T \in C(\varphi) \Rightarrow \Phi_B(T) \in C(\varphi)$. Если же $J \neq I$ и $BJ = JB$, $BT = TB$ и $1 \in \rho(BT)$, то $\forall \varphi \in [0, \pi/2]$ верна импликация: $T \in C_J(\varphi) \Rightarrow \Phi_B(T) \in C_J(\varphi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (4) при $J = I$ получим:

$$I - \Phi_B(T)^* \Phi_B(T) = D_B (I - T^* B)^{-1} (I - T^* T) (I - B^* T)^{-1} D_B. \quad (14)$$

Далее, если $K = D_B (I - T^* B)^{-1}$, то

$$\begin{aligned} \Phi_B(T) - \Phi_B(T)^* &= K [(I - T^* B) D_B^{-2} (T - B) - (T^* - B) D_B^{-2} (I - BT)] K^* = \\ &= D_B (I - T^* B)^{-1} (T - T^*) (I - BT)^{-1} D_B. \end{aligned} \quad (15)$$

Импликация $T \in C(\varphi) \Rightarrow \Phi_B(T) \in C(\varphi)$ следует из (14), (15). Далее, если $[B, T] = 0$, то $\Phi_B(T) = (T - B)(I - BT)^{-1}$. Поэтому

$$J \Phi_B(T) - \Phi_B(T)^* J = D_B (I - BT)^{-1} (JT - T^* J) (I - T^* B)^{-1} D_B. \quad (16)$$

Импликация $T \in C_J(\varphi) \Rightarrow \Phi_B(T) \in C_J(\varphi)$ следует из (16) и (4).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $P^2 = P = P^*$, $Q = I - P$, $[J, P] = 0$ и $T \in [H]$, $[T, P] = 0$. Тогда $\forall \varphi \in [0, \pi/2]$ справедлива импликация:

$$T \in C_J(\varphi) \Rightarrow T_1 = TP + Q \in C_J(\varphi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из тождеств:

$$J - T_1^* J T = P (J - T^* J T) P, \quad J T_1 - T_1^* J = P (J T - T^* J) P.$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть выполнены условия предложения 4 и $f_1(z) = z^* P + Q$, $f_2(z) = \theta_a(z) P + Q$ — элементарные множители Бляшке-Потапова. Если $T \in C_J$, то $f_1(T) = T^* P + Q \in C_J$ и $f_2(T) = (T - a)(I - aT)^{-1} P + Q \in C_J$. Если же $a = \bar{a}$ и $T \in C_J(\varphi)$, то

$$f_1(T), f_2(T) \in C_T(\varphi) \quad (\forall \varphi \in [0, \pi/2]).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть^{*}) $J = P_+ - P_-$ (т.е. $\lambda P_{\pm} = I \pm J$)
 $(P_+ + P_- T)^{-1} \in [H]$. и $d(T) = (P_+ + P_+ T)(P_+ + P_- T)^{-1}$ - преобразование Потапова-Гинзбурга. Тогда $\forall \varphi \in [0, \pi/2]$ имеет место импликация: $T \in C_T(\varphi) \Rightarrow d(T) \in C(\varphi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из тождеств:

$$I - d(T)^* d(T) = (P_+ + T^* P_-)^{-1} (J - T^* J T) (P_+ + P_- T)^{-1}$$

$$d(T) - d(T)^* = (P_+ + T P_-)^{-1} (J T - T^* J) (P_+ + P_- T)^{-1}.$$

Предложение доказано.

Я признателен В.И.Мацаеву за интерес к работе, стимулировавший ее написание.

Литература

1. Нейман Ж. фон. Eine spectral Theorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes. - Math.Nachr., 1951, Bd.4, S.258-281.
2. Секефальви-Надь Б., Фойаш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. - М., 1970.
3. Никольский Н.К. Лекции об операторе сдвига. М., 1980.
4. Пеллер В.В. Аналог неравенства Дж. фон Неймана. - Тр. Мат.ин-та АН СССР, 1981, т.155, с.103-150.
5. Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций. М., 1963.
6. Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. Линейные операторы в пространствах с индефинитной метрикой. - Итоги науки и техники. Мат.анализ, 1979, т.17, с.113-205.
7. Колманович В.Ю., Маламуд М.М. Расширение спектральных операторов и дуальных пар сжатий. - 1985. Рукопись деп. в ВИНТИ, № 4428-85 Деп., 56 с.

^{*}) Как известно ([6]), если $T \in C_T$, то $\text{Ker}(P_+ + P_- T) = 0$ и $(P_+ + P_- T)H = (P_+ + P_- T)H$, т.е. условие: $(P_+ + P_- T)^{-1} \in [H]$ эквивалентно такому: $0 \notin \sigma_r(P_+ + P_- T)$. Известно также [6], что $T^* \in C_T \Rightarrow 0 \notin \sigma_r(P_+ + P_- T)$. Поэтому, если при $\varphi < \pi/2$ верно на импликация $T \in C_T(\varphi) \Rightarrow T^* \in C_T(\varphi)$, то условие $(P_+ + P_- T)^{-1} \in [H]$ излишне.

M.M.Malamud. Some analogues of von-Neumann's inequality for \mathcal{J} -contractions,

Summary

Let \mathcal{J} be a self-adjoint operator satisfying $\mathcal{J}^2 = \mathbb{I}$. We prove that for any \mathcal{J} -contraction T (i.e. $T^* \mathcal{J} T - \mathcal{J} \leq 0$) and any inner function f holomorphic on the spectrum of T the function $f(T)$ is a \mathcal{J} -contraction too. It is also proved that for $\mathcal{J} \neq \pm \mathbb{I}$ only inner functions f satisfy this property. We consider other analogues of von-Neumann's inequality.