V. V. Petrov, On probabilities of moderate deviations, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 1999, Volume 260, 214–217

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 260, 1999 г.

В. В. Петров

О ВЕРОЯТНОСТЯХ УМЕРЕННЫХ УКЛОНЕНИЙ

В настоящей работе исследуется асимптотическое поведение распределения суммы независимых случайных величин в зонах умеренных уклонений. Этому направлению исследований посвящен ряд работ, среди которых отметим [1–6]. В отличие от упомянутых работ, мы будем использовать полученное в [7] (см. также [8], теорема 5 главы 5) обобщение неравенства Эссеена для остаточного члена в центральной предельной теореме, что позволяет дать короткое доказательство нормальной сходимости в зонах умеренных уклонений, формулируемых в терминах обобщенных дробей Ляпунова.

Пусть G – множество функций $g(x)$, определенных для всех действительных x и удовлетворяющих следующим условиям: (а) $g(x)$ – неотрицательная, четная, неубывающая в области $x > 0$ функция, (б) функция $x/g(x)$ не убывает в области $x > 0$.

Теорема 1 ([7]). *Пусть $X_1, \dots, X_n$ – независимые случайные величины, $EX_j = 0$, $EX_j^2 g(X_j) < \infty$ $(j = 1, \dots, n)$ для некоторой функции $g(x) \in G$. Положим*

$$B_n = \sum_{j=1}^{n} EX_j^2, \quad F_n(x) = P\left(B_n^{-1/2} \sum_{j=1}^{n} X_j < x\right), \tag{1}$$

$$\Phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt, \quad L_n = \frac{1}{B_n g\left(B_n^{1/2}\right)} \sum_{j=1}^{n} EX_j^2\, g(X_j). \tag{2}$$

Тогда

$$\sup_x \mid F_n(x) - \Phi(x) \mid \leqslant AL_n, \tag{3}$$

где A – абсолютная положительная постоянная.

Величину L_n будем называть обобщенной дробью Ляпунова. Заметим, что классу G принадлежат функции $g(x) = |x|^\delta$ при

$0 < \delta \leqslant 1$ и $g(x) = (\ln(3 + |x|))^p$ при $p > 0$. Этим двум функциям соответствуют величины

$$L_n = B_n^{-1-\delta/2} \sum_{j=1}^{n} E|X_j|^{2+\delta} \tag{4}$$

и

$$L_n = B_n^{-1} \left(\ln(3 + B_n^{1/2})\right)^{-p} \sum_{j=1}^{n} EX_j^2 \left(\ln(3 + |X_j|)\right)^p. \tag{5}$$

В частном случае одинаковых распределений эти величины принимают вид

$$L_n = \sigma^{-2-\delta}\, n^{-\delta/2} E|X_1|^{2+\delta} \tag{6}$$

и

$$L_n = \sigma^{-2} \left(\ln(3 + \sigma n^{1/2})\right)^{-p} EX_1^2 \left(\ln(3 + |X_1|)\right)^p \tag{7}$$

соответственно, где $\sigma^2 = EX_1^2$.

Применение теоремы 1 приводит к следующему результату.

Теорема 2. *Пусть X_1, $X_2, \ldots$ – последовательность независимых случайных величин, $EX_j = 0$, $EX_j^2\, g(X_j) < \infty$ $(j = 1, 2, \ldots)$ для некоторой функции $g(x) \in G$. Определим B_n, $F_n(x)$, $\Phi(x)$ и L_n равенствами* (1) *и* (2). *Пусть $L_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда имеют место соотношения*

$$\frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x)} \to 1 \tag{8}$$

и

$$\frac{F_n(-x)}{\Phi(-x)} \to 1 \tag{9}$$

при $n \to \infty$ равномерно относительно x в области $0 \leqslant x \leqslant C(2\ln(1/L_n))^{1/2}$, где C – положительная постоянная, удовлетворяющая условию $C < 1$.

Перейдем к доказательству теоремы 2. В силу условия $L_n \to 0$ и теоремы 1 имеем $F_n(x) \to \Phi(x)$ равномерно относительно x. Отсюда следует, что соотношения (8) и (9) выполнены в области $0 \leqslant x \leqslant M$, где M – произвольная положительная постоянная. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $x \geqslant M$, где M – достаточно большая постоянная.

Полагая $R_n(x) = F_n(x) - \Phi(x)$, получаем

$$\frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x)} = 1 - \frac{R_n(x)}{1 - \Phi(x)}. \tag{10}$$

Воспользуемся соотношением

$$1 - \Phi(x) = (2\pi)^{-1/2}\, x^{-1}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \big(1 + o(1)\big) \ (x \to +\infty),$$

в силу которого имеем

$$1 - \Phi(x) \geqslant (2\pi)^{-1/2}\, (2x)^{-1}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

при всех достаточно больших x. Следовательно, в зоне $M \leqslant x \leqslant C(2\ln(1/L_n))^{1/2}$ применение теоремы 1 приводит к неравенствам

$$\frac{|R_n(x)|}{1 - \Phi(x)} \leqslant (2\pi)^{-1/2}\,(2x)\, e^{\frac{x^2}{2}} |R_n(x)| \leqslant$$

$$\leqslant 2C(2\pi)^{1/2}\,(2\ln(1/L_n))^{1/2} \exp\left\{C^2 \ln(1/L_n)\right\} AL_n \leqslant$$

$$\leqslant C_1\,(\ln(1/L_n))^{1/2}\, L_n^{-C^2}\, L_n = C_1\, L_n^{\alpha}\,(\ln(1/L_n))^{1/2},$$

где C_1 – положительная постоянная и $\alpha = 1 - C^2$, так что $0 < \alpha < 1$. В силу условия $L_n \to 0$ получаем $R_n(x)\big/(1 - \Phi(x)) \to 0$ при $n \to \infty$, если $M \leqslant x \leqslant C\,(2\ln(1/L_n))^{1/2}$, где $0 < C < 1$ и M – достаточно большая постоянная. Отсюда и из (10) следует (8). Аналогично получаем соотношение (9) в той же зоне. Справедливость соотношений (8) и (9) в зоне $0 \leqslant x \leqslant M$ уже была установлена. Теорема 2 доказана.

Если последовательность независимых случайных величин $\{X_n\}$ удовлетворяет условию $E|X_n|^{2+\delta} < \infty$ при некотором положительном $\delta \leqslant 1$ (или более слабому условию $EX_n^2(\ln(3{+}|X_n|))^p < \infty$ при некотором $p > 0$) для всех n, то по теореме 2 справедливы соотношения (8) и (9) в зоне $0 \leqslant x \leqslant C\,(2\ln(1/L_n))^{1/2}$, где $0 < C < 1$ и величина L_n определена равенством (4) (соответственно, равенством (5)). В частном случае одинаковых распределений равенства (4) и (5) сводятся к (6) и (7), и из полученных результатов вытекают следующие утверждения: при указанных моментных условиях зонами нормальной сходимости (т.е. зонами, в которых имеют место соотношения (8) и (9)) являются интервалы $0 \leqslant x \leqslant C(\delta \ln n)^{1/2}$ или $0 \leqslant x \leqslant C(p \ln\ln n)^{1/2}$ соответственно, где $0 < C < 1$. Более слабые моментные условия, обеспечивающие выполнение соотношения $L_n \to 0$, приводят к более узким зонам нормальной сходимости.

Литература

1. H. Rubin, J. Sethuraman, *Probabilities of moderate deviations.* — Sankhya **A27** (1965), 325–346.
2. Н. Н. Амосова, *О предельных теоремах для вероятностей умеренных уклонений.* — Вестник ЛГУ **13** (1972), 5–14.
3. Н. Н. Амосова, *Об узких зонах интегральной нормальной сходимости.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **97** (1980), 4–14.
4. А. Д. Сластников, *Предельные теоремы для вероятностей умеренных уклонений.* — Теор. вероятн. и ее прим. **23, No. 2** (1978), 240–257.
5. Л. В. Розовский, *О предельных теоремах для больших уклонений в узких зонах.* — Теор. вероятн. и ее прим. **26, No. 4** (1981), 847–857.
6. Z. Rychlik, *Nonuniform central limit bounds with applications to probabilities of deviations.* — Теор. вероятн. и ее прим. **28, No. 4** (1983), 646–652.
7. В. В. Петров, *Одна оценка отклонения распределения суммы независимых случайных величин от нормального закона.* — Доклады АН СССР **160, No. 5** (1965), 1013–1015.
8. В. В. Петров, *Суммы независимых случайных величин.* Наука, М. (1972).

Petrov V. V. On probabilities of moderate deviations.

This paper examines the asymptotic behavior of distributions of sums of independent random variables in zones of moderate deviations. Sufficient conditions are given for normal convergence in these zones.

Санкт-Петербургский
государственный
университет

Поступило 7 декабря 1998 г.