



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Батищев, Возникновение вращения жидкости в пограничном слое Марангони в области локального охлаждения свободной границы,  
*Прикл. мех. техн. физ.*, 2018, том 59, выпуск 3, 26–35

<https://www.mathnet.ru/pmtf570>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.91

29 апреля 2025 г., 22:00:15



УДК 532.526

## ВОЗНИКНОВЕНИЕ ВРАЩЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ МАРАНГОНИ В ОБЛАСТИ ЛОКАЛЬНОГО ОХЛАЖДЕНИЯ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ

В. А. Батищев

Южный федеральный университет, 344090 Ростов-на-Дону, Россия  
E-mail: batishev-v@mail.ru

Исследована бифуркация вращения в стационарном осесимметричном термокапиллярном течении несжимаемой жидкости, заполняющей полубесконечное пространство, ограниченное свободной поверхностью, на которой задано неравномерное распределение температуры. Течение жидкости рассчитано с использованием уравнений Навье — Стокса в предположении малости коэффициентов диффузии. Показано, что в результате бифуркации при локальном охлаждении свободной границы вблизи оси симметрии и при наличии внешнего потока нагретой жидкости возникает вращательный режим в тонком пограничном слое Марангони, причем вне этого слоя вращение отсутствует. При локальном нагреве свободной границы вращение не обнаружено.

Ключевые слова: свободная граница, пограничный слой, охлаждение, бифуркация, термокапиллярный эффект, вращение.

DOI: 10.15372/PMTF20180303

**Введение.** Течения в пограничных слоях, возникающих вблизи свободной границы теплопроводной жидкости, интенсивно изучались во второй половине XX в. В случае малых значений коэффициентов диффузии при неравномерном нагреве свободной границы возникает термокапиллярное течение жидкости в тонком пограничном слое вблизи этой границы. Одной из первых работ, посвященных исследованию автомодельных решений, описывающих течения жидкости в пограничных слоях Марангони, является работа [1]. Исследованию свойств термокапиллярных течений жидкости посвящен цикл работ В. В. Пухначева и его учеников, в том числе работа, в которой выполнен групповой анализ уравнений нестационарного пограничного слоя Марангони [2]. Нелинейные пограничные слои, обусловленные поверхностными касательными напряжениями, могут возникать при ветровых нагрузках. В работе [3] исследовались автомодельные решения для нелинейного пограничного слоя в случае поверхностных волн, вызванных касательными напряжениями. Неравномерное распределение примеси на свободной границе также создает касательные напряжения, которые вызывают течение жидкости в концентрационном пограничном слое. В [4] исследована задача о возникновении вращения однородной жидкости в тонком слое, ограниченном снизу твердой стенкой, а сверху неравномерно нагретой свободной границей, причем толщина этого слоя имеет порядок толщины пограничного слоя Марангони. В работе [5] данная задача изучена для тонкого слоя неоднородной жидкости

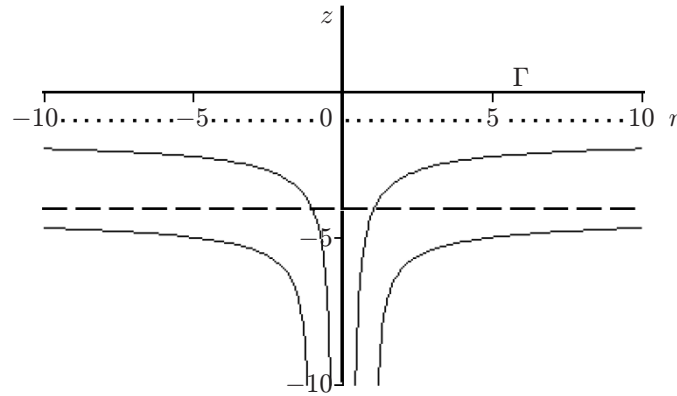


Рис. 1. Схема течения жидкости в цилиндрических координатах  $r, \theta, z$ : штриховая линия — граница пограничного слоя, пунктирная — граница слоя жидкости, принадлежащего области пограничного слоя, сплошные линии — линии тока

в приближении Обербека — Буссинеска. В настоящей работе рассмотрено стационарное осесимметричное течение однородной жидкости в полуплоскости, ограниченной свободной границей с неравномерным распределением температуры. Предполагается, что вне возникающего пограничного слоя Марангони скорость жидкости имеет такой же порядок, как и в пограничном слое. Показано, что в результате бифуркации основного режима при локальном охлаждении свободной границы и различной скорости внешнего потока вращательный режим может возникать в пограничном слое, вне которого вращение отсутствует. При локальном нагреве свободной поверхности бифуркации вращения не обнаружено.

**1. Уравнения движения.** Рассматривается осесимметричное стационарное течение однородной несжимаемой жидкости в полубесконечном пространстве, ограниченном свободной границей  $\Gamma$ , вдоль которой задано неравномерное распределение температуры (рис. 1). Для описания течения жидкости используются система уравнений Навье — Стокса и уравнение теплопроводности в случае малых значений диффузионных коэффициентов вязкости  $\nu$  и температуропроводности  $\chi$ :

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} &= -\rho^{-1}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{g}, \\ (\mathbf{v}, \nabla)T &= \chi\Delta T, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta, v_z)$  — вектор скорости;  $p$  — давление;  $T$  — температура жидкости;  $\rho$  — плотность;  $\mathbf{g} = (0, 0, -g_t)$ ;  $g_t$  — ускорение свободного падения. Задача решается в цилиндрических координатах  $r, \theta, z$ . Предполагается, что коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$  линейно зависит от температуры:  $\sigma = \sigma_0 - |\sigma_T|(T - T_*)$  ( $\sigma_0, |\sigma_T|, T_*$  — известные постоянные). Свободная граница  $\Gamma$  считается недеформируемой. На свободной поверхности выполняются динамические условия для касательных напряжений и кинематическое условие, а также задана температура  $T_\Gamma$ :

$$\begin{aligned} 2\nu\rho(\Pi\mathbf{n} - (\mathbf{n}\Pi\mathbf{n})\mathbf{n}) &= \nabla_\Gamma\sigma, \\ \mathbf{v}\mathbf{n} &= 0, \quad T = T_\Gamma(r, z), \quad (r, z) \in \Gamma. \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к свободной границе  $\Gamma$ ;  $\Pi$  — тензор скоростей деформации;  $\nabla_\Gamma$  — оператор градиента вдоль границы  $\Gamma$ . Полагается, что в окрестности оси симметрии температура свободной границы изменяется по квадратичному закону  $T_\Gamma = T_\infty + 0,5\tau T_\infty(r^2/L^2 - 1)$  при  $r \leq L$  и  $T_\Gamma = T_\infty$  при  $r \geq L$  ( $r$  — радиальная координата;  $T_\infty$  — средняя постоянная температура слоя жидкости;  $L$  — радиус окружности, внутри

которой температура меняется по квадратичному закону; параметр  $\tau$  характеризует изменение температуры свободной границы вблизи оси симметрии, т. е. амплитуду отклонения температуры  $T_\Gamma$  на границе от среднего значения  $T_\infty$ ). При  $\tau > 0$  свободная поверхность неравномерно охлаждается вблизи оси симметрии. Температура границы увеличивается при увеличении расстояния от оси симметрии при  $r \leq L$ . При  $\tau < 0$  свободная граница неравномерно нагрета при  $r \leq L$ .

Температура жидкости стремится к постоянному значению  $T_\infty$ , а поле скоростей ограничено при увеличении расстояния от свободной границы в случае  $z \rightarrow -\infty$ .

Уравнения движения и краевые условия записываются в безразмерных переменных, в качестве масштабов длины, скорости, давления и температуры выбираются параметры  $L$ ,  $u$ ,  $\rho u^2$ ,  $T_\infty$ , причем масштаб скорости определяется по формуле

$$u = (|\sigma_T|^2 T_\infty^2 L^{-1} \nu^{-1} \rho^{-2})^{1/3}.$$

Далее вводится параметр  $\varepsilon$  по формуле

$$\varepsilon = (\rho \nu^2 L^{-1} T_\infty^{-1} |\sigma_T|^{-1})^{1/3}.$$

Заметим, что масштаб скорости  $u$  и параметр  $\varepsilon$  находятся в результате сравнения порядков величин в уравнениях Навье — Стокса и в краевых условиях при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

При малых значениях параметра  $\varepsilon$  вблизи свободной границы формируется пограничный слой Марангони, обусловленный поверхностными касательными напряжениями. Толщина этого слоя имеет порядок  $O(\varepsilon)$ . Вне слоя в первом приближении течение жидкости является невязким и описывается уравнениями Эйлера. Рассматривается случай, когда скорость жидкости в пограничном слое и скорость внешнего невязкого течения  $\mathbf{v}_0 = (v_{r0}, v_{\theta 0}, v_{z0})$  имеют одинаковый порядок  $u$ . Невязкое течение полагается незакрученным, т. е.  $v_{\theta 0} = 0$ .

Ниже показано, что вблизи оси симметрии при локальном охлаждении свободной границы возникает вращательное движение жидкости внутри пограничного слоя, причем вне этого слоя вращение отсутствует.

**2. Асимптотические приближения.** Задача решается с использованием метода пограничного слоя при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Поместим начало системы координат на свободную поверхность на оси симметрии (см. рис. 1). Введем растянутую переменную  $s$  по формуле  $s = z/\varepsilon$ . Построим асимптотические разложения решения задачи в виде рядов по степеням малого параметра:

$$\begin{aligned} v_r &= v_{r0} + h_{r0} + \varepsilon(h_{r1} + v_{r1}) + \dots, & v_z &= v_{z0} + \varepsilon(h_{z1} + v_{z1}) + \dots, \\ v_\theta &= h_{\theta 0} + \varepsilon h_{\theta 1} + \dots, & T &= 1 + \theta_0 + \varepsilon(T_1 + \theta_1) + \dots \end{aligned}$$

Аналогичный ряд строится для давления. Функции  $h_{r0}$ ,  $h_{r1}$ ,  $h_{z1}$ ,  $h_{\theta 0}$ ,  $h_{\theta 1}$ ,  $\theta_0$ ,  $\theta_1$  зависят от переменных  $s$ ,  $r$ , локализованы в области пограничного слоя  $D_\Gamma$  и исчезают при выходе из него ( $s \rightarrow -\infty$ ). Функции  $v_{r0}$ ,  $v_{z0}$ ,  $v_{r1}$ ,  $v_{z1}$ ,  $T_1$  (“внешнее” решение) описывают течение жидкости вне области пограничного слоя. Функции  $v_{r0}$ ,  $v_{z0}$  определяются из уравнений Эйлера и описывают незакрученное течение идеальной жидкости. Из условия  $h_{\theta 0} \rightarrow 0$  ( $s \rightarrow -\infty$ ) следует, что при выходе из области пограничного слоя  $D_\Gamma$  вращение пограничного слоя не вызывает вращения жидкости вне  $D_\Gamma$ .

Подставляя асимптотические разложения в систему Навье — Стокса и приравнивая к нулю суммы коэффициентов порядка  $O(1)$ , получаем уравнения пограничного слоя в главном приближении

$$\begin{aligned} h_{r0} \frac{\partial h_{r0}}{\partial r} + h_{z1} \frac{\partial h_{r0}}{\partial s} - \frac{h_{\theta 0}^2}{r} + \frac{\partial}{\partial r} (a h_{r0}) + (b + cs) \frac{\partial h_{r0}}{\partial s} &= \frac{\partial^2 h_{r0}}{\partial s^2}, \\ h_{r0} \frac{\partial h_{\theta 0}}{\partial r} + h_{z1} \frac{\partial h_{\theta 0}}{\partial s} + \frac{h_{r0} h_{\theta 0}}{r} + \frac{a}{r} \frac{\partial (r h_{\theta 0})}{\partial r} + (b + cs) \frac{\partial h_{\theta 0}}{\partial s} &= \frac{\partial^2 h_{\theta 0}}{\partial s^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_{r0}}{\partial r} + \frac{h_{r0}}{r} + \frac{\partial h_{z1}}{\partial s} &= 0, \\ h_{r0} \frac{\partial \theta_0}{\partial r} + h_{z1} \frac{\partial \theta_0}{\partial s} + a \frac{\partial \theta_0}{\partial r} + (b + cs) \frac{\partial \theta_0}{\partial s} &= \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial s^2} \end{aligned} \quad (1)$$

(Pr — число Прандтля). Коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  определяются значением поля скорости внешнего течения жидкости на свободной границе:

$$a = v_{r0}|_{\Gamma}, \quad b = v_{z1}|_{\Gamma}, \quad c = \frac{\partial v_{z0}}{\partial z}|_{\Gamma}.$$

Для системы (1) приведем краевые условия

$$\begin{aligned} s = 0: \quad \frac{\partial h_{r0}}{\partial s} &= -\frac{\partial T_{\Gamma}}{\partial r}, \quad h_{z1} + b = 0, \quad \frac{\partial h_{\theta 0}}{\partial s} = 0, \quad \theta_0 = T_{\Gamma} - 1, \\ s \rightarrow -\infty: \quad h_{r0} &\rightarrow 0, \quad h_{z1} \rightarrow 0, \quad h_{\theta 0} \rightarrow 0, \quad \theta_0 \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2)$$

В предположении, что вне области пограничного слоя заданы компоненты  $v_{r0}$ ,  $v_{z0}$  поля скоростей внешнего невязкого незакрученного течения, коэффициенты  $a(r)$ ,  $c(r)$  в уравнениях (1) однозначно определены. Например, если течение идеальной жидкости вблизи границы  $\Gamma$  задано полем скоростей  $v_{r0} = Ur$ ,  $v_{z0} = -2Uz$ ,  $v_{\theta 0} = 0$ , то  $a = Ur$ ,  $c = -2U$ . При решении краевой задачи (1), (2) неизвестный коэффициент  $b(r)$  исключается путем введения новой функции  $H_z = h_{z1} + b + cs$ , при этом также исключается функция  $h_{z1}$ . После решения полученной задачи коэффициент  $b(r)$  определяется однозначно по формуле  $b(r) = \lim_{s \rightarrow -\infty} (H_z - cs)$ . Заметим, что коэффициент  $b(r)$  задает кинематическое краевое условие на свободной границе в задаче о расчете в первом приближении  $v_{r1}$ ,  $v_{z1}$  внешнего течения.

В пограничном слое введем радиальную компоненту  $H_r$  вектора скорости в главном приближении по формуле  $H_r = h_{r0} + a$ . Функции  $H_r$ ,  $H_z$  и компонента  $h_{\theta 0}$  удовлетворяют системе уравнений пограничного слоя Прандтля с краевыми условиями на свободной границе ( $s = 0$ ) для касательных напряжений  $\partial H_r / \partial s = -\partial T_{\Gamma} / \partial r$ ,  $\partial h_{\theta 0} / \partial s = 0$  и условием непротекания  $H_z = 0$ .

С учетом квадратичного закона распределения температуры на свободной границе, который в безразмерных переменных принимает вид  $T = 1 + 0,5\tau(r^2 - 1)$  при  $r < 1$ , построим решение задачи (1), (2) вблизи оси симметрии. Предположим, что радиальная компонента скорости идеальной жидкости на свободной границе вблизи оси симметрии линейно зависит от радиальной координаты:  $v_{r0}|_{\Gamma} = Ur$  ( $U \geq 0$ ). Заметим, что такому значению скорости на недеформируемой границе  $\Gamma$  соответствует поле скоростей невязкой жидкости в окрестности этой границы:  $v_{r0} = Ur$ ,  $v_{z0} = -2Uz$ ,  $v_{\theta 0} = 0$ .

Решение уравнений пограничного слоя вблизи оси симметрии будем строить в виде

$$h_{r0} = rH'(\eta), \quad h_{z1} = 2H(\eta) - b, \quad h_{\theta 0} = rG(\eta),$$

где  $\eta = -s$ . Данное решение описывает течение жидкости в пограничном слое только при малых значениях радиальной координаты и несправедливо при  $r > 1$ . Функции  $H$ ,  $G$  зависят от параметров  $U$ ,  $\tau$ . Для функций  $H(\eta)$ ,  $G(\eta)$  из (1), (2) выводим краевую задачу

$$\begin{aligned} H''' &= H'^2 + 2UH' - 2H''(H + \eta U) - G^2, \quad G'' = 2(H' + U)G - 2(H + \eta U)G', \\ H(0) &= 0, \quad H''(0) = \tau, \quad G'(0) = 0, \quad H'(+\infty) = 0, \quad G(+\infty) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

После решения задачи (3) функция  $v_{z1}|_{\Gamma}$  находится по формуле  $v_{z1}|_{\Gamma} = 2H(+\infty)$ .

Главное приближение температуры жидкости в области пограничного слоя определяется формулой  $T = 1 + \theta_0 + O(\varepsilon)$ . Функцию  $\theta_0$  представим в виде суммы  $\theta_0 = r^2\theta_{00}(\eta) + \theta_{01}(\eta)$ . Функции  $\theta_{00}$ ,  $\theta_{01}$  определяются путем решения краевых задач

$$\begin{aligned} \theta_{00}'' &= 2\text{Pr}((H' + U)\theta_{00} - (H + \eta U)\theta_{00}'), \quad \theta_{01}'' = -2\text{Pr}(H + \eta U)\theta_{01}', \\ \theta_{00}(0) &= \tau/2, \quad \theta_{01}(0) = -\tau/2, \quad \theta_{00}(+\infty) = \theta_{01}(+\infty) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

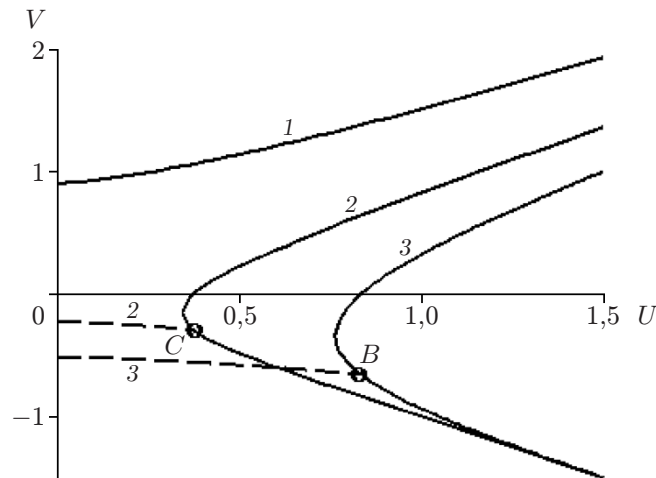


Рис. 2. Зависимость  $V(U)$  на свободной границе при различных значениях параметра  $\tau$ :

сплошные кривые — режимы течения первого типа (без вращения), штриховые — режимы течения второго типа, различающиеся направлением вращения; 1 —  $\tau = -1,0$ , 2 —  $\tau = 0,3$ , 3 —  $\tau = 1,0$

**3. Результаты численных расчетов.** Краевые задачи (3), (4) решались численно с использованием метода пристрелки и пакета Matlab при  $Pr = 7$ . Заметим, что решение задачи (3) для различных положительных значений параметра  $\tau$  можно получить, решив эту задачу при  $\tau = 1$ , а затем выполнив перерасчет полученного решения по формулам

$$H(\eta) = \tau^{1/3} H_1(\xi), \quad G(\eta) = \tau^{2/3} G_1(\xi), \quad U = \tau^{2/3} U_1, \quad \xi = \tau^{1/3} \eta, \quad (5)$$

где функции  $H_1$ ,  $G_1$  и параметр  $U_1$  соответствуют решению задачи (3) при  $\tau = 1$ .

Введем параметр  $V = H'(0) + U$ , пропорциональный радиальной компоненте вектора скорости вязкой жидкости на свободной границе в главном приближении. На рис. 2 приведена зависимость параметра  $V$  от параметра  $U$ , пропорционального скорости идеальной жидкости на свободной границе, при различных значениях параметра  $\tau$ . Режимы течений жидкости делятся на два типа: к первому типу относятся режимы течений в отсутствие вращения ( $v_\theta = 0$ ), ко второму типу — течения жидкости с вращением (вторичные режимы). Кривая 1 на рис. 2 рассчитана для случая нагрева свободной границы при  $\tau = -1$ . Видно, что скорость вязкой жидкости на свободной границе монотонно увеличивается при увеличении параметра  $U$ . Кривые 2, 3 рассчитаны для случая охлаждения свободной границы при  $\tau = 0,3$ ,  $\tau = 1,0$ . При  $\tau > 0$  режимы в отсутствие вращения существуют только в случае  $U \geq U_m$ . С учетом (5) получаем  $U_m \approx 0,7651\tau^{2/3}$ . При  $\tau = 0,3; 1,0$  данные значения  $U_m$  соответствуют “вершинам” кривых 2, 3. Для каждого значения  $U$  при  $U > U_m$  найдено по два решения первого типа, которые различаются формой профиля скорости. При  $U = U_m$  эти решения совпадают, а при  $U < U_m$  — исчезают. При  $U_m < U < U_0$  профили скоростей каждого из двух решений имеют зоны противотока ( $U_0 \approx 0,8344\tau^{2/3}$  — значение параметра  $U$ , при котором  $V = 0$ ). В течениях первого типа при  $V > 0$  зона противотока отсутствует, при  $V < 0$  присутствует зона противотока, примыкающая к свободной границе. В зоне противотока радиальная компонента скорости направлена к оси симметрии.

На рис. 3 показана зависимость функции  $V_r = H_r/r$ , пропорциональной радиальной компоненте скорости в главном приближении, от поперечной координаты в пограничном слое при  $U = 0,8$ ,  $U = 0$ . Кривые 1–3 соответствуют решениям первого типа. Кривая 1

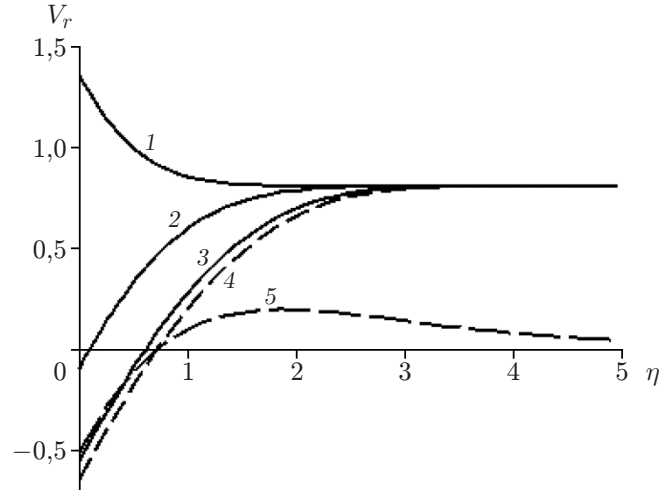


Рис. 3. Зависимость  $V_r(\eta)$  в пограничном слое при различных значениях  $U$ ,  $\tau$ : сплошные кривые — режимы течения первого типа (1 —  $\tau = -1$ ,  $U = 0,8$ ; 2, 3 — решения нелинейной задачи при  $\tau = 1$ ,  $U = 0,8$ ), штриховые кривые — режимы течения второго типа (4 —  $\tau = 1$ ,  $U = 0,8$ , 5 —  $\tau = 1$ ,  $U = 0$ )

соответствует нагреву свободной границы при  $\tau = -1$ ,  $U = 0,8$ . Кривые 2, 3 — профили скоростей для двух различных решений, полученных при  $U = 0,8$ ,  $\tau = 1$  в случае локального охлаждения границы. Оба решения имеют зону противотока вблизи свободной границы. Заметим, что у перечисленных выше решений при  $U = 0,8$  радиальная компонента скорости либо монотонно уменьшается при  $\tau = -1$ , либо монотонно увеличивается при  $\tau = 1$  при увеличении расстояния от свободной границы и стремится к предельному значению  $V_r = 0,8$  при  $\eta \rightarrow \infty$ . Кривые 4, 5 описывают режимы течений жидкости с вращением при  $U = 0,8$ ,  $U = 0$ ,  $\tau = 1$  в случае локального охлаждения границы. Видно, что имеются зоны противотока и профиль скорости при  $U = 0$  является немонотонным. Отсутствие монотонности радиальной компоненты скорости в сечении пограничного слоя проявляется в случае малых значений параметра  $U$  при  $\tau > 0$ .

**4. Бифуркация решений. Вторичные режимы.** Решения первого типа при  $\tau > 0$  отсутствуют при скоростях внешнего потока, удовлетворяющих неравенству  $U < U_m$ . При таких значениях параметра  $U$  существуют решения, описывающие течение жидкости с вращением в пограничном слое. Решения, описывающие режимы с вращением, ответвляются от решений, описывающих режимы первого типа, в точках бифуркации. Точки ветвления находятся при численном решении задачи на собственные значения, которая получается путем линеаризации задачи (3), (4) вблизи решения, описывающего режимы первого типа  $H$ ,  $\theta_{00}$ ,  $\theta_{01}$ , и принимает вид

$$f_0^{(3)} = 2(H' + U)f_0' - 2H''f_0 - 2(H + \eta U)f_0''; \quad (6)$$

$$g_0'' = 2(H' + U)g_0 - 2(H + \eta U)g_0'; \quad (7)$$

$$\theta_{b0}'' = 2\text{Pr}(f_0'\theta_{00} - f_0\theta_{00}' + (H' + U)\theta_{b0} - (H + \eta U)\theta_{b0}'); \quad (8)$$

$$\theta_{b1}'' = -2\text{Pr}(f_0\theta_{01}' + (H + \eta U)\theta_{b1}'); \quad (9)$$

$$f_0(0) = f_0''(0) = \theta_{b0}(0) = \theta_{b1}(0) = g_0'(0) = 0, \quad (10)$$

$$f_0'(+\infty) = \theta_{b0}(+\infty) = \theta_{b1}(+\infty) = g_0(+\infty) = 0.$$

Краевая задача (6)–(10), а также вторичные режимы рассчитывались численно методом пристрелки с использованием пакета Matlab. Рассмотрим случай  $\tau > 0$ . При решении

краевой задачи (6)–(10) сначала путем решения однородной краевой задачи, состоящей из уравнения (7) и краевых условий (10) для функции  $g_0$ , находится собственная функция  $g_0$  и собственное число  $U_*$ . Собственную функцию представим в виде  $g_0 = c_0 g_*(\eta)$  ( $c_0$  — произвольная постоянная, не равная нулю). Принимая для функции  $g_*$  условие нормировки  $g_*(0) = 1$ , получаем  $U_* \approx 0,8355\tau^{2/3}$ . Численные расчеты показывают, что функция  $g_*(\eta)$  на интервале  $[0, +\infty)$  монотонно убывает при увеличении переменной  $\eta$  и стремится к нулю при  $\eta \rightarrow +\infty$ . Далее, при  $U = U_*$  определяется функция  $f_0$  из краевой задачи, включающей уравнение (6) и краевые условия для  $f_0$  (10). Численные расчеты показывают, что  $f_0 = 0$  при  $U = U_*$ . По аналогии получаем  $\theta_{b0} = 0$ ,  $\theta_{b1} = 0$  при  $U = U_*$ . При  $\tau < 0$  собственных значений параметра  $U$  не найдено.

Результаты расчетов режимов второго типа (с вращением жидкости) показаны на рис. 2, 3 штриховыми линиями. При каждом положительном значении параметра  $\tau$  и  $U < U_*$  найдено по два таких режима, которые различаются только направлением вращения. На рис. 2 точки  $B$  и  $C$  являются точками ветвления соответственно для  $\tau = 1$ ,  $\tau = 0,3$ . Окружная компонента скорости в главном приближении  $h_{\theta 0}$  монотонно уменьшается и стремится к нулю при увеличении расстояния от свободной границы. Максимальное значение этой компоненты достигается на свободной границе и с увеличением параметра  $\tau$  увеличивается по степенному закону. При  $\tau > 0$  краевая задача (3), (4) при  $U \geq U_*$  имеет два решения первого типа, при  $U_m < U < U_*$  — четыре решения, два из которых являются решениями первого типа, два — решениями второго типа. При  $0 \leq U < U_m$  найдены только два режима с вращением. При  $U = U_m$  рассчитаны три режима, два из которых являются режимами второго типа.

Величина теплового потока на свободной границе  $\Gamma$  определяется по формуле  $q = -\lambda \partial T / \partial z|_{\Gamma}$ , которую преобразуем к виду  $q = q_* Q(r, U, \tau)$  ( $\lambda$  — теплопроводность). Размерный параметр  $q_*$  определим по формуле  $q_* = \lambda T_*/(\varepsilon L)$ , безразмерную функцию  $Q(r, U, \tau)$  представим в виде  $Q = r^2 \theta'_{00}(0) + \theta'_{01}(0)$ . При расчете величины теплового потока на свободной границе сначала численно решается краевая задача (3), затем краевая задача (4) для определения поля температур в пограничном слое. В результате находятся значения производных  $\theta'_{00}(0)$ ,  $\theta'_{01}(0)$  на свободной границе и далее вычисляется функция  $Q$ , определяющая величину теплового потока на поверхности  $\Gamma$ . На рис. 4 приведена зависимость функции  $Q$  от параметра  $U$  при  $\tau = 1$ ,  $r = 0,3$ . Точкой  $B$  обозначена точка бифуркации. Видно, что при уменьшении параметра  $U$  от значения  $U_*$  до нуля величина теплового потока в случае вторичного режима незначительно уменьшается и при  $U = 0$  достигает минимума. При  $U < 0$  вторичные режимы не рассчитывались.

Обозначим через  $W$  параметр, пропорциональный окружной компоненте скорости на свободной границе в главном приближении  $W = h_{\theta 0}/r|_{\Gamma}$ . На рис. 5 приведена зависимость параметра  $W$  от параметра  $U$  для вторичных режимов. Каждому значению параметра  $U$  при  $U < U_*$  соответствуют два симметричных вторичных режима со значениями  $\pm|W|$ . Точками  $B$ ,  $C$  обозначены точки бифуркации. Видно, что при увеличении параметра  $U$  от нуля до значения  $U_*$  модуль окружной компоненты скорости точек свободной границы монотонно уменьшается до нуля. Заметим, что в отсутствие внешнего потока  $|W|$  вычисляется по формуле  $|W||_{U=0} \approx 1,0659\tau^{2/3}$ .

**5. Асимптотика вторичных режимов вблизи точки бифуркации.** Обозначим через  $H_*$ ,  $\theta_0^*$ ,  $\theta_1^*$ ,  $U_*$  значения в точке бифуркации функций  $H$ ,  $\theta_{00}$ ,  $\theta_{01}$  и параметра  $U$ , описывающих решения первого типа. В малой окрестности точки бифуркации введем параметр  $\varepsilon_1 = G(0)$ , где  $G(0)$  — функция параметров  $\tau$  и  $U$ , которая обращается в нуль в точке бифуркации при  $U = U_*$ . Величина  $G(0)$  пропорциональна амплитуде окружной компоненты скорости в случае вторичного режима на свободной границе. Очевидно, что при  $U \rightarrow U_*$  параметр  $\varepsilon_1$  является малым. Введем параметр  $\delta = U_* - U$ , который вблизи



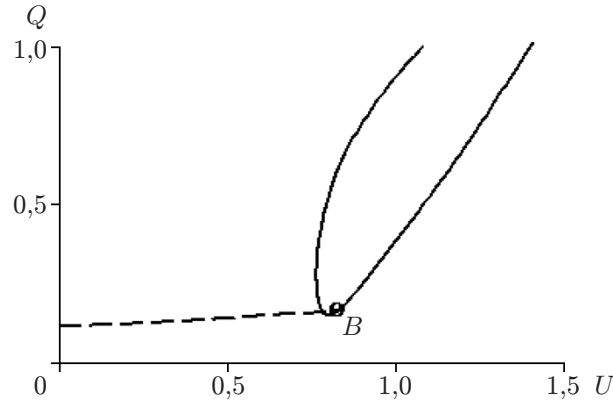


Рис. 4. Зависимость  $Q(U)$  на свободной границе при  $\tau = 1, r = 0,3$ : сплошная кривая — режим течения первого типа, штриховая — режим течения второго типа

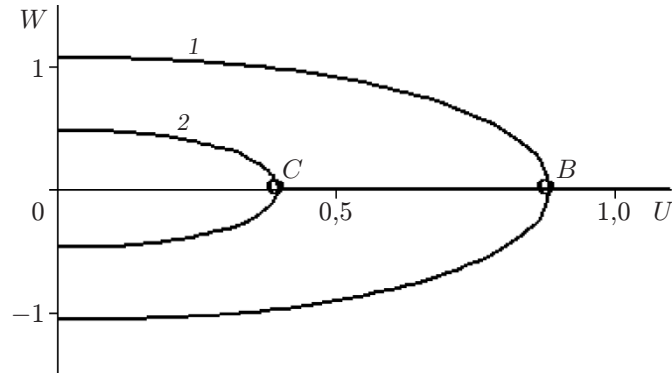


Рис. 5. Зависимость  $W(U)$  на свободной границе для режимов второго типа при различных значениях  $\tau$ : 1 —  $\tau = 1,0$ , 2 —  $\tau = 0,3$

точки бифуркации также является малым. Решение краевой задачи (3), (4) находим по формулам

$$H = H_* + f, \quad G = \varepsilon_1 g, \quad \theta_{00} = \theta_0^* + \theta_0^0, \quad \theta_{01} = \theta_1^* + \theta_0^1.$$

Используя соотношение  $\varepsilon_1 = G(0)$ , получаем краевое условие для функции  $g(\eta)$  на свободной границе  $g(0) = 1$ .

Введем операторы

$$L = D^3 - 2(H_*' + U_*)D + 2(H_* + \eta U_*)D^2 + 2H_*''E, \\ K = D^2 - 2(H_*' + U_*)E + 2(H_* + \eta U_*)D$$

( $D = d/d\eta$  — оператор дифференцирования;  $E$  — единичный оператор).

Приведем краевую задачу для определения функций  $f$  и  $g$ :

$$Lf = 2\delta(-f' + \eta f'' - H_*' + \eta H_*'') + f'^2 - 2ff'' - \varepsilon_1^2 g^2, \\ Kg = 2\delta(\eta g' - g) + 2f'g - 2g'f, \tag{11}$$

$$f(0) = 0, \quad f''(0) = 0, \quad g'(0) = 0, \quad f'(+\infty) = 0, \quad g(+\infty) = 0.$$

Дополнительное условие  $g(0) = 1$  связывает малые параметры  $\varepsilon_1^2$  и  $\delta$ . В задачу (11) параметр  $\varepsilon_1$  входит в виде квадратичной функции  $\varepsilon_1^2$ . Предположим, что функцию  $\varepsilon_1^2$  можно представить в виде асимптотического ряда по степеням  $\delta$ :

$$\varepsilon_1^2 = \delta V_1 + \delta^2 V_2 + \dots, \quad \delta \rightarrow 0. \tag{12}$$

Решения краевой задачи (11) построим в виде асимптотических рядов по степеням параметра  $\delta$

$$f = \delta f_1 + \delta^2 f_2 + \dots, \quad g = g_* + \delta g_1 + \delta^2 g_2 + \dots, \quad \delta \rightarrow 0. \quad (13)$$

Для функций  $g_k$  определим начальные условия  $g_k(0) = 0$  ( $k \geq 1$ ). Функция  $g_*$  представляет собой нормированную собственную функцию краевой задачи (6)–(10), удовлетворяющую условию  $g_*(0) = 1$ . Для определения функции  $f_1$  приведем краевую задачу

$$L f_1 = F_1, \quad f_1(0) = 0, \quad f_1''(0) = 0, \quad f_1'(+\infty) = 0. \quad (14)$$

Правая часть уравнения в (14) задается формулой

$$F_1 = 2\eta H_*'' - 2H_*' - V_1 g_*^2.$$

Функция  $g_1$  в (13) находится после определения функции  $f_1$  и удовлетворяет краевой задаче

$$K g_1 = 2(\eta g_*' - g_* + f_1' g_* - f_1 g_*'), \quad g_1'(0) = 0, \quad g_1(+\infty) = 0. \quad (15)$$

Дополнительное условие  $g_1(0) = 0$  служит для нахождения параметра  $V_1$ .

При численном интегрировании задач (14), (15) функцию  $f_1$ , зависящую от неизвестного параметра  $V_1$ , следует представить в виде суммы  $f_1 = f_{11}(\eta) + V_1 f_{12}(\eta)$ . Функции  $f_{11}$ ,  $f_{12}$  не зависят от параметра  $V_1$  и определяются из краевой задачи (14), в которой следует положить соответственно  $F_1 = 2\eta H_*'' - 2H_*'$  в случае  $f_1 = f_{11}$  и  $F_1 = -g_*^2$  при  $f_1 = f_{12}$ . Путем численного расчета при  $\tau = 1$  получаем значения производных  $f_{11}'(0) \approx 3,3031$ ,  $f_{12}'(0) \approx -0,7108$ . Функция  $f_{11}(\eta)$  монотонно возрастает при увеличении расстояния от свободной границы и при выходе из области пограничного слоя стремится к конечному предельному значению. Функция  $f_{12}(\eta)$  монотонно уменьшается при увеличении  $\eta$  и при  $\eta \rightarrow \infty$  стремится к конечному предельному значению. Выполняя условие разрешимости [6] краевой задачи (15), получаем выражение для параметра  $V_1$

$$V_1 = -I_1/I_0, \quad (16)$$

где

$$I_0 = \int_0^{\infty} (f_{12}' g_* - f_{12} g_*') \varphi(\eta) d\eta, \quad I_1 = \int_0^{\infty} (g_*'(\eta - f_{11}) + g_*(f_{11}' - 1)) \varphi(\eta) d\eta,$$

функция  $\varphi(\eta)$  определяется из краевой задачи  $K_* \varphi = 0$ ,  $\varphi'(0) = \varphi(+\infty) = 0$ ;  $K_* = D^2 - 4(H_*' + U_*)E - 2(H_* + \eta U_*)D$ . Используя результаты численных расчетов по формуле (16), для параметра  $V_1$  получаем формулу  $V_1 \approx 2,8759\tau^{2/3}$ . При определении параметра  $V_1$  по формуле (16) не требуется решать краевую задачу (15). Значения  $V_1$ , полученные при численном решении задачи (15) методом пристрелки, и значения  $V_1$ , полученные по формуле (16), совпадают.

Результаты расчетов показывают, что функция  $f_1(\eta)$  является положительной, имеет один экстремум (максимум) на интервале  $[0, +\infty)$  и стремится к конечному пределу на бесконечности. Функция  $g_1(\eta)$  также является положительной, имеет один экстремум (максимум) на полуоси  $\eta > 0$  и стремится к нулю при  $\eta \rightarrow +\infty$ .

Используя формулу (12), получаем соотношение для параметров  $\varepsilon_1$ ,  $\delta$  в главном приближении

$$\varepsilon_1 = \pm \sqrt{\delta V_1} + O(\delta), \quad \delta \rightarrow 0,$$

откуда следует, что в точке бифуркации от решения первого типа ответвляются два решения, описывающие вторичные режимы, которые различаются направлением вращения. Вторичные режимы существуют только при  $U < U_*$ .

**Заключение.** В работе показано, что при локальном охлаждении свободной границы нагретой жидкости возникает вращение жидкости в пограничном слое Марангони, причем вне этого слоя вращение отсутствует. Вращательный эффект возникает в результате бифуркации основного стационарного осесимметричного режима при наличии внешнего потока жидкости. Вторичные режимы появляются, когда скорость внешнего потока не превышает бифуркационного значения, в том числе в случае отсутствия внешнего потока жидкости. Вращательные режимы вблизи свободной границы имеют зону противотока, в которой жидкость движется в направлении оси симметрии. При локальном нагреве свободной границы вращательный эффект не обнаружен.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Napolitano L. G.** Marangoni boundary layers // Proc. of the 3rd Europ. symp. on material science in space, Grenoble, 24–27 Apr. 1979. Paris: Europ. Space Agency, 1979. P. 313–315.
2. **Пухначев В. В.** Групповой анализ уравнений нестационарного пограничного слоя Марангони // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279, № 5. С. 1061–1064.
3. **Шкадов В. Я.** К образованию волн на поверхности вязкой тяжелой жидкости под действием касательного напряжения // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1970. № 3. С. 133–137.
4. **Батищев В. А.** Ветвление автомодельных решений, описывающих термокапиллярное течение жидкости в тонком слое // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 3. С. 137–142.
5. **Батищев В. А., Хорошунова Е. В.** Возникновение вращательных режимов при термокапиллярном течении неоднородной жидкости в слое // Прикл. математика и механика. 2000. Т. 64, вып. 4. С. 560–568.
6. **Bifurcation** theory and nonlinear eigenvalue problems / Ed. by J. B. Keller, S. Antman. N. Y.: W. A. Benjamin, 1969.

*Поступила в редакцию 1/II 2017 г.,  
в окончательном варианте — 11/VII 2017 г.*

---