А.И.Скопин

ФАКТОРЫ НИЛЬПОТЕНТНОГО РЯДА НЕКОТОРЫХ МЕТАБЕЛЕВЫХ ГРУПП ПРИМАРНОЙ ЭКСПОНЕНТЫ

В [I] для максимальной 2-порожденной метабелевой группы экспоненты 9 были найдены верхние границы порядка и класса нильпотентности. В конце работы было замечено, что результат может быть обобщен с заменой экспоненты 9 на p^2 при любом простом p. Первый параграф данной работы как раз и содержит такое обобщение. Однако, и здесь, и в [I] получаемые границы не являются окончательными. Точные границы для рассматриваемых групп были получены еще в конце 60-х годов (см. [7]-[9]) совсем другими средствами. Мы приводим в § I повторение более слабого для класса нильпотентности результата по двум причинам. Во-первых, для иллюстрации других технических возможностей - аддитивной техники (см. [2]). Во-вторых, и это основное, результатом применения этой техники оказывается более прямое и детальное описание самой группы. Можно выделить такие три последовательные задачи в изучении конечностных характеристик группы, заданной образующими и определяющими соотношениями: I) выяснение конечности такой группы; 2) нахождение ее численных характеристик - порядка, класса нильпотентности; 3) исследование факторов ее нильпотентного ряда. Применение аддитивной техники расчитано на решение третьей из этих задач - выяснение структуры факторов нильпотентного ряда группы в терминах образующих и определяющих соотношений этих факторов, вскрытие механизма образования этих соотношений. Такое описание структуры нам представляется перспективным, поскольку в дальнейшем сравнение аналогичных описаний при последовательных снятиях некоторых ограничений (скажем, замена условия метабелевости более слабым условием, например, условием трансметабелевости [3], [4], или замена экспоненты p^2 экспонентой p^3 и т.д.) должно помочь проследить за направлением эволюции, которую будет претерпевать система факторов нильпотентного ряда усложняющейся при этом группы. Возможность провести наблюдение в таком направлении появляется уже здесь в §§ 2 и 3, после чего, по-видимому, на очереди оказывается метабелева группа экспоненты 27.

Сама неточность границ, о которой шла выше речь, свидетельствует, разумеется, о том, что при изучении факторов найдены не все соотношения в них. "Недостающие" соотношения могут появиться при повышении точности, с которой ведется поиск. Это и демонстрируется в § 2, где для группы экспоненты 9 из-за замены вычислений с I-кратной точностью, которые велись в [I], вычислениями с 5-кратной точностью удается получить окончательное описание той же группы. Аналогичное исследование группы экспоненты 8 проведено в § 3. Найденный при этом порядок 2^{63} изучаемой группы совпадает с полученным в [I0].

§ I. Метабелевы группы экспоненты p^2

В этом параграфе обобщен с p=3 на любое простое p результат [I]. Именно, здесь устанавливается, что порядок максимальной конечной метабелевой группы $G = MB(2, p^2)$ экспоненты p^2 с двумя образующими не превосходит $p^{S(p)}$, где $S(p) = 1{,}5p^4 - 1{,}5p^3 - 2p^2 + p + 5$, а класс нильпотентности такой группы меньше $2(p^2-1)$. (В [I] значение термина "класс нильпотентности" на единицу превышает традиционное. Здесь это расхождение устранено.) Эти оценки следуют из прямого вычисления соотношений в факторах нильпотентного ряда. Как уже сказано, список соотношений не полон, поскольку наши оценки не являются точными.

I°. Аддитивная техника в метабелевой группе. Мы будем записывать все рассматриваемые группы аддитивно. Такая запись естественным образом допускает линейно алгебраическую терминологию и удобна для приближенных подсчетов в нильпотентном ряде группы. Коснемся специфики этих обозначений. (Подробнее см.[2].) Произведением двух элементов a, b будет обозначаться их коммутатор: $ab = -a - b + a + b$. Во избежание загромождения скобками одночлена высокой степени мы будем использовать следующую (левонормированную) запись: $(a_1 \ldots a_{n-1})a_n = a_1 \ldots a_{n-1} a_n$, $(ab^{n-1})b = ab^n$. Назовем б а з и с о м группы такую последовательность одночленов (базисных одночленов), в виде целочисленной линейной комбинации которых может быть однозначно представлен любой элемент группы. Коэффициенты в этой линейной комбинации будут называться координатами элемента. В [2] показано, что свободная метабелева группа с двумя образующими x, y обладает базисом. Этот базис начинается с базисных одночленов x, y, а дальше, начиная с $n=2$, базисные одночлены n-й степени имеют вид:

$$v_k^n = yx^{n-k}y^{k-1}, \tag{I}$$

$k = 1, 2, \ldots, n-1$. Произвольный элемент из F, таким образом, однозначно представим в виде:

$$\alpha_1^1 x + \alpha_2^1 y + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k^n v_k^n \quad , \tag{2}$$

где $\alpha_k^n \in \mathbb{Z}$. (Координата α_k^n элемента из F, соответствующая базисному одночлену v_k^n, будет называться координатой n-й степени этого элемента.)

В соответствии с аддитивной записью, естественно обозначать n-й степенью группы n-й член ее нильпотентного ряда. (Так коммутантом группы G является G^2, а метабелевость группы G можно записать равенством $(G^2)^2 = 0$.) Элемент из F тогда и только тогда лежит в F^n, когда его разложение (2) не содержит членов степени $< n$. Рассмотрим присоединенную алгебру Ли группы F:

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus L_n ,$$

где $L_n \approx F^n / F^{n+1}$ - n-я однородная составляющая алгебры L. Мы не будем вводить новых обозначений для элементов из L, а будем считать, что сами базисные одночлены v_k^n при фиксированном n образуют базис модуля L_n. Таким образом, из (I) видно, что $\dim L_n = n-1$. Метабелевость позволяет вывести следующие простые формулы умножения базисных одночленов на образующие:

$$v_k^n x = v_k^{n+1} \quad , \tag{3}$$

$$v_k^n y = v_{k+1}^{n+1} \quad . \tag{3'}$$

В этом параграфе мы через $G = MB(2, p^2)$ обозначим максимальную метабелеву группу экспоненты p^2 с двумя образующими. Можно считать, что $G = F/T$, где $T = p^2 F$. При всех $n = 1, 2, \ldots$, как известно, имеет место изоморфизм:

$$G^n / G^{n+1} \approx L_n / A_n , \tag{4}$$

где A_n называется модулем соотношений n-й степени. Обозначим: $M_n = L_n / A_n$. (Мы будем называть соотношением n-й степени как элемент из F, лежащий в $F^n \cap T$, так и лежащий в A_n его г л а в н ы й ч л е н, т.е. сумму одночленов наименьшей степени в разложении (2) по базису). Наша задача - проследить за изменением модуля M_n при $n = 1, 2, \ldots$. Мы хотим убедиться в его тривиальности при $n = 2(p^2 - 1)$, а подсчет размерностей этих модулей позволит оценить порядок $|G|$ рассматриваемой группы.

2^0. Собирательная формула. Разложение по базису (I) элемента $m(x+y)$ мы будем называть собирательной формулой экспоненты m в метабелевой группе. При $m=p^2$ эта формула представляет собой соотношение в нашей группе G. Коэффициенты в собирательной формуле можно находить с помощью известного алгоритма Холла [5] или его графической модификации [6]. После некоторых упрощений, которые сразу же будут пояснены, собирательная формула экспоненты p^2 примет следующий вид:

$$\sigma=\sigma(x,y)=\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{k-1}p\,v_k^p+\sum_{k=1}^{p^2-1}(-1)^{k-1}v_k^{p^2}. \tag{5}$$

(С точностью до слагаемых степени p^2+1.) Приведем пояснения. **Формула (5) представляет собой разложение** (2) по базису (I) некоторого элемента из F, лежащего в ядре $T=p^2F$. А именно, элемента $\sigma=\sigma(x,y)$, получаемого из $p^2(x+y)$ такими преобразованиями над координатами, которые не выводят элемент из T. К этим преобразованиям в первую очередь относится очевидным образом допустимая редукция любой координаты по модулю p^2. Более тонким преобразованием является у с л о в н а я р е д у к ц и я координат по модулю p с одновременным изменением координат более высоких степеней, о чем пойдет речь в приводимом далее в этом пункте предложении. (В конце пункта станет ясно, что пользоваться этим предложением мы вправе уже сейчас, при получении формулы (5).) Это предложение и позволяет в получаемом сейчас из $p^2(x+y)$ элементе σ исключить слагаемые, имеющие степень большую p, но меньшую p^2. Очевидной является делимость на p^2 координат степени $<p$. Поэтому в (5) такие слагаемые отсутствуют. Остается подсчитать значения координат степеней p и p^2. В соответствии с [5] и [6] координата элемента $p^2(x+y)$ соответствующая базисному одночлену $v_k^p=yx^{p-k}y^{k-1}$, после редуцирования по модулю p^2 имеет вид $\binom{p^2}{p}b_k^p$, где b_k^p – количество эпиморфизмов графа с одним минимумом и двумя ветвями, имеющими длины $p-k$ и $k-1$, на линейно упорядоченное множество длины p. Поэтому $b_k^p=\binom{p-1}{k-1}$. Отсюда

$$\binom{p^2}{p}b_k^p=p\cdot\frac{(p^2-1)(p^2-2)\ldots(p^2-p+1)}{(p-1)!}\cdot\frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-k+1)}{1\cdot 2\ldots(k-1)}\equiv(-1)^{k-1}p \pmod{p^2},$$

что и имеет место в (5). Аналогично проверяется, что координата, соответствующая базисному одночлену $v_k^{p^2}$ имеет вид $(-1)^{k-1}$.

Таким образом, собирательная формула (5) получена. (Правда, она пока опирается на следующие далее рассуждения об условной редукции.)

Формула (5) является соотношением в группе $G = F/p^2F$, а значит и в любой метабелевой группе экспоненты p^2 для любых ее двух элементов x, y. Заметим, что при переходе от свободной метабелевой группы F к произвольной метабелевой группе G базис (I) становится лишь аддитивно порождающей над $\mathbb{Z}$ системой, а координаты в разложении (2) оказываются определенными неоднозначно. В частности, в группе экспоненты p^2 их можно редуцировать по модулю p^2. Сейчас мы займемся условной редукцией по модулю p, которая возможна в группах экспоненты p^2. Для этого мы из (5) выведем систему из $p-1$ соотношений, имеющих своими главными членами, соответственно, члены pv_k^p, $k=1,2,\ldots$ $\ldots, p-1$. В начале сформулируем результат: в метабелевой группе экспоненты p^2 для любых элементов x, y имеют место соотношения:

$$\sigma^{(k)} = \sigma^{(k)}(x,y) = pv_k^p + v_k^{p^2} + v_{(p-1)+k}^{p^2} + v_{2(p-1)+k}^{p^2} + \ldots + v_{p(p-1)+k}^{p^2}, \qquad (6)$$

$k=1,2,\ldots, p-1$. Эти соотношения можно получить так. Из (5) получим сначала соотношения $\sigma(x, sy)$, где $s=1,2,\ldots,p-1$. Легко подсчитывается, что v_k^n при замене $x \to x$, $y \to sy$ переходит в $s^k v_k^n$, с точностью до слагаемых степени $>n$. Поэтому, используя условную редукцию по модулю p (для исключения слагаемых степени $>p$, делящихся на p), мы можем привести соотношения $\sigma(x, sy)$ к виду:

$$\sum_{k=1}^{p-1} s^k(-1)^{k-1} p v_k^p - \sum_{k=1}^{p^2-1} s^k(-1)^{k-1} v_k^{p^2}, \qquad (7)$$

$s=1,2,\ldots, p-1$. Если обозначить через X столбец с элементами v_k^p ($k=1,2,\ldots, p-1$), а через Y столбец с элементами $v_k^{p^2}$ ($k=1,2,\ldots,p^2-1$), то система соотношений (7) может быть записана в виде $AX+BY$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \ldots & 1 \\ 2 & -2^2 & \ldots & 2^{p-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p-1 & -(p-1)^2 & \ldots & (p-1)^{p-1} \end{pmatrix}, \quad B = (\underbrace{A, A, \ldots, A}_{p+1 \text{ раз}})$$

Для получения теперь соотношений (6) достаточно использовать обратимость по модулю p матрицы A, а это хорошо известно. Действительно, если $s\gamma_s \equiv 1 \pmod{p}$, то

$$A^{-1}=-\begin{pmatrix} 1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma^{p-1} \\ -1 & -\gamma_2^2 & \cdots & -\gamma_{p-1}^2 \\ - & - & - & - \\ 1 & \gamma_2^{p-1} & \cdots & \gamma_{p-1}^{p-1} \end{pmatrix}.$$

Из соотношений (6) можно получить таблицу для условной редукции по модулю p. Под такой таблицей имеется ввиду следующее. Если умножить на x или y нужное число раз соотношения (6), то из них можно получить соотношения с главным членом вида pV_k^n при любом наперед взятом базисном одночлене V_k^n, где $n \geqslant p$. С помощью этого соотношения и производится условная редукция по модулю p координаты, соответствующей базисному одночлену V_k^n. Заметим, что при редукции этой координаты могут измениться лишь координаты степеней $\geqslant n+p^2-p$. Мы доказали

ПРЕДЛОЖЕНИЕ об условной редукции по модулю p. Пусть V_k^n – произвольный базисный одночлен степени $n \geqslant p$. Тогда в группе G экспоненты p^2 есть соотношение вида

$$pV_k^n + V_k^{n+p^2-p} + V_{(p-1)+k}^{n+p^2-p} + \ldots + V_{p(p-1)+k}^{n+p^2-p}$$

(с точностью до слагаемых степени $n+p^2-p+1$), позволяющее изменить на p координату, соответствующую базисному одночлену V_k^n любого элемента из G.

Заметим, что, если преодолеть технические трудности, то эти соотношения можно вывести с большей точностью (как это делается в дальнейшем для экспонент 9 и 8). Однако, для нашей цели в этом параграфе такая точность достаточна.

СЛЕДСТВИЕ. Разложение (2) элемента из метабелевой группы экспоненты p^2 можно привести к такому виду, чтобы все координаты степеней $\geqslant p$ лежали в промежутке $[0, p-1]$.

3°. Некоторые вспомогательные формулы. Нам надо привести еще несколько формул, которые будут полезны дальше при использовании аддитивной техники в метабелевой группе.

Пусть элементы $B_1, \ldots, B_k$ лежат в коммутанте G^2 произвольной метабелевой группы G. Тогда для любого $a \in G$ верно равенство:

$$(B_1+\ldots+B_k)a = B_1a+\ldots+B_ka, \tag{8}$$

а для любого $m \in \mathbb{Z}$ верно равенство:

$$m\left(B_1+\ldots+B_k\right)=mB_1+\ldots+mB_k\,. \qquad (9)$$

Оба равенства очевидны, поскольку $(G^2)^2=0$, или $B_iB_j=0$, т.е. B_i, B_j коммутируют.

Теперь мы получим менее очевидные формулы для "вынесения скаляра" в произведениях вида $b(pa)$ и $(pb)a$. Для этого напишем собирательную формулу экспоненты p , т.е. разложение по базисным одночленам от a, b элемента $p(a+b)$. Нам достаточно редуцировать в ней коэффициенты по модулю p^2 и оставить лишь те слагаемые, которые имеют I-ю степень по b . Подсчитывая коэффициенты, мы получим:

$$p(a+b)=pa+pb+\binom{p}{2}ba+\binom{p}{3}ba^2+\ldots+ba^{p-1}. \qquad (10)$$

(С точностью до $p+1$ степеней и указанных редукций.) Отсюда получается

$$(pb)a=pba+\binom{p}{2}bab+\binom{p}{3}bab^2+\ldots+bab^{p-1}. \qquad (11)$$

Действительно, по определению произведения и из (10) получаем:

$$(pb)a=-pb-a+pb+a=-pb+p(-a+b+a)=-pb+$$
$$+p(b+ba)=pba+\binom{p}{2}bab+\binom{p}{3}bab^2+\ldots+bab^{p-1}.$$

Двойственная формула имеет вид:

$$b(pa)=pba+\binom{p}{2}ba^2+\binom{p}{3}ba^3+\ldots+ba^p. \qquad (11')$$

Выведенные сейчас формулы используются дальше для получения новых соотношений из уже полученных. В частности, при этом нам будет нужно заменять в уже найденных соотношениях x или y (или оба сразу) на px или py , соответственно. Посмотрим, как при таких заменах преобразуются базисные одночлены в группах экспоненты p^2 . Возьмем базисный одночлен $V_k^n(x,y)=yx^{n-k}y^{k-1}$ и предположим, что $n \geqslant p$. Чтобы подсчитать $(py)x^{n-k}(py)^{k-1}=$ $=V_k^n(x,py)$ сначала из (11) найдем:

$$(py)x=pyx+\binom{p}{2}yxy+\ldots+yxy^{p-1},$$

откуда, на основании (8) и (3), получаем:

$$(py)x^{n-k}=pyx^{n-k}+\binom{p}{2}yx^{n-k}y+\ldots+yx^{n-k}y^{p-1}=B_1.$$

Далее, по (II′) и (9) найдем:

$$(py)x^{n-k}(py)=pB_1y+\binom{p}{2}B_1y^2+\ldots+B_1y^p=$$
$$=pyx^{n-k}y^p+\binom{p}{2}yx^{n-k}y^{p+1}+\ldots+yx^{n-k}y^{2p-1}=B_2.$$

Продолжая дальше, получим:

$$(py)x^{n-k}(py)^{k-1}=pB_{k-1}y+\binom{p}{2}B_{k-1}y^2+\ldots+B_{k-1}y^p=$$
$$=pyx^{n-k}y^{(k-1)p}+\binom{p}{2}yx^{n-k}y^{(k-1)p+1}+\ldots+yx^{n-k}y^{kp-1}.$$

Если здесь ко всем слагаемым, кроме последнего, применить предложение об условной редукции по модулю p, то, с точностью до слагаемых степени $n+k(p-1)+1$, у нас останется одно последнее слагаемое, и мы получим:

$$V_k^n(x,py)=V_{kp}^{n+k(p-1)} \tag{I2}$$

Аналогично получаются формулы:

$$V_k^n(px,y)=V_k^{n+(n-k)(p-1)}, \tag{I2′}$$

$$V_k^n(px,py)=V_{kp}^{np}. \tag{I2″}$$

(Подчеркиваем, что выведенные равенства (I2), (I2′), (I2″) верны в метабелевых группах экспоненты p^2 "в первом приближении", т.е. с точностью до слагаемых большей степени, чем написанные.)

4°. Интервал возрастания размерности модуля M_n. Мы здесь опишем модули M_n при $1\leqslant n\leqslant p^2$. В этом интервале никаких нетривиальных соотношений в A_n нет, и $\dim M_n=\dim L_n$.

Отметив, что $|G^1/G^2|=|M_1|=(p^2)^{\dim L_1}=p^4$, перейдем к значениям $n\geqslant 2$. При $2\leqslant n<p$ модуль соотношений A_n совпадает с p^2L_n и поэтому при этих n мы имеем:

$$|G^n/G^{n+1}|=|M_n|=(p^2)^{\dim L_n}=p^{2(n-1)}.$$

Начиная с $n=p$ действует предложение об условной редукции по модулю p, что означает, в частности, аннулируемость модулей M_n умножением на p, т.е. при $n\geqslant p$ имеет место включение $A_n\supset pL_n$. Но до $n=p^2$ собирательная формула новых соотношений дать не может, а кроме нее источников нетривиальных соотношений нет, поэтому $A_n=pL_n$ и мы получаем для $p\leqslant n\leqslant p^2$:

$|G^n/G^{n+1}| = p^{n-1}$. Отбросив по соображениям удобства до вычислений в следующем пункте модуль M_{p^2}, мы можем подвести первый итог.

$$2+1+2+\ldots+(p-2)=0{,}5\,(p^2-3p+6),$$

$$2+1+2+\ldots+(p^2-2)=0{,}5\,(p^4-3p^2+6);$$

$$\log_p |G/G^{p^2}| = 0{,}5\,(p^4-2p^2-3p+12)\,. \tag{13}$$

5°. Интервал медленного убывания размерности. Мы сначала сформулируем результат этого пункта. В рассматриваемый интервал включаются номера $p^2 \leqslant n \leqslant 2p^2-p-1$. Весь интервал разбивается на p участков, длиной $p-1$ каждый. Тогда

(а) на каждом из этих участков верхняя граница размерности $\dim M_n$ не изменяется;

(в) при переходе номера из одного участка в следующий происходит скачок этой границы вниз на 2 единицы.

Начнем с $n=p^2+1$. Здесь можно найти первое нетривиальное, т.е. не лежащее в pL_n, соотношение в A_n. Для этого рассмотрим значение $\sigma^{(1)}(x,yx)$ с точностью до p^2+2 степеней. Из (6) при $k=1$ получаем:

$$\sigma^{(1)}(x,yx)=p\,(yx)x^{p-1}+(yx)x^{p^2-1}=pyx^p+yx^{p^2}= \\ =pv_1^{p+1}+v_1^{p^2+1}\,. \tag{14}$$

(Остальные слагаемые пропадают как из-за рассмотрения с указанной точностью, так и из-за метабелевости.) С другой стороны, простое умножение на x того же соотношения $\sigma^{(1)}(x,y)$, на основании (3), дает:

$$\sigma^{(1)}(x,y)x=pv_1^{p+1}+v_1^{p^2+1}+v_{(p-1)+1}^{p^2+1}+v_{2(p-1)+1}^{p^2+1}+\ldots+v_{p(p-1)+1}^{p^2+1}\,. \tag{15}$$

Сравнивая (14) с (15), получаем соотношение:

$$v_{(p-1)+1}^{p^2+1}+v_{2(p-1)+1}^{p^2+1}+\ldots+v_{p(p-1)+1}^{p^2+1}\,. \tag{16}$$

Это и есть первое нетривиальное соотношение в A_n. В результате появляется неравенство:

$$\dim M_{p^2+1} \leqslant p^2-1\,.$$

Оказывается, полученное соотношение не только "замедляет", но и "останавливает" рост размерности $\dim M_n$. Именно, можно отметить следующее.

ЗАМЕЧАНИЕ. Верхняя граница для размерности $\dim M_n$ не увеличивается для дальнейших значений $n > p^2+1$, поскольку с ростом n на каждом шагу на единицу возрастает как размерность "числителя", так и размерность "знаменателя" в правой части формулы (4). Так, например, для $n = p^2+2$ мы можем из (16) при помощи (3) и (3′) образовать следующие соотношения в A_n :

$$V^{p^2+2}_{(p-1)+1} + V^{p^2+2}_{2(p-1)+1} + \ldots + V^{p^2+2}_{p(p-1)+1},$$

$$V^{p^2+2}_{(p-1)+2} + V^{p^2+2}_{2(p-1)+2} + \ldots + V^{p^2+2}_{p(p-1)+2}$$

и так далее. В дальнейшем, и после снижений верхней границы для размерности, это замечание сохраняет силу.

Итак, неравенство $\dim M_n \leqslant p^2-1$ верно для $n \geqslant p^2$. Сейчас мы увидим, что оно, сохраняясь на протяжении участка из $p-1$ значений n - до $n = p^2+p-2$ включительно, - при $n = p^2+p-1$ усиливается: верхняя граница размерности снижается на две единицы. С этой целью мы укажем при $n = p^2+p-1$ два новых соотношения в A_n. Эти соотношения находятся вычислением значений

$$\sigma^{(1)}(x, py) - \sigma^{(1)}(x,y)\,y^{p-1}, \quad \sigma^{(p-1)}(px, y) - \sigma^{(p-1)}(x,y)\,x^{p-1}.$$

Действительно, с одной стороны из (6) и (12) получаем:

$$\sigma^{(1)}(x, py) = pV_1^{p}(x, py) + V_1^{p^2}(x, py) + V^{p^2}_{(p-1)}(x, py) + \ldots =$$

$$= pV_p^{2p-1}(x, y) + V_p^{p^2+p-1}(x, y),$$

с точностью до слагаемых более высоких степеней, а с другой стороны:

$$\sigma^{(1)}(x,y)\,y^{p-1} = pV_p^{2p-1} + V_p^{p^2+p-1} + V^{p^2+p-1}_{(p-1)+p} + \ldots + V^{p^2+p-1}_{p(p-1)+p}.$$

Сравнение этих соотношений (т.е. применение, по-существу, предложения об условной редукции) дает:

$$V^{p^2+p-1}_{2(p-1)+1} + V^{p^2+p-1}_{3(p-1)+1} + \ldots + V^{p^2+p-1}_{(p+1)(p-1)+1}.$$

Второе вычисление приводит к соотношению:

$$V^{p^2+p-1}_{p-1} + V^{p^2+p-1}_{2(p-1)} + \ldots + V^{p^2+p-1}_{p(p-1)} \quad :$$

Легко видеть, что эти соотношения "новые", т.е. не вытекают из (16) и мы получили неравенство $\dim M_{p^2+p-1} \leqslant p^2-3$.

Это неравенство сохраняется на протяжении всего 2-го участка из $p-1$ значений номеров n, а для $n=p^2+2(p-1)$ оно усиливается еще на 2 единицы при помощи соотношений, получаемых вычислением разностей

$$\sigma^{(2)}(x, py) - \sigma^{(2)}(x,y)\, y^{2(p-1)}$$

$$\sigma^{(p-2)}(px,y) - \sigma^{(p-2)}(x,y)\, x^{2(p-1)} .$$

Получаемые соотношения имеют вид:

$$V^{p^2+2(p-1)}_{3(p-1)+2} + V^{p^2+2(p-1)}_{4(p-1)+2} + \ldots + V^{p^2+2(p-1)}_{(p+2)(p-1)+2} ,$$

$$V^{p^2+2(p-1)}_{p-2} + V^{p^2+2(p-1)}_{(p-1)+p-2} + \ldots + V^{p^2+2(p-1)}_{(p-1)^2+p-2} .$$

Наконец, на последнем, p-м участке рассматриваемого в этом пункте интервала появляются соотношения, полученные из разностей:

$$\sigma^{(p-1)}(x, py) - \sigma^{(p-1)}(x,y)\, y^{(p-1)^2},$$

$$\sigma^{(1)}(px, y) - \sigma^{(1)}(x,y)\, x^{(p-1)^2} .$$

Это – такие соотношения:

$$V^{2p^2-2p+1}_{(p+1)(p-1)} + V^{2p^2-2p+1}_{(p+2)(p-1)} + \ldots + V^{2p^2-2p+1}_{2p(p-1)} ,$$

$$V^{2p^2-2p+1}_{1} + V^{2p^2-2p+1}_{(p-1)+1} + \ldots + V^{2p^2-2p+1}_{(p-1)^2+1} .$$

Здесь для размерности достигается неравенство $\dim M_n \leqslant (p-1)^2$.

Мы выполнили программу этого пункта, сформулированную в (а), (б). Подытожим вычисления границы для размерностей на всем рассматриваемом интервале:

$$(p-1)\left[(p^2-1)+(p^2-3)+\cdots+(p^2-2p+1)\right] = p^4-2p^3+p^2 .$$

Отсюда:

$$\log_p \left| G^{p^2} / G^{2p^2-p} \right| \leqslant p^4-2p^3+p^2 . \tag{17}$$

6^0. Интервал быстрого убывания размерности. В этом интервале, а именно, при $2p^2-p \leqslant n \leqslant 2p^2-2$, на каждом из $p-1$ шагов граница размерности снижается на $p-1$ единиц. Таким образом, нам нужно сейчас установить, что

$$\left.\begin{array}{l} \dim M_{2p^2-p} \leqslant (p-1)(p-2), \\ \dim M_{2p^2-p+1} \leqslant (p-1)(p-3), \\ \text{- - - - - - - - - - -} \\ \dim M_{2p^2-3} \leqslant p-1, \\ \dim M_{2p^2-2} = 0. \end{array}\right\} \qquad (18)$$

Выпишем сначала все соотношения, полученные ранее, для $n=2p^2-p-1$:

$$\begin{array}{l} V_1^{2p^2-p-1} + V_{(p-1)+1}^{2p^2-p-1} + \ldots + V_{(p-1)^2+1}^{2p^2-p-1}, \\ V_2^{2p^2-p-1} + V_{(p-1)+2}^{2p^2-p-1} + \ldots + V_{(p-1)^2+2}^{2p^2-p-1}, \\ \ldots \\ V_{(p+1)(p-1)+p-2}^{2p^2-p-1} + V_{(p+2)(p-1)+p-2}^{2p^2-p-1} + \ldots + V_{2p(p-1)+p-2}^{2p^2-p-1}. \end{array} \qquad (19)$$

Для установления первого из неравенств (18) мы рассмотрим следующие соотношения:

$$6^{(k)}(px, py) = pV_k^p(px,py) + V_k^{p^2}(px,py) + \ldots + V_{p(p-1)+k}^{p^2}(px,py) =$$
$$= pV_{pk}^{p^2}(x,y) + V_{pk}^{p^3}(x,y) + \ldots + V_{p^2(p-1)+pk}^{p^3}(x,y),$$

$k=1,2,\ldots,p-1$. С другой стороны, применяя условную редукцию по модулю p, мы получим соотношения:

$$-6^{(k)}(px,py) + 6^{(k)}(x,y)x^{(p-k)(p-1)}y^{k(p-1)} =$$
$$= V_{k(p-1)+k}^{2p^2-p} + V_{(k+1)(p-1)+k}^{2p^2-p} + \ldots + V_{(k+p)(p-1)+k}^{2p^2-p}, \qquad (20)$$

$k=1,2,\ldots,p-1$. Обратим внимание, что в полученных сейчас соотношениях (20) число слагаемых равно $p+1$, тогда как все предыдущие соотношения (19) были p-членными. Нижние индексы у всех соотношений (19),(20) образуют арифметические прогрессии с разностью $p-1$. Теперь мы можем, используя все это, получить одночленные соотношения. Именно, в A_{2p^2-p} мы находим следующие соотношения:

$$V_{p^2}^{2p^2-p}, \quad V_{p(p+1)}^{2p^2-p}, \quad \ldots, \quad V_{p(2p-3)}^{2p^2-p}, \quad V_{p(2p-2)}^{2p^2-p}, \qquad (21)$$

как последние слагаемые во вновь найденных соотношениях (20), если из каждого из них вычесть соответствующие соотношения из (I9). Подсчет числа найденных соотношений и доказывает первое неравенство в (I8).

Отметим следующую импликацию:

$$k_1 \equiv k_2 (\mathrm{mod}(p^2-p)) \Longrightarrow V_{k_1}^{2p^2-p} \equiv V_{k_2}^{2p^2-p} (\mathrm{mod}\, A_{2p^2-p}),$$

которая видна из сопоставления в (I9) соотношения с первым членом $V_{k_1}^{2p^2-p}$ с соотношением, имеющим последним слагаемым $V_{k_2}^{2p^2-p}$. Отсюда и из (2I) видно, что в A_{2p^2-p} лежат все базисные одночлены $V_k^{2p^2-p}$, для которых $k \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, p)$.

Завершить доказательство неравенств (I8) теперь легко. Нужно только заметить, что при переходе из A_n в A_{n+1} все соотношения, которые были в A_n, сохраняются и в A_{n+1} из-за (3), и к ним добавляются новые - с увеличением на единицу нижнего индекса у всех входящих в них базисных одночленов - из-за (3$'$). Поэтому одночленными соотношениями (как следствиями соотношений (2I)) через $p-1$ шагов будут исчерпаны все базисные одночлены, нижние индексы которых заполняют $p-1$ классов вычетов по модулю p (в пределах допустимых для них натуральных значений). Но тогда и остальные базисные одночлены обязаны также попасть в число соотношений на основании (I9). Значит при $n=2p^2-2$ мы получаем равенство $A_n = L_n$. Суммированием в (I8) находим оценку

$$|G^{2p^2-p}| \leqslant p^{0,5(p^3-4p^2+5p-2)} \tag{22}$$

Из объединения (22) с (I3) и (I7) мы и получаем результат, объявленный в начале параграфа.

§ 2. Метабелева группа экспоненты 9

Как уже было указано в начале статьи, в этом параграфе мы найдем путем повышения (по сравнению с [I]) точности вычислений окончательное описание максимальной метабелевой группы $G=MB(2,9)$ экспоненты 9 с двумя образующими.

I°. Вычисление собирательной формулы с 5-кратной точностью по модулю G^{14}. Имея ввиду, в частности, повторить вычисление найденного в [7] класса нильпотентности $cl\, G = 12$ мы должны доказать равенство $A_{13} = L_{13}$. Поэтому в вычислениях соотношений надо учитывать слагаемые до 13-й степени включительно, т.е. считать $G^{14}=0$. Здесь нам нужно подробнее, чем в § 1, написать собирательную формулу экспоненты 9, аналогичную формуле (5). Запишем эту формулу в виде:

$$m(x+y)=\sum_{n,k} b(v_k^n)\cdot v_k^n .$$

Как и раньше, $v_k^n = yx^{n-k}y^{k-1}$ – базисные одночлены. Для коэффициентов $b(v_k^n)$ на основании [5] или [6] можно использовать следующие выражения:

$$b(v_k^n)=b_m(v_k^n)=\sum_{\ell=1}^{m}\binom{m}{\ell}\binom{\ell-1}{k-1}\binom{k-1}{n-\ell}\ (\mathrm{mod}\ m). \quad (23)$$

В этом параграфе нас интересует случай $m=9$. Как будет пояснено в следующем пункте, при степени базисного одночлена n до 8 коэффициенты в собирательной формуле нужно считать по модулю 9 (при этом $\ell=3$ или 6), а при $n\geqslant 9$ – считать их по модулю 3 (беря при этом лишь $\ell=9$). С учетом этого найдем все коэффициенты по формуле (23):

$$\begin{array}{r|cc|cc|c|ccccc|cccc|}
n= & ③ & & ④ & & ⑤ & ⑥ & & & & & ⑦ & & & \\
k= & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 2 & 3 & 5 & 6 \\
b= & 3yx^2 & -3yxy & -3yx^2y & -3yxy^2 & +3yx^2y^2 & +3yx^5 & -3yx^4y & +3yx^3y^2 & +3yx^2y^3 & -3yxy^4 & -3yx^5y & -3yx^4y^2 & -3yx^2y^4 & -3yxy^5
\end{array} +$$

$$\begin{array}{cccccccc|cccccc|}
⑨ & & & & & & & & ⑩ & & & & & \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 2 & 3 & 5 & 6 & 8 & 9 \\
+yx^8 & -yx^7y & +yx^6y^2 & -yx^5y^3 & +yx^4y^4 & -yx^3y^5 & +yx^2y^6 & -yxy^7 & -yx^8y & -yx^7y^2 & +yx^5y^4 & +yx^4y^5 & -yx^2y^7 & -yxy^8
\end{array} +$$

$$\begin{array}{ccc|cccccc|cccc}
⑪ & & & ⑫ & & & & & & ⑬ & & & \\
3 & 6 & 9 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 5 & 6 & 8 & 9 \\
+yx^8y^2 & -yx^5y^5 & +yx^2y^8 & -yx^8y^3 & +yx^7y^4 & -yx^6y^5 & -yx^5y^6 & +yx^4y^7 & -yx^3y^8 & +yx^8y^4 & +yx^7y^5 & +yx^5y^7 & +yx^4x^8
\end{array} \quad (24)$$

2°. <u>Форма записи соотношений</u>. Собирательная формула (24) довольно громоздка, а в дальнейшем с ней предстоит все время иметь дело. Мы будем использовать более компактную форму записи как этого, так и других появляющихся далее соотношений. Все соотношения будут записываться в виде их координатных строк в базисе, состоящем из базисных одночленов v_k^n. Однако, сами координаты в записи координатной строки не нужны. Поэтому в координатной строке каждого соотношения мы будем указывать только номера n, k (причем степень n координаты будет помещаться в кружке над строкой) ненулевых координат. О самой же координате нам будет достаточна минимальная информация – ее знак. Это ясно из следующего. Координаты степеней $\leqslant 7$ во всех соотношениях делятся на 3, т.е. по модулю 9 они имеют вид ± 3. Координаты же степеней $\geqslant 9$ (даже $\geqslant 8$, но такие случаи не встретятся) можно редуцировать по модулю 3 и, стало быть, считать равными ± 1, поскольку такая редукция, как будет видно из соотношений для исключения троек (см. далее 4°), могла бы изменить координаты лишь начиная с 14-й степени, что выходит за рамки применяемой здесь нами точности. Значит, нам придется особо отмечать лишь номера координат, имеющих знак минус. Этот минус мы будем ставить над номером соответствующей координаты. В результате такой договоренности, собирательная формула (24) представляет собой записанное в следующей форме соотношение:

$$\sigma=(\overset{\textcircled{3}}{1}\;\bar{2}\;|\overset{\textcircled{4}}{\bar{2}}\;\bar{3}\;|\overset{\textcircled{5}}{3}\;|\overset{\textcircled{6}}{1}\;\bar{2}\;3\;4\;\bar{5}\;|\overset{\textcircled{7}}{\bar{2}}\;\bar{3}\;\bar{5}\;\bar{6}\;\|\overset{\textcircled{9}}{1}\;\bar{2}\;3\;\bar{4}\;5\;\bar{6}\;7\;\bar{8}\;|$$
$$\overset{\textcircled{10}}{\bar{2}}\;\bar{3}\;5\;6\;\bar{8}\;\bar{9}\;|\overset{\textcircled{11}}{3}\;\bar{6}\;9\;|\overset{\textcircled{12}}{\bar{4}}\;5\;\bar{6}\;\bar{7}\;8\;\bar{9}\;|\overset{\textcircled{13}}{5}\;6\;8\;9). \qquad (25)$$

3°. <u>Расчленение собирательной формулы.</u> Сейчас мы расчленим (как это сделано для любого p , но с 1-кратной точностью, в пункте 2° из § 1) соотношение σ на два соотношения, которые должны иметь вид $\sigma' = (\overset{\textcircled{3}}{1}\,|\ldots)$ и $\sigma'' = (\overset{\textcircled{3}}{2}\,|\ldots)$. Эти соотношения послужат основой таблицы соотношений для исключения троек. Для такого расчленения заменим в σ элемент x на $-x$. То соотношение, которое в результате замены получится, будет иметь вид $\tilde{\sigma} = (\overset{\textcircled{3}}{1}\;2\,|\ldots)$, поскольку в первом приближении, очевидно, что $y(-x)^2=yx^2+\ldots$ и $y(-x)y=-yxy+\ldots$. Нам нужно, проведя вычисления с 5-кратной точностью, найти полностью соотношение $\tilde{\sigma} = \sigma(-x, y)$.

Нам понадобится следующая выводимая по индукции в метабелевой группе формула: $y(-x)=-yx+yx^2-yx^3+\ldots+(-1)^k yx^k+\ldots$. Последовательное применение этой формулы позволяет найти рекуррентную связь для нахождения коэффициентов в разложении $y(-x)^s = (-1)^s yx^s+\varepsilon_{s1}yx^{s+1}+\varepsilon_{s2}yx^{s+2}+\ldots$. Эта связь такова: $\varepsilon_{si}=-\varepsilon_{s\,i-1}-\varepsilon_{s-1\,i}$. С помощью этой связи мы составим с 5-кратной точностью для $s \leqslant 8$ следующую вспомогательную таблицу знаков:

$s=n-k=$	I	2	3	4	5	6	7	8
	−	+	−	+	−	+	−	+
	+	+	0	−	−	0	+	+
	−	0	0	+	0	0	−	0
	+	−	+	+	−	+	0	0
	−	−	0	−	−	0	0	0

По таблице знаков мы преобразуем $\sigma \longmapsto \tilde{\sigma}$, находя следующую таблицу преобразованных координат:

③	I 2				
④	I $\bar{2}$	$\bar{2}$ 3			
⑤	2	$\bar{2}$ $\bar{3}$	3		
⑥	$\bar{\mathrm{I}}$ $\bar{2}$	3	3	$\bar{\mathrm{I}}$ $\bar{2}$ $\bar{3}$ 4 5	
⑦	$\bar{\mathrm{I}}$ 2	2 $\bar{3}$		$\bar{\mathrm{I}}$ 2 4 $\bar{5}$	2 $\bar{3}$ $\bar{5}$ 6

⑨	I 2 3 4 5 6 7 8				
⑩	I $\bar{2}$ 4 $\bar{5}$ 7 $\bar{8}$	$\bar{2}$ 3 $\bar{5}$ 6 $\bar{8}$ 9			
⑪	2 5 8	$\bar{2}$ $\bar{3}$ $\bar{5}$ $\bar{6}$ $\bar{8}$ $\bar{9}$	3 6 9		
⑫	3 4 5 $\bar{6}$ $\bar{7}$ $\bar{8}$	3 6 9	3 6 9	$\bar{4}$ $\bar{5}$ $\bar{6}$ 7 8 9	
⑬	4 $\bar{5}$ $\bar{7}$ 8	$\bar{5}$ 6 8 $\bar{9}$		$\bar{4}$ 5 7 $\bar{8}$	5 $\bar{6}$ $\bar{8}$ 9

Поясним схему преобразования координат при $\sigma \longmapsto \tilde{\sigma}$. Например, мы хотим узнать, во что перейдет слагаемое V_5^9 из σ (имеющее знак +I) при замене $x \longmapsto -x$. Для этого по 4-му столбцу (9 − 5 = 4) таблицы знаков мы находим $V_5^9 \longmapsto V_5^9 - V_5^{10} + V_5^{11} + V_5^{12} - V_5^{13}$. Аналогично, по 7-му столбцу таблицы знаков мы (для замены координаты I0-й степени $\bar{3}$ в соотношении σ) получим преобразование $-V_3^{10} \longmapsto V_3^{10} - V_3^{11} + V_3^{12}$, что и отражено в соответствующем столбце таблицы преобразованных координат.

Для получения $\tilde{\sigma}$ нам остается произвести обычное сложение по модулю 3 в строках таблицы преобразованных координат. Получаем:

$$\tilde{\sigma} = (\overset{\textcircled{3}}{\mathrm{I}\,2} \mid \overset{\textcircled{4}}{\mathrm{I}\,2\,3} \mid \overset{\textcircled{6}}{\mathrm{I}\,2\,3\,4\,5} \mid \overset{\textcircled{7}}{\mathrm{I}\,2\,3\,4\,5\,6} \,\|\, \overset{\textcircled{9}}{\mathrm{I}\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8} \mid \overset{\textcircled{10}}{\mathrm{I}\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9}).$$

Складывая и вычитая соотношения σ и $\tilde{\sigma}$, мы получим соотношения:

$$\sigma' = (\overset{\textcircled{3}}{\mathrm{I}} \mid \overset{\textcircled{4}}{\bar{\mathrm{I}}} \mid \overset{\textcircled{5}}{\bar{3}} \mid \overset{\textcircled{6}}{\mathrm{I}\,3\,4} \mid \overset{\textcircled{7}}{\bar{\mathrm{I}}\,\bar{4}} \mid \overset{\textcircled{9}}{\mathrm{I}\,3\,5\,7} \mid \overset{\textcircled{10}}{\bar{\mathrm{I}}\,\bar{4}\,5\,6\,\bar{7}} \mid \overset{\textcircled{11}}{\bar{3}\,6\,\bar{9}} \mid \overset{\textcircled{12}}{4\,\bar{5}\,6\,7\,\bar{8}\,9} \mid \overset{\textcircled{13}}{\bar{5}\,\bar{6}\,\bar{8}\,\bar{9}})$$

$$\sigma'' = (\overset{3}{2} \mid \overset{4}{\bar{1}\,2\,3} \mid \overset{5}{3} \mid \overset{6}{2\,5} \mid \overset{7}{\bar{1}\,2\,3\,\bar{4}\,5\,6} \,\|\, \overset{9}{2\,4\,6\,8} \mid \overset{10}{\bar{1}\,2\,3\,\bar{4}\,\bar{7}\,8\,9} \mid .$$

$$\overset{11}{3\,\bar{6}\,9} \mid \overset{12}{\bar{4}\,5\,\bar{6}\,\bar{7}\,8\,\bar{9}} \mid 5\,6\,8\,9).$$

Эти соотношения ложатся в основу всех дальнейших преобразований. В результате нахождения новых соотношений соотношения σ', σ'' будут уточняться и упрощаться.

4°. <u>Получение соотношений для исключения троек</u>. Умножая соотношения σ', σ'' нужно число раз на x и y, мы получим соотношения для исключения троек, т.е. соотношения с первой координатой 3. (Исключение троек - частный случай условного редуцирования по модулю p, о чем шла речь в пункте 2° из § I.) При составлении таблицы соотношений для исключения троек мы заодно будем получать соотношения с координатами ± 1, которые будем называть унитальными. По мере получения новых соотношений, полученные ранее уточняются.

Заметим, что для координат 8-й степени возможна безусловная редукция по модулю 3, что сразу же видно, если умножить 5 раз на x или y соотношения σ', σ''. Тем более это же верно для координат степени $\geqslant 8$. При исключении троек в координатах 7-ой степени требуется поправка координат I3-й степени. Эти соотношения 7-й степени для исключения троек получаются если соотношения σ', σ'' четырежды умножить на x, y. При этом мы можем использовать полученные в [I] соотношения I3-й степени:

$\overset{13}{(1\,3\,5)}$ $\overset{13}{(2\,4\,6)}$ ... $\overset{13}{(7\,9\,11)}$ $\overset{13}{(8\,10\,12)}$. Итак, четырехкратные умножения соотношений σ', σ'' на x, y по формулам (3), (3′) и использование только что приведенных соотношений I3-й степени дают нам следующие соотношения 7-й степени для исключения троек:

$$\left.\begin{matrix} (\overset{7}{1} \,\|\, \overset{13}{1}) & (\overset{7}{2} \,\|\, \overset{13}{2}) & (\overset{7}{3} \,\|\, \overset{13}{3}) \\ (\overset{7}{4} \,\|\, \overset{13}{10}) & (\overset{7}{5} \,\|\, \overset{13}{11}) & (\overset{7}{6} \,\|\, \overset{13}{12}) \end{matrix}\right\} \qquad (26)$$

Теперь перейдем к нахождению соотношений 6-й степени. Умножим соотношения σ', σ'' на x, y три раза, применяя формулы (3), (3′) и исключив координаты 7-й степени при помощи (26). Здесь бывает полезной неоднозначность в получении соотношений с одинаковыми первыми координатами. Например, $\sigma' x^2 y = (\overset{6}{2} \,\|\, \ldots)$ и $\sigma'' x^3 = (\overset{6}{2} \,\|\, \ldots)$. Мы оставляем оба эти варианта с тем, чтобы после их сравнения иметь возможность получить новые унитальные соотношения. Соотношения 6-й степени оказываются следующими:

$$\left.\begin{array}{l}
(\overset{\textcircled{6}\textcircled{12}}{1}\|1\ 3\ 5\ 7|\overset{\textcircled{13}}{\overline{4}}\ 5\ 6\ \overline{7}) \\
(2\|2\ 4\ 6\ 8|\overline{5}\ 6\ 7\ \overline{8})=(\overset{\textcircled{6}\textcircled{12}}{2}\|2\ 4\ 6\ 8|\overset{\textcircled{13}}{\overline{4}}\ \overline{7}\ 8\ 9) \\
(3\|3\ 5\ 7\ 9|\overline{6}\ 7\ 8\ \overline{9})=(3\|3\ 5\ 7\ 9|\overline{5}\ \overline{8}\ 9\ 10) \\
(4\|4\ 6\ 8\ 10|\overline{7}\ 8\ 9\ \overline{10})=(4\|4\ 6\ 8\ 10|\overline{6}\ \overline{9}\ 10\ 11) \\
\qquad\qquad\qquad\quad (5\|5\ 7\ 9\ 11|\overline{7}\ \overline{10}\ 11\ 12)
\end{array}\right\} \qquad (27)$$

Сравнение неоднозначно записанных соотношений приводит здесь к повторению уже известных соотношений 13-й степени.

Соотношения 5-й степени, получаемые как уже описано, имеют следующий вид:

$$\left.\begin{array}{l}
(\overset{\textcircled{5}\textcircled{11}}{1}\|1\ 3\ 5\ 7|\overset{\textcircled{12}}{3}\ \overline{4}\ \overline{5}\ 6|\overset{\textcircled{13}}{\overline{5}}\ 8) \\
(2\|2\ 4\ 6\ 8|4\ \overline{5}\ \overline{6}\ 7|\overline{6}\ 9)=(\overset{\textcircled{5}\textcircled{11}}{2}\|2\ 4\ 6\ 8|\overset{\textcircled{12}}{3}\ 4\ \overline{6}\ \overline{7}|\overset{\textcircled{13}}{7}\ \overline{10}) \\
(3\|3\ 5\ 7\ 9|5\ \overline{6}\ \overline{7}\ 8|\overline{7}\ 10)=(3\|3\ 5\ 7\ 9|4\ 5\ \overline{7}\ \overline{8}|8\ \overline{11}) \\
\qquad\qquad\qquad\quad (4\|4\ 6\ 8\ 10|5\ 6\ \overline{8}\ \overline{9}|9\ \overline{12})
\end{array}\right\} \qquad (28)$$

Здесь использование неоднозначно записанных соотношений дает новые унитальные соотношения 12-й степени:

$$(\overset{\textcircled{12}}{3}\ 5\ 7|\overset{\textcircled{13}}{5}\ \overline{6}\ \overline{7}\ 8) \qquad (\overset{\textcircled{12}}{4}\ 6\ 8|\overset{\textcircled{13}}{\overline{5}}\ 6\ 7\ \overline{8}) \qquad (\overset{\textcircled{12}}{5}\ 7\ 9|\overset{\textcircled{13}}{5}\ \overline{6}\ \overline{7}\ 8) \qquad (29)$$

Эти соотношения уточняют известные из [1] соотношения 12-й степени.

Совершенно так же получаем соотношения 4-й степени:

$$\left.\begin{array}{l}
(\overset{\textcircled{4}\textcircled{10}}{1}\|1\ 3\ 5\ 7|\overset{\textcircled{11}}{3}\ \overline{4}\ \overline{5}\ 6|\overset{\textcircled{12}}{3}\ \overline{4}\ \overline{6}\ 7|\overset{\textcircled{13}}{2}\ 3) \\
(2\|2\ 4\ 6\ 8|4\ \overline{5}\ \overline{6}\ 7|4\ \overline{5}\ \overline{7}\ 8|3\ 4)= \\
\qquad\qquad =(\overset{\textcircled{4}\textcircled{10}}{2}\|2\ 4\ 6\ 8|\overset{\textcircled{11}}{3}\ 4\ \overline{6}\ \overline{7}|\overset{\textcircled{12}}{4}\ 7|\overset{\textcircled{13}}{5}\ \overline{6}\ \overline{7}) \\
\qquad\qquad\ \ (3\|3\ 5\ 7\ 9|4\ 5\ \overline{7}\ \overline{8}|5\ 8|6\ \overline{7}\ \overline{8})
\end{array}\right\} \qquad (30)$$

Применяем здесь уже упомянутое сравнение соотношений с одинаковой первой координатой, а также еще один прием – симметризацию. Под симметризацией мы будем понимать получение из соотношения ему симметричного заменой $x \longleftrightarrow y$. Так симметризация первого из соотношений (30) дает соотношение $(\overset{\textcircled{4}\textcircled{10}}{3}\|3\ 5\ 7\ 9|\overset{\textcircled{11}}{5}\ \overline{6}\ \overline{7}\ 8|\overset{\textcircled{12}}{\overline{5}}\ \overline{6}\ \overline{8}\ 9|\overset{\textcircled{13}}{10}\ 11)$. В результате сравнений и симметризации из (30) мы можем получить два унитальных соотношения 11-й степени:

$$\left.\begin{array}{l}
(\overset{\textcircled{11}}{3}\ 5\ 7|\overset{\textcircled{12}}{5}\ \overline{6}\ \overline{7}\ 8|\overset{\textcircled{13}}{4}\ \overline{7}) \\
(4\ 6\ 8|4\ \overline{5}\ \overline{6}\ 7|3\ \overline{6})
\end{array}\right\} \qquad (31)$$

Наконец, мы получаем соотношения 3-й степени, как результат обработки соотношений σ', σ'':

$$\sigma' = (\overset{(3)}{\mathrm{I}} \,|\, \overset{(9)}{\mathrm{I}}\; 3\; 5\; 7 \mid \overset{(10)}{3}\; \bar{4}\; \bar{5}\; 6 \mid \overset{(11)}{3}\; \bar{4}\; \bar{6}\; 7 \mid \overset{(12)}{\bar{\mathrm{I}}}\; 3\; \bar{6}\; 7\; \overline{\mathrm{I0}} \mid \overset{(13)}{2}\; \bar{5})$$
$$\sigma'' = (2 \,\|\, 2\; 4\; 6\; 8 \mid 3\; 4\; \bar{6}\; \bar{7} \mid \bar{4}\; 7 \mid \bar{2}\; 3\; \bar{4}\; 6\; \overline{\mathrm{II}} \mid \bar{3}\; \bar{4}\; 5\; 8)$$

Сравнение симметризации первого, т.е. соотношения

$$(\overset{(3)}{2} \,\|\, \overset{(9)}{2}\; 4\; 6\; 8 \mid \overset{(10)}{4}\; \bar{5}\; \bar{6}\; 7 \mid \overset{(11)}{4}\; \bar{5}\; \bar{7}\; 8 \mid \overset{(12)}{\bar{2}}\; 5\; \bar{6}\; 9\; \overline{\mathrm{II}} \mid \overset{(13)}{\bar{8}}\; \mathrm{II})$$

со вторым σ'' дает унитальное соотношение I0-й степени:

$$(\overset{(10)}{3}\; 5\; 7 \mid \overset{(11)}{\bar{4}}\; 5\; 6\; \bar{7} \mid \overset{(12)}{\bar{3}}\; 6 \mid \overset{(13)}{\bar{5}}\; 6\; 7\; \bar{8}) \,. \qquad (32)$$

5°. Предварительная таблица соотношений. Для исключения троек мы имеем теперь систему соотношений, начинающуюся с улучшенного варианта соотношений σ', σ'' и затем соотношений (30),(28), (27),(26) (в порядке возрастания степеней). При получении унитальных соотношений мы еще не использовали всех средств, примененных в [I]. Попытаемся дополнить наш набор унитальных соотношений. Как и в [I] мы имеем единственное соотношение I0-й степени. (Здесь оно лишь уточнено.) Оказывается, его дополнить нечем. Действительно, заменив, как в [I], y на yx в соотношении σ', мы получим: $\sigma'(x,yx) = (\overset{(4)}{\mathrm{I}} \,\|\, \overset{(10)}{\mathrm{I}} \mid \overset{(13)}{\bar{\mathrm{I}}})$, что в сравнении с первым соотношением 4-й степени (30) дает соотношение:

$$(\overset{(10)}{3}\; 5\; 7 \mid \overset{(11)}{3}\; \bar{4}\; \bar{5}\; 6 \mid \overset{(12)}{3}\; \bar{4}\; \bar{6}\; 7 \mid \overset{(13)}{\mathrm{I}}\; 2\; 3),$$

легко приводящееся к уже найденному соотношению (32). То же самое происходит при рассмотрении соотношения $\sigma''(yx, y)$.

Однако можно получить два новых соотношения II-й степени, пользуясь тем же приемом, что и в [I]. Действительно, имеем:

$$\sigma'(x,3y) = (\overset{(5)}{3} \,\|\, \overset{(11)}{3}) \qquad \sigma''(3x,y) = (\overset{(5)}{2} \,\|\, \overset{(11)}{8}).$$

На основании (28) это дает нам новые соотношения II-й степени:

$$\left.\begin{array}{l} (\overset{(11)}{5}\; 7\; 9 \mid \overset{(12)}{5}\; \bar{6}\; \bar{7}\; 8 \mid \overset{(13)}{\bar{7}}\; \mathrm{I0}) \\ (2\; 4\; 6 \mid 4\; \bar{5}\; \bar{6}\; 7 \mid \bar{6}\; 9) \end{array}\right\} \qquad (33)$$

(симметричные друг другу).

Таким образом, мы имеем теперь следующую систему унитальных соотношений:

$$\left.\begin{array}{lll} & (\overset{10}{3}\;5\;7\,|\,\overset{11}{\bar{4}}\;5\;6\;\bar{7}\,|\,\overset{12}{\bar{3}}\;6\,|\,\overset{13}{\bar{5}}\;6\;7\;\bar{8}) & \\ (\overset{11}{2}\;4\;6\,|\,\overset{12}{4}\;\bar{5}\;\bar{6}\;7\,|\,\overset{13}{\bar{6}}\;9) & (\overset{12}{2}\;4\;6\,|\,\overset{13}{4}\;\bar{5}\;\bar{6}\;7) & (\overset{13}{1}\;3\;5) \\ (3\;5\;7\,|\,5\;\bar{6}\;\bar{7}\;8\,|\,4\;\bar{7}) & (3\;5\;7\,|\,5\;\bar{6}\;\bar{7}\;8) & (2\;4\;6) \\ (4\;6\;8\,|\,4\;\bar{5}\;\bar{6}\;7\,|\,3\;\bar{6}) & (4\;6\;8\,|\,\bar{5}\;6\;7\;\bar{8}) & \ldots\ldots \\ (5\;7\;9\,|\,5\;\bar{6}\;\bar{7}\;8\,|\,\bar{7}\;10) & (5\;7\;9\,|\,5\;\bar{6}\;\bar{7}\;8) & \ldots\ldots \\ & (6\;8\;10\,|\,6\;\bar{7}\;\bar{8}\;9) & (8\;10\;12) \end{array}\right\}\qquad (34)$$

6°. <u>Уточнение соотношений II-й степени</u>. Далее мы новыми подстановками различных элементов вместо x, y в соотношения σ', σ'' (улучшенные в 4°) при подсчетах с высокой степенью точности найдем такие соотношения, которых не удалось найти в [I] при подсчетах там с I-кратной точностью. Именно, мы сейчас вычислим соотношение $\sigma'(2x,y)$ и с помощью него покажем, что трехчленные соотношения - начиная с соотношений II-й степени - расщепляются на двучленные.

Подстановка $x \longmapsto 2x$ осуществляется аналогично подстановке $x \longmapsto -x$ в пункте 3°. Для облегчения подсчетов преобразованных координат, как и там, составим таблицу знаков:

$s=n-k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−
	+	+	0	−	−	0	+	+	0	−	−
	0	+	0	0	−	0	0	+	0	0	−
	0	0	+	−	+	+	−	+	0	0	0
	0	0	0	+	+	−	+	+	0	0	0

Как и в 3° здесь s-й столбец состоит из знаков ε_{si}, участвующих в качестве коэффициентов в разложении:

$$y(2x)^s = \varepsilon_{s0}\, yx^s + \varepsilon_{s1}\, yx^{s+1} + \varepsilon_{s2}\, yx^{s+2} + \ldots\ .$$

Построение таблицы знаков опирается на рекуррентную связь $\varepsilon_{si} = \varepsilon_{s-1\, i-1} - \varepsilon_{s-1\, i}$, выводимую из равенства $y(2x) = 2yx + yx^2$. При помощи таблицы знаков удобно находить с 5-кратной точностью коэффициенты в разложении по базису произведения $y(2x)^{n-k} y^{k-1}$, в которое переходит базисный одночлен $V^n_k = yx^{n-k} y^{k-1}$ <u>при подстановке</u> $x \mapsto 2x$. Итак, проведем вычисление соотношения $\sigma'(2x,y)$. Таблица преобразованных координат здесь следующая:

3	I
4	I
5	I
6	
7	

9	I 3 5 7				
10	I $\bar{5}$ 7	$\bar{3}$ $\bar{4}$ 5 6			
11	I 7	3 5 $\bar{6}$	3 4 6 7		
12	I 3 $\bar{5}$	5	3 $\bar{4}$ 6 $\bar{7}$	I $\bar{3}$ 6 $\bar{7}$ $\bar{\mathrm{I0}}$	
13	I 5	$\bar{3}$ $\bar{4}$ $\bar{5}$ $\bar{6}$	3 6	I $\bar{7}$ $\bar{\mathrm{I0}}$	$\bar{2}$ $\bar{5}$

Сложение по строкам этой таблицы дает следующий результат:

$$\sigma'(2x,y)=(\overset{(3)}{\mathrm{I}}|\overset{(4)}{\mathrm{I}}|\overset{(5)}{\mathrm{I}}\|\overset{(9)}{\mathrm{I}}\ 3\ 5\ 7|\overset{(10)}{\mathrm{I}}\ \bar{3}\ \bar{4}\ 6\ 7|\overset{(11)}{\mathrm{I}}\ \bar{3}\ 4\ 5\ \bar{7}|\overset{(12)}{\bar{\mathrm{I}}}\ 3\ \bar{4}\ 7\ \overline{\mathrm{I}0}|$$
$$\overset{(13)}{\mathrm{I}}\ \bar{2}\ \bar{4}\ \bar{5}\ \bar{7}\ \overline{\mathrm{I}0})$$

Исключение здесь троек (т.е. первых трех компонент) с помощью соотношений из 4^0 приводит к двучленному соотношению II-й степени:

$$(\overset{(11)}{\bar{3}}\ 5|\overset{(12)}{3}\ 4\ 5\ 6\ \bar{7}|\overset{(13)}{\bar{\mathrm{I}}}\ \bar{3}\ \bar{4}\ 5\ \bar{7}\ \bar{8}\ \overline{\mathrm{I}0})$$

Это соотношение с помощью унитальных соотношений (34) из 5^0 I2-й и I3-й степени приходит к виду:

$$(\overset{(11)}{\bar{3}}\ 5|\overset{(12)}{7}\ \bar{8}|\overset{(13)}{9}) \tag{35}$$

Сложением этого соотношения с соотношениями II-й степени из (34) и заменой $x \longleftrightarrow y$ мы получим следующие соотношения:

$$\begin{array}{ll} (\bar{3}\ 5|7\ \bar{8}|9) & (6\ \bar{8}|\bar{4}\ 5|4) \\ (\bar{5}\ 7|5\ \bar{6}|4) & (4\ \bar{6}|\bar{6}\ 7|9) \\ (\bar{7}\ 9|5\ \bar{6}|\bar{7}\ \overline{\mathrm{I}0}) & (2\ \bar{4}|\bar{4}\ 5|\bar{3}\ \bar{6}) \end{array}$$

Придадим этим соотношениям более симметричную форму и запишем вытекающие из них соотношения I2-й степени:

$$\begin{array}{llll} (3\ \bar{5}|6\ \bar{9}|\bar{7}) & (6\ \bar{8}|3\ \bar{6}|6) & (3\ \bar{5}|6\ \bar{7}) & (2\ \bar{4}|\bar{6}\ 7) \\ (5\ \bar{7}|6\ \bar{7}|\bar{7}) & (4\ \bar{6}|5\ \bar{6}|6) & (5\ \bar{7}|6\ \bar{7}) & (4\ \bar{6}|\bar{6}\ 7) \\ (7\ \bar{9}|\bar{5}\ 6|\bar{7}) & (2\ \bar{4}|\bar{6}\ 7|6) & (7\ \bar{9}|6\ \bar{7}) & (6\ \bar{8}|\bar{6}\ 7) \\ & & & (8\ \overline{\mathrm{I}0}|\bar{6}\ 7) \end{array} \tag{36}$$

7^0. <u>Класс нильпотентности группы</u>. Сейчас мы покажем, что тринадцатый фактор $G^{13}/G^{14}=M_{13}$ нильпотентного ряда группы G тривиален, т.е. соотношениями I3-й степени являются все одночлены $v_k^{13}=\overset{(13)}{(k)}$, $1\leqslant k\leqslant 12$.

Из полученного в 6^0 расщепления трехчленных соотношений, с учетом всех соотношений, найденных еще в [I], мы находим в M_{13} соотношения:

$$(\mathrm{I}\ \bar{3})\quad (2\ \bar{4})\quad (3\ \bar{5})\quad (4\ \bar{6})\quad (5\ \bar{7})\quad (6\ \bar{8})\quad (7\ \bar{9})\quad (8\ \overline{\mathrm{I}0})$$
$$(9\ \overline{\mathrm{II}})\quad (\mathrm{I}0\ \overline{\mathrm{I}2}).$$

Далее, двумя подсчетами мы хотим расщепить эти двучленные соотношения на одночленные и тем самым установить тривиальность $M_{13}=0$.

Подсчитаем $\sigma'(5x,y)$. На основании равенства $y(5x)=5yx+$ $+10yx^2+10yx^3+5yx^4+yx^5$ мы для таблицы знаков находим рекуррентную связь:

$$\varepsilon_{si}=\varepsilon_{s-1\,i-4}-\varepsilon_{s-1\,i-3}+\varepsilon_{s-1\,i-2}+\varepsilon_{s-1\,i-1}-\varepsilon_{s-1\,i}\ ,$$

а по ней составляем таблицу знаков:

$s=n-k=$	I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II
	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−
	+	+	0	−	−	0	+	+	0	−	−
	+	−	0	−	+	0	+	−	0	−	+
	−	+	+	0	0	+	+	−	0	+	−
	+	0	0	0	+	0	−	+	0	−	0

Подсчитываем преобразованные координаты:

③	I	⑨	I 3 5 7				
④	I	⑩	I $\bar{5}$ 7	$\bar{3}$ $\bar{4}$ 5 6			
⑤	$\bar{\text{I}}$	⑪	$\bar{\text{I}}$ $\bar{5}$ $\bar{7}$	3 5 $\bar{6}$	3 4 6 7		
⑥	I	⑫	$\bar{\text{I}}$ 3 7	3 $\bar{5}$ $\bar{6}$	3 $\bar{4}$ 6 $\bar{7}$	I $\bar{3}$ $\bar{6}$ $\bar{7}$ $\overline{\text{I0}}$	
⑦		⑬	I	3 $\bar{4}$	$\bar{3}$ $\bar{4}$ $\bar{6}$ $\bar{7}$	I $\bar{7}$ $\overline{\text{I0}}$	$\bar{2}$ $\bar{5}$

Отсюда:

$$\sigma'(5x,y)=(\overset{(3)}{\text{I}}|\overset{(4)}{\text{I}}|\overset{(5)}{\bar{\text{I}}}|\overset{(6)}{\text{I}}\,\|\,\overset{(9)}{\text{I}}\;3\;5\;7|\overset{(10)}{\text{I}}\;\bar{3}\;\bar{4}\;6\;7|\overset{(11)}{\bar{\text{I}}}\;\bar{3}\;4|\overset{(12)}{\bar{3}}\;\bar{4}\;\bar{5}\;\bar{6}\;\bar{7}\;\overline{\text{I0}}\,|$$
$$\overset{(13)}{\bar{\text{I}}}\;\bar{2}\;4\;\bar{5}\;\bar{6}\;7\;\overline{\text{I0}}).$$

Исключая четыре тройки, получаем соотношение:

$$(\overset{(11)}{3}\;\bar{5}|\overset{(12)}{\bar{4}}\;\bar{6}\;\bar{7}|\overset{(13)}{\bar{\text{I}}}\;\bar{3}\;\bar{4}\;5\;6\;\bar{7}\;8\;\overline{\text{I0}}).$$

При помощи соотношений (36) мы получаем соотношение $(\overset{(13)}{6}\;\bar{7})$, т.е. в группе G базисные одночлены V_k^{13} I3-й степени с четными и нечетными k равны друг другу. В модуле M_{13} остался один параметр. Последний подсчет уничтожает и его.

Последним нашим подсчетом будет вычисление соотношения $\sigma'(4x,y)$. Используя равенство $y(4x)=4yx+6yx^2+4yx^3+yx^4$, получаем рекуррентную связь:

$$\varepsilon_{si}=\varepsilon_{s-1\,i-3}+\varepsilon_{s-1\,i-2}+\varepsilon_{s-1\,i}\,.$$

Эта связь определяет следующую таблицу знаков:

$s=n-k=$	I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II
	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	+	−	0	+	−	0	+	−	0	+	−
	+	−	0	+	−	0	+	−	0	+	−
	0	+	0	0	+	0	0	+	0	0	+

По таблице знаков находятся преобразованные координаты:

③	I	⑨	I 3 5 7				
④		⑩		$3\ \bar{4}\ \bar{5}\ 6$			
⑤	$\bar{I}$	⑪	$\bar{I}\ \ 5\ \bar{7}$		$3\ \bar{4}\ \bar{6}\ 7$		
⑥	$\bar{I}$	⑫	$\bar{I}\ \ 5\ \bar{7}$	$3\ \ 5\ 6$		$\bar{I}\ 3\ \bar{6}\ 7\ \bar{I0}$	
⑦	I	⑬	I	$3\ \ 5\ 6$	$\bar{3}\ \bar{4}\ 6\ 7$		$2\ \bar{5}$

Суммирование по строкам приводит к результату:

$$\sigma'(4x,y)=\big(\overset{③}{I}\,\big|\,\overset{⑤}{\bar{I}}\,\big|\,\overset{⑥}{\bar{I}}\,\big|\,\overset{⑦}{I}\,\big\|\,\overset{⑨}{I}\ 3\ 5\ 7\,\big|\,\overset{⑩}{3}\ \bar{4}\ \bar{5}\ 6\,\big|\,\overset{⑪}{\bar{I}}\ 3\ \bar{4}\ 5\ \bar{6}\,\big|\,\overset{⑫}{I}\ \bar{3}\ \bar{5}\ \bar{I0}\,\big|\,\overset{⑬}{I}\ 2\ \bar{4}\ \bar{6}\ 7\big).$$

Исключение здесь троек дает сначала соотношение II-й степени:

$$\big(\overset{⑪}{3\ \bar{5}}\,\big|\,\overset{⑫}{\bar{4}\ \bar{5}\ \bar{6}}\,\big|\,\overset{⑬}{2\ 4\ 5}\big),$$

а из него следует одночленное соотношение I3-й степени $\overset{⑬}{(7)}$, что и завершает доказательство тривиальности фактора M_{13} .

8°. <u>Факторы нильпотентного ряда</u>. Можно завершить описание всех факторов $M_i=G^i/G^{i+1}$ нильпотентного ряда нашей группы $G = MB(2,9)$. Обозначим порядки факторов: $|M_i|=3^{d_i}$. Тогда

$$i = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12$$
$$d_i = 4\ 2\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 8\ \ 4\ \ 4$$

Отсюда $\sum d_i=57$ и $|G|=3^{57}$.

Приведем соотношения в факторах M_i и в самой группе G .

$M_1=\langle x,y,3x,3y\,|\,9x=9y=0\rangle$. И в группе G: $9x=9y=0$.

$M_2=\langle yx, 3yx\,|\,9yx=0\rangle$. И в G: $9yx=0$.

$M_3=\langle yx^2, yxy\,|\,3yx^2=3yxy=0\rangle$. В группе G соотношения:

$$3yx^2=-yx^8-yx^6y^2-yx^4y^4-yx^2y^6\,|+yx^7y^2+yx^6y^3-yx^4y^5-yx^3y^6\,|-yx^7y^3+yx^4y^6\,|+yx^{11}-yx^7y^4+yx^6y^5,$$
$$3yxy=-yx^7y-yx^5y^3-yx^3y^5-yxy^7\,|+yx^7y^2-yx^6y^3+yx^4y^5+yx^3y^6\,|+yx^7y^3-yx^4y^6\,|+yx^6y^5-yx^5y^6+yxy^{10}.$$

$M_4=\langle yx^3, yx^2y, yxy^2\,|\,3yx^3=3yx^2y=3yxy^2=0\rangle$. В G:

$$3yx^3=-yx^9,\ 3yx^2y=-yx^8y-yx^6y^3-yx^4y^5-yx^2y^7\,|+yx^7y^4-yx^6y^5,\ 3yxy^2=-yxy^8.$$

$M_5=\langle yx^4,\dots,yxy^3\,|\,3yx^4=\dots=3yxy^3=0\rangle$. В G:

$$3yx^4=-yx^{10},\ 3yx^3y=-yx^9y,\ 3yx^2y^2=-yx^2y^8,\ 3yxy^3=-yxy^9.$$

$M_6=\langle yx^5,\dots,yxy^4\,|\,3yx^5=\dots=3yxy^4=0\rangle$. В G:

$$3yx^5=-yx^{11},\ 3yx^4y=-yx^{10}y,\ 3yx^3y^2=-yx^9y^2,\ 3yx^2y^3=-yx^2y^9,\ 3yxy^4=-yxy^{10}.$$

Далее в модулях M_7, M_8, M_9 образующие и соотношения (вместе с соответствующими им соотношениями в G) очевидны.

$$M_{10}=\langle yx^9,\dots,yxy^8\,|\,3yx^9=\dots=3yxy^8=0,\ yx^7y^2+yx^5y^4+yx^3y^6=0\rangle.$$

В группе G : $yx^7y^2+yx^5y^4+yx^3y^6=-yx^7y^4+yx^6y^5$.

$$M_{11}=\langle yx^{10},\dots,yxy^{9} \mid 3yx^{10}=\dots=3yxy^{9}=0,\ yx^{9}y=yx^{7}y^{3}=yx^{5}y^{5}=yx^{3}y^{5},$$
$$yx^{8}y^{2}=yx^{6}y^{4}=yx^{4}y^{6}=yx^{2}y^{8}\rangle .$$

В группе G :

$$yx^{9}y-yx^{7}y^{3}=-yx^{9}y^{2}+yx^{6}y^{5},\ yxy^{7}y^{3}-yxy^{5}y^{5}=yx^{6}y^{5}-yx^{5}y^{6},\ yx^{5}y^{5}-yx^{3}y^{7}=yx^{6}y^{5}-yx^{5}y^{6},$$
$$yx^{8}y^{2}-yx^{6}y^{4}=yx^{7}y^{4}-yx^{6}y^{5},\ yx^{6}y^{4}-yx^{4}y^{6}=-yx^{7}y^{4}+yx^{6}y^{5},\ yx^{4}y^{6}-yx^{2}y^{8}=-yx^{6}y^{5}+yx^{3}y^{8}.$$
$$M_{12}=\langle yx^{11},\dots,yxy^{10} \mid 3yx^{11}=\dots=3yxy^{10}=0,\ yx^{10}y=yx^{8}y^{3}=yx^{6}y^{5}=yx^{4}y^{7}=yx^{2}y^{9},$$
$$yx^{9}y^{2}=yx^{7}y^{4}=yx^{5}y^{6}=yx^{3}y^{8}\rangle .$$

В группе G соотношения те же.

§ 3. Метабелева группа экспоненты 8

Вычисления в этом параграфе изложены короче, чем в предыдущем. Класс нильпотентности группы $G=MB(2,8)$ в этом параграфе считается заранее известным (он также равен 12, см. [10]), и поэтому мы сразу полагаем $G^{13}=0$. Однако, усложнение ситуации в связи с переходом к кубу простого числа, каковой является экспонента 8, приводит к дополнительному этапу редуцирования координат: здесь строятся таблицы для исключения сначала четверок, а затем - двоек. (Аналогичные вычисления в 2 были ошибочными.)

1^{0}. Собирательная формула по модулю G^{13} и ее обработка. При вычислениях устанавливаются р е д у к ц и и : слагаемые степеней $\leqslant 6$ редуцируются по модулю 8, степеней 7 и 8 - по модулю 4, степеней 9, 10, 11, 12 - по модулю 2. Редукции обосновываются тем, что, как будет видно в 5^{0} $2G^{9}\subset G^{13}$, а отсюда и на основании 2^{0}, имеет место $4G^{7}\subset G^{13}$. Слагаемые же 13-й степени, как уже сказано, отбрасываются. (См. аналогичное рассуждение в [2], с.137.)

Коэффициенты собирательной формулы найдем по формуле (23) и подвергнем принятым сейчас редукциям. Запишем полученное соотношение в виде координатной строки, указывая все ненулевые координаты:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccc}
② & ③ & ④ & & & ⑤ & & & ⑥ & & & & & ⑦ & ⑧ & & & & & & & ⑨ & & & & ⑩ & & & \\
\end{array}$$
$$\sigma=\left(\begin{array}{c|c|ccc|ccc|ccccc|c|ccccccc|cccc|cccc}
1&2&1&2&3&2&3&4&1&2&3&4&5&4&1&2&3&4&5&6&7&2&4&6&8&3&4&7&8\\
4&4&6&2&2&2&4&2&4&4&2&2&4&2&1&3&1&3&3&1&3&1&1&1&1&1&1&1&1
\end{array}\right.$$
$$\begin{array}{cccccc}
⑪ & & ⑫ & & & \\
\end{array}$$
$$\left.\begin{array}{cc|cccc}
4&8&5&6&7&8\\
1&1&1&1&1&1
\end{array}\right).$$

Приступаем к обработке этого элемента. Пользуясь формулами (3), (3′), будем домножать σ на x и y и с помощью полученных соотношений исключим в σ четверки во всех координатах, начиная с координат 3-ей степени. Сначала умножим σ на y :

$$\sigma y=\left(\begin{array}{c|c|ccc|ccc|cc|c|ccccccc|cccc|cccc|cc} \overset{3}{2} & \overset{4}{3} & \overset{5}{2} & 3 & 4 & \overset{6}{3} & 4 & 5 & \overset{7}{4} & 5 & \overset{8}{5} & \overset{9}{2} & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \overset{10}{3} & 5 & 7 & 9 & \overset{11}{4} & 5 & 8 & 9 & \overset{12}{5} & 9 \\ 4 & 4 & 6 & 2 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Теперь получим новое соотношение $\sigma+\sigma y=\sigma^*$, немного более удобное для дальнейшего:

$$\sigma^*=\left(\begin{array}{c|ccc|cc|ccccc|c|ccccccc|ccc|cccc|cc|cccc} \overset{2}{1} & \overset{4}{1} & 2 & 3 & \overset{5}{3} & 4 & \overset{6}{1} & 2 & 3 & 4 & 5 & \overset{7}{5} & \overset{8}{1} & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \overset{9}{3} & 5 & 7 & \overset{10}{4} & 5 & 8 & 9 & \overset{11}{5} & 9 & \overset{12}{6} & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 2 & 6 & 6 & 4 & 4 & 4 & 4 & 6 & 6 & 2 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Для исключения четверок в координатах элемента σ^* мы из него же образуем следующие соотношения:

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c|cc|ccccccc|ccc|cccc} \overset{4}{1} & \overset{6}{1} & 2 & 3 & \overset{7}{3} & \overset{8}{4} & 5 & \overset{10}{1} & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \overset{11}{3} & 5 & 7 & \overset{12}{4} & 5 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 2 & 6 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c|cc|ccccccc|ccc|cccc} 3 & 3 & 4 & 5 & 5 & 6 & 7 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 5 & 7 & 9 & 6 & 7 & 10 & 11 \\ 4 & 6 & 2 & 6 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c|ccccccc|ccc} \overset{5}{3} & \overset{7}{3} & 4 & 5 & \overset{8}{5} & \overset{11}{3} & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \overset{12}{5} & 7 & 9 \\ 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{c|ccc|ccccccc} \overset{6}{2} & \overset{8}{2} & 3 & 4 & \overset{12}{2} & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c|ccccccc|ccc} 4 & 4 & 5 & 6 & 6 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 6 & 8 & 10 \\ 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{c|ccc|ccccccc} 5 & 5 & 6 & 7 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Прибавляя эти подправочные соотношения к σ^* , мы получаем соотношение:

$$\sigma_0=\left(\begin{array}{c|ccc|c|cc|c|ccccccc|ccc|cccc|cc|cccccc} \overset{2}{1} & \overset{4}{1} & 2 & 3 & \overset{5}{3} & \overset{6}{1} & 2 & \overset{7}{6} & \overset{8}{1} & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \overset{9}{3} & 5 & 7 & \overset{10}{1} & 2 & 4 & 5 & \overset{11}{5} & 10 & \overset{12}{2} & 3 & 6 & 7 & 8 & 10 \\ 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

или, в развернутой записи:

$$\begin{aligned} \sigma_0 = {} & 4yx \,|+2yx^3+2yx^2y+2yxy^2\,|+2yx^2y^2\,|+2yx^5+2yx^4y\,|+2yxy^5\,|+ \\ & +yx^7+yx^6y+3yx^5y^2+3yx^4y^3+3yx^3y^4+3yx^2y^5+3yxy^6\,|+yx^6y^2+yx^4y^4+yx^2y^6\,|+ \\ & +yx^9+yx^8y+yx^6y^3+yx^5y^4\,|+yx^6y^4+yxy^9\,|+yx^{10}y+yx^9y^2+yx^6y^5+yx^5y^6+yx^4y^7+yx^2y^9. \end{aligned}$$

Это соотношение и будет основой всех дальнейших выкладок.

2^0. Исключение четверок. Из построенного основного соотношения σ_0 домножениями на x,y составим таблицу соотношений для исключения четверок. В таблице, которую мы получаем, нет надобности указывать значения самих координат: они однозначно определяются принятыми редукциями (если они отличны от нуля). Варианты значений – только I или 3 – возможны лишь для координат 8-й степени в первом из соотношений таблицы (в самом соотношении σ_0). Для напоминания об этом различии номер той координаты, которая равна 3, мы снабдим точкой. В остальных соотношениях координаты 8-й степени могут равняться лишь 2. Итак таблица для исключения четверок имеет вид:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c}
\textcircled{2} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \textcircled{6} & \textcircled{7} & \textcircled{8} & \textcircled{9} & \textcircled{10} & \textcircled{11} & \textcircled{12} \\
(1 & 1\ 2\ 3 & 3 & 1\ 2 & 6 & 1\ 2\ \dot{3}\ \dot{4}\ \dot{5}\ \dot{6}\ \dot{7} & 3\ 5\ 7 & 1\ 2\ 4\ 5 & 5\ 10 & 2\ 3\ 6\ 7\ 8\ 10)
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c}
\textcircled{3} & \textcircled{5} & \textcircled{6} & \textcircled{7} & \textcircled{8} & \textcircled{9} & \textcircled{10} & \textcircled{11} & \textcircled{12} \\
(1 & 1\ 2\ 3 & 3 & 1\ 2 & 6 & 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7 & 3\ 5\ 7 & 1\ 2\ 4\ 5 & 5\ 10) \\
(2 & 2\ 3\ 4 & 4 & 2\ 3 & 7 & 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8 & 4\ 6\ 8 & 2\ 3\ 5\ 6 & 6\ 11)
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}
\textcircled{4} & \textcircled{6} & \textcircled{7} & \textcircled{8} & \textcircled{10} & \textcircled{11} & \textcircled{12} \\
(1 & 1\ 2\ 3 & 3 & 1\ 2 & 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7 & 3\ 5\ 7 & 1\ 2\ 4\ 5) \\
(2 & 2\ 3\ 4 & 4 & 2\ 3 & 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8 & 4\ 6\ 8 & 2\ 3\ 5\ 6) \\
(3 & 3\ 4\ 5 & 5 & 3\ 4 & 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 & 5\ 7\ 9 & 3\ 4\ 6\ 7)
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
\textcircled{5} & \textcircled{7} & \textcircled{8} & \textcircled{11} & \textcircled{12} \\
(1 & 1\ 2\ 3 & 3 & 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7 & 3\ 5\ 7) \\
(2 & 2\ 3\ 4 & 4 & 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8 & 4\ 6\ 8) \\
(3 & 3\ 4\ 5 & 5 & 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 & 5\ 7\ 9) \\
(4 & 4\ 5\ 6 & 6 & 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10 & 6\ 8\ 10)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c|c}
\textcircled{6} & \textcircled{8} & \textcircled{12} \\
(1 & 1\ 2\ 3 & 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7) \\
(2 & 2\ 3\ 4 & 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8) \\
(3 & 3\ 4\ 5 & 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9) \\
(4 & 4\ 5\ 6 & 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10) \\
(5 & 5\ 6\ 7 & 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11)
\end{array}$$

(Первая координата здесь везде равна 4, а остальные равны 2 или I или 3, как это уточнено выше.) Прибавление соотношений из этой таблицы позволяет исключить четверки в разложении по базису любого элемента.

В дальнейшем, после получения новых соотношений, эти соотношения будут уточняться и упрощаться.

3^0. Вспомогательные формулы. Дальнейшее размножение соотношений происходит подстановкой в σ_0 вместо x, y каких-либо других элементов с последующим упрощением получаемых соотношений. Для такого упрощения применяется исключение чéтверок, а также используются некоторые вспомогательные формулы. Приведем нужные нам в следующем пункте формулы с использованием принятых в 1^0 редукций. (См. [2] с.154.)

$$\left.\begin{array}{ll}
y(2x) = 2yx + yx^2 & y(2x)^4 = yx^8 \\
y(2x)^2 = 4yx^2 + 4yx^3 + yx^4 & y(2x)^5 = yx^{10} \\
y(2x)^3 = 4yx^4 + 6yx^5 + yx^6 & y(2x)^6 = 0
\end{array}\right\} \qquad (38)$$

$$\left.\begin{aligned}
y(3x) &= 3yx + 3yx^2 + yx^3 \\
y(3x)^2 &= yx^2 + 2yx^3 + 7yx^4 + 6yx^5 + yx^6 \\
y(3x)^3 &= 3yx^3 + yx^4 + 4yx^5 + yx^6 + yx^8 + yx^9 \\
y(3x)^4 &= yx^4 + 4yx^5 + 2yx^6 + \qquad yx^8 \\
y(3x)^5 &= 3yx^5 + 3yx^6 + 3yx^7 \qquad + yx^9 + yx^{10} + yx^{11} \\
y(3x)^6 &= yx^6 + 2yx^7 + yx^8 \\
y(3x)^7 &= 3yx^7 + yx^8 \qquad + yx^{10} + yx^{11} \\
y(3x)^8 &= yx^8 \\
y(3x)^9 &= yx^9 + yx^{10} + yx^{11}
\end{aligned}\right\} \quad (39)$$

$$\left.\begin{aligned}
(2y)x &= 2yx + yxy & \qquad (2y)x(2y)^3 &= yxy^7 \\
(2y)x(2y) &= 4yxy + 4yxy^2 + yxy^3 & \qquad (2y)x(2y)^4 &= yxy^9 \\
(2y)x(2y)^2 &= 4yxy^3 + 6yxy^4 + yxy^5 & \qquad (2y)x(2y)^5 &= 0
\end{aligned}\right\} \quad (40)$$

4^0. **<u>Получение соотношений 5-й степени</u>. Сейчас заменами в соотношении σ_0 мы получим важные новые соотношения, составляющие основу для исключения двоек.**

4.I. Первая подстановка:

$$\begin{aligned}
\sigma_0(2x,y) = {} & 4y(2x)\,\big|\, + 2y(2x)^3 + 2y(2x)^2y + 2y(2x)y^2 \,\big|\, + 2y(2x)^2y^2 \,\big|\, + \\
& + 2y(2x)^5 + 2y(2x)^4y \,\big|\, + 2y(2x)y^5 \,\big|\, + y(2x)^7 + y(2x)^6y + 3y(2x)^5y + 3y(2x)^4y^3 + \\
& + 3y(2x)^3y^4 + 3y(2x)^2y^5 + 3y(2x)y^6 \,\big|\, + y(2x)^6y^2 + y(2x)^4y^4 + y(2x)^2y^6 \,\big|\, + y(2x)^9 + \\
& + y(2x)^8y + y(2x)^6y^3 + y(2x)^5y^4 \,\big|\, + y(2x)^6y^4 + y(2x)y^9 \,\big|\, + y(2x)^{10}y + y(2x)^9y^2 + \\
& + y(2x)^6y^5 + y(2x)^5y^6 + y(2x)^4y^7 + y(2x)^2y^9 = \\
= {} & 4yx^2 \,\big|\, + (4yx^5 + 2yx^6) + 2yx^4y + (4yxy^2 + 2yx^2y^2) \,\big|\, + 2yx^4y^2 \,\big|\, + \\
& + 2yx^2y^5 \,\big|\, + yx^8y^3 + yx^6y^4 + yx^4y^5 + (2yxy^6 + yx^2y^6) \,\big|\, + yx^4y^6 \,\big|\, + yx^2y^9.
\end{aligned}$$

В последнем равенстве использованы формулы (38). Приводя подобные члены, получаем результат:

$$\begin{aligned}
& 4yx^2 \,\big|\, + 4yxy^2 \,\big|\, + 2yx^2y^2 \,\big|\, + 4yx^5 + 2yx^4y \,\big|\, + 2yx^6 + 2yx^4y^2 \,\big|\, + 2yx^2y^5 + \\
& + 2yxy^6 \,\big|\, + yx^2y^6 \,\big|\, + yx^4y^5 \,\big|\, + yx^6y^4 + yx^4y^6 \,\big|\, + yx^8y^3 + yx^2y^9 =
\end{aligned}$$

$$=\left(\overset{\textcircled{3}}{\begin{matrix}1\\4\end{matrix}}\middle|\overset{\textcircled{4}}{\begin{matrix}3\\4\end{matrix}}\middle|\overset{\textcircled{5}}{\begin{matrix}3\\2\end{matrix}}\middle|\overset{\textcircled{6}}{\begin{matrix}1&2\\4&2\end{matrix}}\middle|\overset{\textcircled{7}}{\begin{matrix}1&3\\2&2\end{matrix}}\middle|\overset{\textcircled{8}}{\begin{matrix}6&7\\2&2\end{matrix}}\middle|\overset{\textcircled{9}}{\begin{matrix}7\\1\end{matrix}}\middle|\overset{\textcircled{10}}{\begin{matrix}6\\1\end{matrix}}\middle|\overset{\textcircled{11}}{\begin{matrix}5&7\\1&1\end{matrix}}\middle|\overset{\textcircled{12}}{\begin{matrix}4&10\\1&1\end{matrix}}\right).$$

После исключения четверок мы отсюда получим первое соотношение 5-й степени, в котором, в соответствии с замечанием в начале пункта 2^0, мы укажем только номера ненулевых координат:

$$\alpha'=(\overset{\textcircled{5}}{1\ 2}|\overset{\textcircled{6}}{2\ 4\ 5}|\overset{\textcircled{7}}{2\ 4}|\overset{\textcircled{8}}{1\ 2\ 3\ 7}|\overset{\textcircled{9}}{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6}|\overset{\textcircled{10}}{4\ 8\ 9}|\overset{\textcircled{11}}{1\ 2\ 3\ 6\ 7\ 8}|\overset{\textcircled{12}}{1\ 2\ 3\ 6\ 8}).$$

4.2. Вторая подстановка:

$$\sigma_0(3x,y)=4y(3x)\,|+2y(3x)^3+2y(3x)^2y+2y(3x)y^2|+2y(3x)^2y^2|+2y(3x)^5+$$
$$+2y(3x)^4y|+2y(3x)y^5|+y(3x)^7+y(3x)^6y+3y(3x)^5y^2+3y(3x)^4y^3+3y(3x)^3y^4+$$
$$+3y(3x)^2y^5+3y(3x)y^6|+y(3x)^6y^2+y(3x)^4y^4+y(3x)^2y^6|+y(3x)^9+y(3x)^8y+y(3x)^6y^3+$$
$$+y(3x)^5y^4|+y(3x)^6y^4+y(3x)y^9|+y(3x)^{10}y+y(3x)^9y^2+y(3x)^6y^5+y(3x)^5y^6+y(3x)^4y^7+y(3x)^2y^7.$$

Применение формул (39) и приведение подобных членов дает, как нетрудно проверить, следующее соотношение:

$$\left(\overset{\textcircled{2}}{\begin{matrix}1\\4\end{matrix}}\middle|\overset{\textcircled{3}}{\begin{matrix}1\\4\end{matrix}}\middle|\overset{\textcircled{4}}{\begin{matrix}1&2&3\\2&2&6\end{matrix}}\middle|\overset{\textcircled{5}}{\begin{matrix}1&2\\2&4\end{matrix}}\middle|\overset{\textcircled{6}}{\begin{matrix}1&3\\6&6\end{matrix}}\middle|\overset{\textcircled{7}}{\begin{matrix}3&6\\2&2\end{matrix}}\middle|\overset{\textcircled{8}}{\begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&3&1&3&1&1&1\end{matrix}}\middle|\overset{\textcircled{9}}{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}}\middle|\overset{\textcircled{10}}{\begin{matrix}1&3&4&5&6&7\\1&1&1&1&1&1\end{matrix}}\middle|\overset{\textcircled{11}}{\begin{matrix}3&5&7&10\\1&1&1&1\end{matrix}}\middle|\right.$$
$$\left.\overset{\textcircled{12}}{\begin{matrix}2&5&7&8\\1&1&1&1\end{matrix}}\right),$$

Исключение здесь четверок приводит нас ко второму соотношению 5-й степени:

$$\beta'=(\overset{\textcircled{5}}{2}|\overset{\textcircled{6}}{2\ 3\ 4\ 5}|\overset{\textcircled{7}}{1\ 2\ 4}|\overset{\textcircled{8}}{1\ 2\ 4}|\overset{\textcircled{9}}{2\ 4\ 6}|\overset{\textcircled{10}}{2\ 3\ 4\ 7\ 8\ 9}|\overset{\textcircled{11}}{1\ 2\ 5\ 6\ 7\ 8}|\overset{\textcircled{12}}{1\ 5\ 8\ 9\ 11}).$$

4.3. Теперь, используя формулы (40), сделаем третью подстановку:

$$\sigma_0(x,2y)=4yxy\,|+4yx^3\,|+2yx^3y|+4yx^5+2yx^2y^3+4yxy^4|+2yx^5y+2yxy^5|+$$
$$+2yx^7+2yx^4y^3+2yx^2y^5|+yx^7y\,|+yx^6y^3|+yx^9y+yx^5y^5|+yx^8y^3+yx^6y^5+yx^4y^7.$$

Исключив здесь четверки, мы получим третье соотношение 5-й степени:

$$\gamma'=(\overset{\textcircled{5}}{3\ 4}|\overset{\textcircled{6}}{1\ 2\ 3}|\overset{\textcircled{7}}{6}|\overset{\textcircled{8}}{1\ 3\ 4\ 5}|\overset{\textcircled{9}}{3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8}|\overset{\textcircled{10}}{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 7\ 8}|\overset{\textcircled{11}}{7}|\overset{\textcircled{12}}{1\ 2\ 5\ 8\ 11}).$$

4.4. Для получения последнего, четвертого, соотношения 5-й степени поменяем в σ_0 местами x и y:

$$-\sigma_0(y,x)=(\overset{\textcircled{2}}{1}|\overset{\textcircled{4}}{1\ 2\ 3}|\overset{\textcircled{5}}{2}|\overset{\textcircled{6}}{4\ 5}|\overset{\textcircled{7}}{1}|\overset{\textcircled{8}}{\dot{1}\ \dot{2}\ \dot{3}\ \dot{4}\ \dot{5}\ 6\ 7}|\overset{\textcircled{9}}{2\ 4\ 6}|\overset{\textcircled{10}}{5\ 6\ 8\ 9}|\overset{\textcircled{11}}{1\ 6}|\overset{\textcircled{12}}{2\ 4\ 5}$$
$$6\ 9\ 10),$$

и после исключения четверок появляется следующее соотношение:

$$\delta' = (\overset{\textcircled{5}}{2}\ 3 \,|\, \overset{\textcircled{6}}{\mathrm{I}}\ 2\ 4\ 5 \,|\, \overset{\textcircled{7}}{\mathrm{I}}\ 2\ 3\ 4\ 6 \,|\, \overset{\textcircled{8}}{\mathrm{I}}\ 2\ 6 \,|\, \overset{\textcircled{9}}{2}\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7 \,|\, \overset{\textcircled{10}}{\mathrm{I}}\ 2\ 4\ 6\ 8\ 9 \,|$$

$$\overset{\textcircled{11}}{\mathrm{I}}\ 2\ 3\ 4\ 7\ 8\ \mathrm{I0} \,|\, \overset{\textcircled{12}}{3}\ 4\ 5\ 6\ 7\ 9\ \mathrm{II}).$$

5^0. <u>Исключение двоек</u>. Четыре найденных в предыдущем пункте соотношения $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ легко преобразуются в следующие четыре соотношения, в которых координаты 5-й степени разделены:

$$\alpha = (\overset{\textcircled{5}}{\mathrm{I}} \,|\, \overset{\textcircled{6}}{3} \,|\, \overset{\textcircled{7}}{\mathrm{I}} \,|\, \overset{\textcircled{8}}{3} \,|\, \overset{\textcircled{9}}{\mathrm{I}}\ 3\ 5 \,|\, \overset{\textcircled{10}}{2}\ 3\ 7 \,|\, \overset{\textcircled{11}}{3}\ 5 \,|\, \overset{\textcircled{12}}{2}\ 3\ 4\ 5\ 6\ 9)$$

$$\beta = (2 \,|\, 2\ 3\ 4\ 5 \,|\, \mathrm{I}\ 2\ 4 \,|\, \mathrm{I}\ 2\ 4 \,|\, 2\ 4\ 6 \,|\, 2\ 3\ 4\ 7\ 8\ 9 \,|\, \mathrm{I}\ 2\ 5\ 6\ 7\ 8 \,|$$
$$\mathrm{I}\ 5\ 8\ 9\ \mathrm{II})$$

$$\gamma = (3 \,|\, \mathrm{I}\ 3 \,|\, 3\ 6 \,|\, 6\ 7 \,|\, 3\ 5\ 7 \,|\, \mathrm{I}\ 3\ 6\ 7 \,|\, 3\ 4\ 5\ 6\ \mathrm{I0} \,|\, \mathrm{I}\ 3\ 6\ 7\ 8\ \mathrm{II})$$

$$\delta = (4 \,|\, 2 \,|\, 3 \,|\, \mathrm{I}\ 2 \,|\, 4\ 6\ 8 \,|\, 2\ 4\ 5\ 6\ 8 \,|\, 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ \mathrm{I0} \,|\, 4\ 5\ 6\ 7\ 9\ \mathrm{I0}\ \mathrm{II}).$$

Из этих четырех соотношений мы будем получать таблицу для исключения двоек. При этом, как и в § 2, мы одновременно будем получать унитальные соотношения, используя неоднозначность соотношений с одинаковыми первыми координатами. Начнем с получения соотношений 8-й степени. (Они, как и остальные соотношения, в дальнейшем улучшатся). Умножим соотношения $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ трижды на x, y. Мы получим:

$$\left.\begin{array}{llll} (\overset{\textcircled{8}}{\mathrm{I}} \,|\, \overset{\textcircled{12}}{\mathrm{I}}\ 3\ 5) & (2 \,|\, 2\ 4\ 6) & (3 \,|\, 3\ 5\ 7) & (4 \,|\, 4\ 6\ 8) \\ & (5 \,|\, 5\ 7\ 9) & (6 \,|\, 6\ 8\ \mathrm{I0}) & (7 \,|\, 7\ 9\ \mathrm{II}) \end{array}\right\} \qquad (4\mathrm{I})$$

Двукратное умножение соотношений $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ на x, y после использования соотношений (4I) приводит к соотношениям:

$$\left.\begin{array}{l} (\overset{\textcircled{7}}{\mathrm{I}} \,|\, \overset{\textcircled{11}}{\mathrm{I}}\ 3\ 5 \,|\, \overset{\textcircled{12}}{2}\ 5) \\ (2 \,|\, 2\ 4\ 6 \,|\, 3\ 6) = (2 \,|\, 2\ 4\ 6 \,|\, 4\ 7) \\ (3 \,|\, 3\ 5\ 7 \,|\, 4\ 7) = (3 \,|\, 3\ 5\ 7 \,|\, 5\ 8) = (3 \,|\, 3\ 5\ 7 \,|\, 3\ 6) \\ (4 \,|\, 4\ 6\ 8 \,|\, 6\ 9) = (4 \,|\, 4\ 6\ 8 \,|\, 4\ 7) = (4 \,|\, 4\ 6\ 8 \,|\, 5\ 8) \\ (5 \,|\, 5\ 7\ 9 \,|\, 5\ 8) = (5 \,|\, 5\ 7\ 9 \,|\, 6\ 9) \\ (6 \,|\, 6\ 8\ \mathrm{I0} \,|\, 7\ \mathrm{I0}) \end{array}\right\} \qquad (42)$$

Неоднозначность соотношений с одинаковыми начальными членами, как и в пункте 4^0 из § 2, позволяет найти унитальные соотношения I2-й степени:

$$(\overset{\textcircled{12}}{3}\ 4\ 6\ 7) \qquad (4\ 5\ 7\ 8) \qquad (5\ 6\ 8\ 9).$$

Эта тройка соотношений равносильна такой:

$$(\overset{\textcircled{12}}{3}\ 9) \qquad (4\ 6\ 7\ 9) \qquad (5\ 6\ 8\ 9). \qquad (43)$$

(Унитальные соотношения, как и остальные, с каждым этапом уточняются.)

Таким же образом получаем соотношения 6-й степени:

⑥ ⑩ ⑪ ⑫
(I|I 3 5|2 5|I 3 6)
(2|2 4 6|3 6|2 4 7) = (2|2 4 6|4 7|4)
(3|3 5 7|5 8|4 5 IO) = (3|3 5 7|3 6|2 5 8)   (44)
(4|4 6 8|4 7|6) = (4|4 6 8|5 8|6 IO)
(5|5 7 9|6 9|7 II)

Опять используем неоднозначность соотношений с одинаковыми начальными членами для получения унитальных соотношений, имеющих здесь II-ю степень:

⑪ ⑫
(3 4 6 7|2 7)   (3 5 6 8|2 4 8 IO)   (4 5 7 8|IO)

Используем теперь симметризацию, как это делалось в пункте 4° из § 2 при выведении там соотношений (3I). Сравнение первого из только что полученных соотношений с симметричным третьему, т.е. ⑪(3 4 6 7|⑫2), дает нам соотношение ⑫(7) и сразу же симметричное ему ⑫(5). Из симметризации же второго получаем ⑫(4 8). Симметризуем теперь полученные нами соотношения 6-й степени (44):

⑥ ⑩ ⑪ ⑫
(5|5 7 9|6 9|6 9 II)
(4|4 6 8|5 8|5 8 IO) = (4|4 6 8|4 7|8)
(3|3 5 7|3 6|2 7 8) = (3|3 5 7|5 8|4 7 IO)   (45)
(2|2 4 6|4 7|6) = (2|2 4 6|3 6|2 6)
(I|I 3 5|2 5|I 5)

Сравнивая соотношения вида ⑥(I|. . .) и ⑥(5|. . .) в (44) и (45), мы получаем соотношение ⑫(3 6). Из сравнения соотношений вида ⑥(4|. . .) получаем соотношение ⑫(6 8), а значит и симметричное ему – ⑫(4 6). Далее, переводя соотношение II-й степени ⑪(3 5 6 8| . . .) в соотношение I2-й степени ⑫(3 5 6 8), мы видим, что выполняется соотношение ⑫(3), а значит и ⑫(9).

Таким образом, мы получили одночленные соотношения I2-й степени:

⑫
(3)   (4)   (5)   (6)   (7)   (8)   (9)   (46)

Соотношения же II-й степени теперь приобретают вид:

$$(\overset{11}{3}\ 4\ 6\ 7|\overset{12}{2})\qquad (3\ 5\ 6\ 8|2\ 10)\qquad (4\ 5\ 7\ 8|10) \tag{47}$$

Наконец, накопленная информация о соотношения позволяет преобразовать $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ в следующие соотношения 5-й степени:

$$\left.\begin{array}{l}
(\overset{5}{1}|\overset{9}{1}\ 3\ 5|\overset{10}{2}\ 5|\overset{11}{1}\ 3\ 6|\overset{12}{2})\\
(2|2\ 4\ 6|4\ 7|3\ 4\ 9|-)\\
(3|3\ 5\ 7|3\ 6|2\ 4\ 7|10)\\
(4|4\ 6\ 8|5\ 8|3\ 4\ 10|1\ 10\ 11)
\end{array}\right\} \tag{48}$$

Симметризуем их

$$\left.\begin{array}{l}
(\overset{5}{4}|\overset{9}{4}\ 6\ 8|\overset{10}{5}\ 8|\overset{11}{5}\ 8\ 10|\overset{12}{10})\\
(3|3\ 5\ 7|3\ 6|2\ 7\ 8|-)\\
(2|2\ 4\ 6|4\ 7|4\ 7\ 9|2)\\
(1|1\ 3\ 5|2\ 5|1\ 7\ 8|1\ 2\ 11)
\end{array}\right\} \tag{49}$$

Сравнивая между собой соответствующие соотношения из (48) и (49), мы получим новые соотношения II-й степени:

$$(\overset{11}{3}\ 4\ 5\ 8|\overset{12}{1}\ 11)\qquad (4\ 8|10)\qquad (3\ 7|2)\qquad (3\ 6\ 7\ 8|1\ 11),$$

из которых вытекают следующие соотношения:

$$(\overset{11}{3}\ 5|\overset{12}{1}\ 10\ 11)\qquad (3\ 7|2)\qquad (6\ 8|1\ 2\ 11)\qquad (4\ 8|10) \tag{50}$$

6°. <u>Окончательная обработка соотношений</u>. Применим, как в 5° из § 2 и в [I], еще один прием для получения новых соотношений: заменим y на yx в соотношении $(\overset{5}{\cdot}|\overset{9}{1}\ 3\ 5|\ldots)$. (Аналогична симметричная замена x на xy в соотношении $(\overset{5}{4}|\overset{9}{4}\ 6\ 8|\ldots)$.) Мы получаем совсем простое соотношение: $(\overset{6}{1}|\overset{10}{1}|\overset{11}{1})$. (Соответственно, $(\overset{6}{5}|\overset{10}{9}|\overset{12}{11})$.) Сравнение этого с полученным ранее соотношением дает: $(\overset{10}{3}\ 5|\overset{11}{2}\ 5|\overset{12}{-})$. (Соответственно, $(\overset{10}{5}\ 7|\overset{11}{6}\ 9|\overset{12}{-})$.) Повышая на единицу степень (умножая на x), получим $(\overset{11}{3}\ 5|\overset{12}{2})$, что приводит к последнему соотношению 12-й степени, дополняющему список (46):

$$(\overset{12}{1}\ 2\ 10\ 11) \tag{51}$$

Проделаем теперь упрощение основного соотношения σ_0 :

```
②  ④      ⑤  ⑥   ⑦  ⑧  .  .  .  .  .⑨         ⑩          ⑪    ⑫
(I|I 2 3|3|I 2|6|I 2 3 4 5 6 7|3 5 7|I 2 4 5|5 I0|2 3 6 7 8 I0)
       (3|                    |3 5 7|  3 6|2 4 7|           I0)
         (I 2|                      |I 2 3 4 5 6|2 3 5 6|I 2   )
             (6|                              |6 8 I0|      I0)
               (    .  .  .  .  .|                     | I0 II)
                                          (3 4 7 8|2        I0)
                                                  (I 2  I0 II)
--------------------------------------------------------------
(I|I 2 3|   -   |I 2 3 4 5 6 7|      -                        )
```

Тем самым, складывая найденные соотношения, мы (по модулю G^{13}, т.е. окончательно) привели основное соотношение к виду:

$$\sigma_0 = 4yx\,| + 2yx^3 + 2yx^2y + 2yxy^2\,| + yx^7 + yx^6y + yx^5y^2 + yx^4y^3 + yx^3y^4 + yx^2y^5 + yxy^6 .$$

Теперь найдем еще одно соотношение I0-й степени (в дополнение к двум найденным в начале этого пункта). Умножим соотношение σ_0 на x :

```
③ ⑤     ⑨                   ③ ⑨  ⑩          ⑪        ⑫
(I|I 2 3|I 2 3 4 5 6 7) = (I|3 5|2 3 4 5 6 7|I 2 6 7 9|2 I0).
```

Сравним это соотношение с соотношением

```
                  ③ ⑤ ⑨     ③ ⑨  ⑩  ⑪    ⑫
σ₀(x,yx) = (I|I|I) = (I|3 5|2 5|I 3 6|2).
```

Результат сравнения представляет собой соотношение (⑩ 3 4 6 7| ⑪ 2 3 7 9|⑫ I0). Это и дает третье соотношение I0-й степени: (⑩ 4 6| ⑪ 3 5 6 7|⑫ I0), или в более симметричной форме: (⑩ 4 6|⑪ 5 6|⑫ 2 I0).

Мы можем теперь подытожить подсчеты и выписать найденные соотношения:

Исключение четверок.

```
② ④      ⑧
(I|I 2 3|I 2 3 4 5 6 7)

 ③ ⑨   ⑩  ⑪    ⑫
( I|3 5|2 5|I 3 6|2)        (2|4 6|5 8|5 8 I0|I0)

                   ④ ⑫
                   (I|I)    (2|2 I0)     (3|II)
                   ⑤
                   (k), для  k = I, 2, 3, 4.
```

Исключение двоек:

```
⑤ ⑨     ⑩   ⑪      ⑫        ⑥ )⑪ ⑫        ⑨ ⑪ ⑫     ⑧ ⑫
(I|I 3 5|2 3|I 2 6|-)        (I|I|-|I)       (I|I|-)    (I|I)
(2|2 4 6|3 4|2     |2)       (2|2|-|2 I0)    (2|2|-)    (2|2)
(3|3 5 7|6 7|     9|I0)      (3|5|2 9|-)     (3|3|-)    (3|-)
(4|4 6 8|7 8|5 9 I0|-)       (4|8|-|2 I0)    (4|8|-)    (4|-)
```

⑥ ⑩ ⑪ ⑫
(5|9|-|II)

⑦ ⑪ ⑫
(5|9|-)
(6|I0|-)

⑧ ⑫
(5|-)
(6|I0)
(7|II).

⑨
(k), для $k = 1,\ldots,8$.

Унитальные соотношения.

⑩ ⑪ ⑫
(3 5|2 5|-)
(4 6|5 6|2 I0)
(5 7|6 9|-)

⑪ ⑫
(3 5|2)
(4 6|-)

⑪ ⑫
(5 7|-)
(6 8|I0)

⑫
(I 2 I0 II) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9).

7°. <u>Факторы нильпотентного ряда</u>. Все вычисления закончены, и мы можем дать описание факторов нильпотентного ряда группы $G=MB(2,8)$. Пусть $G^i/G^{i+1}=M_i$ и $|M_i|=2^{d_i}$. Тогда

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
i = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
d_i = & 6 & 2 & 4 & 6 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 6 & 6 & 3
\end{array}
$$

Отсюда следует, что $\sum d_i = 63$ и $|G|=2^{63}$.

Соотношения в факторах M_i и в самой группе G следующие.

$M_1=\langle x, y, 2x, 2y, 4x, 4y \mid 8x=8y=0\rangle$ (И в группе G: $8x=8y=0$.)

$M_2=\langle yx, 2yx \mid 4yx=0\rangle$. (В группе G соотношение имеет вид:

$$4yx=2yx^3+2yx^2y+2yxy^2|+yx^7+yx^6y+yx^5y^2+yx^4y^3+yx^3y^4+yx^2y^5+yxy^6)$$

$M_3=\langle yx^2, yxy, 2yx^2, 2yxy \mid 4yx^2=4yxy=0\rangle$. (В группе G соотношения имеют вид:

$$4yx^2=yx^6y^2+yx^4y^4|+yx^8y+yx^5y^4|+yx^{10}+yx^8y^2+yx^5y^5|+yx^{10}y,$$
$$4yxy=yx^5y^3+yx^3y^5|+yx^5y^4+yx^2y^7|+yx^6y^4+yx^3y^7+yxy^9|+yx^2y^9.)$$

$M_4=\langle yx^3, \ldots, 2yxy^2 \mid 4yx^3=4yx^2y=4yxy^2=0\rangle$. (В группе G:

$$4yx^3=yx^{11},\quad 4yx^2y=yx^{10}y+yx^2y^9,\quad 4yxy^2=yxy^{10}.)$$

$M_5=\langle yx^4, \ldots, yxy^3 \mid 2yx^4=\ldots=2yxy^3=0\rangle$ (В группе G:

$$2yx^4=yx^8+yx^6y^2+yx^4y^4|+yx^8y+yx^7y^2|+yx^{10}+yx^9y+yx^5y^5,$$
$$2yx^3y=yx^7y+yx^5y^3+yx^3y^5|+yx^7y^2+yx^6y^3|+yx^9y|+yx^{10}y,$$
$$2yx^2y^2=yx^6y^2+yx^4y^4+yx^2y^6|+yx^4y^5+yx^3y^6|+yx^2y^8|+yx^2y^9,$$
$$2yxy^3=yx^5y^3+yx^3y^5+yxy^7|+yx^3y^6+yx^2y^7|+yx^6y^4+yx^2y^8+yxy^9.)$$

$M_6=\langle yx^5, \ldots, yxy^4 \mid 2yx^5=\ldots=2yxy^4=0\rangle$. (В группе G:

$2yx^5=yx^9 \,|+yx^{11}$, $2yx^4y=yx^8y\,|+yx^{10}y+yx^2y^9$, $2yx^3y^2=yx^5y^4\,|+$
$+yx^9y+yx^2y^8$, $2yx^2y^3=yx^2y^7\,|+yx^{10}y+yx^2y^9$, $2yxy^4=yxy^8\,|+yxy^{10}$.)

$M_7=\langle yx^6,\dots,yxy^5 \,|\, 2yx^6=\dots=2yxy^5=0\rangle$. (В группе G :
$2yx^6=yx^{10}$, $2yx^5y=yx^9y$, $2yx^4y^2=yx^8y^2$, $2yx^3y^3=yx^3y^7$,
$2yx^2y^4=yx^2y^8$, $2yxy^5=yxy^9$.)

$M_8=\langle yx^7,\dots,yxy^6 \,|\, 2yx^7=\dots=2yxy^6=0\rangle$. (В группе G :
$2yx^7=yx^{11}$, $2yx^6y=yx^{10}y$, $2yx^5y^2=2yx^4y^3=2yx^3y^4=0$,
$2yx^2y^5=yx^2y^9$, $2yxy^6=yxy^{10}$.)

$M_9=\langle yx^8,\dots,yxy^7 \,|\, 2yx^8=\dots=2yxy^7=0\rangle$. (И в группе G соотношения те же.)

$$M_{10}=\langle yx^9,\dots,yxy^8 \,|\, 2yx^9=\dots=2yxy^8=0,$$
$$yx^7y^2+yx^5y^4=yx^6y^3+yx^4y^5=yx^5y^4+yx^3y^6=0\rangle.$$

(В группе G : $yx^7y^2+yx^5y^4=yx^9y+yx^6y^4$, $yx^6y^3+yx^4y^5=yx^6y^4+yx^5y^5\,|+$
$+yx^{10}y+yx^2y^9$, $yx^5y^4+yx^3y^6=yx^5y^5+yx^2y^8$.)

$$M_{11}=\langle yx^{10},\dots,yxy^9 \,|\, 2yx^{10}=\dots=2yxy^9=0,$$
$$yx^8y^2+yx^6y^4=yx^7y^3+yx^5y^5=yx^6y^4+yx^4y^6=yx^5y^5+yx^3y^7=0\rangle.$$

(В группе G : $yx^8y^2+yx^6y^4=yx^{10}y$, $yx^7y^3+yx^5y^5=yx^6y^4+yx^4y^6=0$,
$yx^5y^5+yx^3y^7=yx^2y^9$.)

$M_{12}=\langle yx^{11},\dots,yxy^{10} \,|\, 2yx^{11}=\dots=2yxy^{10}=0,\ yx^9y^2=\dots=yx^3y^8=0,$
$yx^{11}+yx^{10}y+yx^2y^9+yxy^{10}=0\rangle$. (И в группе G соотношения те же.)

Литература

1. С к о п и н А.И. Метабелева группа экспоненты 9 с двумя образующими. – Зап.науч.семинаров Ленингр.отд.Мат.ин-та АН СССР, 1980, т.103, с.124-131.
2. С к о п и н А.И. О соотношениях в группах экспоненты 8. – Зап.науч.семинаров Ленингр.отд.Мат.ин-та АН СССР, 1976, т.57, с.129-169.
3. С к о п и н А.И. Трансметабелевы группы. – Зап.науч.семинаров Ленингр.отд.Мат.ин-та АН СССР, 1978, т.75, с.159-163.
4. М о н а р х Е.И., С к о п и н А.И. Диалоговая система символьных вычислений в группах Бернсайдовского типа. – Зап.науч. семинаров Ленингр.отд.Мат.ин-та АН СССР, 1982, т.114, с.164-173.

5. Х о л л М. Теория групп. М., ИЛ, 1962. 468с.
6. С к о п и н А.И. О собирательной формуле. - Зап.науч.семинаров Ленингр.отд.Мат.ин-та АН СССР, 1974, т.46, с.59-63.
7. B a c h m u t h S., M o c h i z u k i H.Y. The class of the free metabelian group with exponent p^2. - Comm. Pure Appl. Math., 1968, vol.21, p.385-389.
8. G u p t a N.D., N e w m a n M.F., T o b i n S.J. On metabelian groups of prime-power exponent. - Proc.Roy.Soc.,Ser.A, 1968, vol.302, p.237-242.
9. G u p t a N.D. The free metabelian group of exponent p^2. - Proc.Amer.Math.Soc., 1969, vol.22, N 2, p.375-376.
10. G r u n e w a l d F.J., H a v a s G., M e n n i c k e J.L., N e w m a n M.F. Groups of exponent eight. - Bull.Austral. Math.Soc., 1979, vol.20, p.7-16.