

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

I. A. Dynnikov, Homotopic classification of spherical spatial forms, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 1992, Number 5, 3–8

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.171

January 26, 2025, 08:24:02



МАТЕМАТИКА

УДК 515.16.165.7

И. А. Дынников

ГОМОТОПИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ СФЕРИЧЕСКИХ
ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФОРМ

Сферической пространственной формой называется многообразие постоянной положительной скалярной кривизны. Любое такое многообразие есть фактор S^{2n-1} по свободному действию конечной группы G .

Двум неэквивалентным представлениям $\rho_1, \rho_2 : G \rightarrow SO(2n)$ без неподвижных векторов соответствуют недиффеоморфные многообразия $S^{2n-1}/\rho_1 \neq S^{2n-1}/\rho_2$. В работе [1] дана гомотопическая классификация сферических пространственных форм и вычислено кручение Райдемайстера для случая $G = \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$, т. е. для линз. Мы произведем гомотопическую классификацию сферических пространственных форм для всех возможных фундаментальных групп G и вычислим R -кручение для случая $G \subset SU(2)$. Список групп, имеющих ортогональные представления без неподвижных векторов, приведен в работе [2].

Гомотопическая классификация. Пусть M_1 и M_2 — многообразия постоянной положительной кривизны и

$$\dim M_1 = \dim M_2 = 2n - 1, \pi_1(M_1) \cong \pi_1(M_2) \cong G,$$

$\psi : \pi_1(M_1) \rightarrow \pi_1(M_2)$ — изоморфизм.

Лемма 1. *Существует такое отображение f из M_1 в M_2 , что*

$$\psi = f_* : \pi_1(M_1) \rightarrow \pi_1(M_2).$$

2. *Вычет $\deg f \pmod N$ зависит только от многообразий M_1, M_2 и изоморфизма ψ , где $N = |G|$.*

3. *Если $\deg f \equiv \pm 1 \pmod N$, то $M_1 \sim M_2$.*

Доказательство 1. Многообразия M_1 и M_2 разобьем на клетки. Изоморфизм ψ определяет отображение $sk_1(M_1) \rightarrow sk_1(M_2)$, которое можно продолжить до отображения $M_1 \rightarrow M_2$, так как $\pi_i(M_2) = 0$ при $1 < i < 2n - 1$.

2. Препятствием к гомотопии двух отображений $f_1, f_2 : M_1 \rightarrow M_2$, таких, что $f_{1*} = f_{2*} = \psi$, может быть лишь элемент группы $\pi_{2n-1}(M_2) \cong \mathbf{Z}$, образующая которой есть N -листное накрытие $p : S^{2n-1} \rightarrow M_2$. Отсюда

$$(\deg f_1 - \deg f_2) \equiv 0 \pmod N.$$

3. Пусть f — отображение многообразия M_1 в M_2 . Рассмотрим шар B^{2n-1} , вложенный в M_1 . Стягивание его границы в точку задает отображение $h : M_1 \rightarrow M_1 \vee S^{2n-1}$. Композиция $f_1 = (f \vee p) \circ h : M_1 \rightarrow M_2$ имеет степень $\deg f_1 = \deg f + N$. Аналогично можно получить отображение M_1 в M_2 степени $\deg f - N$. Если $\deg f \equiv \pm 1 \pmod N$, то $\exists f_1 : M_1 \rightarrow M_2 : \deg f_1 = \pm 1, f_{1*} = \psi$. Отображение f_1 и будет гомотопической эквивалентностью. Доказательство п. 3 можно найти также в [3].

Вычет $\deg f \pmod N$, где $f_* = \psi$, будем обозначать через $q(M_1, M_2, \psi)$. Для вычисления $q(M_1, M_2, \psi)$ рассмотрим сначала два частных случая.

1. $G \cong \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$. Введем следующее обозначение. Для комплексной $n \times n$ или вещественной $2n \times 2n$ матрицы A , приводимой к виду

$$\begin{pmatrix} e^{2\pi k_1 i/K} & & & 0 \\ & e^{2\pi k_2 i/K} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{2\pi k_n i/K} \end{pmatrix}$$

или соответственно к виду

$$\begin{pmatrix} T(2\pi k_1/K) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & & T(2\pi k_n/K) \end{pmatrix}, \quad T(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

где $(k_i, K) = 1$, $0 < k_i < K$, обозначим $\prod_{i=1}^n k_i$ через $Q(A)$. Пусть a — обра-

зующая группы $\pi_1(M_1) \cong \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$. Группа $\pi_1(M_1)$ естественно действует на накрывающей сфере S^{2n-1} , и это действие можно привести к виду $a: z \rightarrow \rho_1(a)z$, где $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in C^n$, $S^{2n-1} = \{z \mid |z| = 1\}$,

$$\rho_1(a) = \begin{pmatrix} e^{2\pi k_1 i/N} & & & 0 \\ & e^{2\pi k_2 i/N} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{2\pi k_n i/N} \end{pmatrix}.$$

Аналогично, действие $\pi_1(M_2)$ на S^{2n-1} приводится к виду $\psi(a): z \rightarrow \rho_2(a)z$, где

$$\rho_2(a) = \begin{pmatrix} e^{2\pi m_1 i/N} & & & 0 \\ & e^{2\pi m_2 i/N} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{2\pi m_n i/N} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим отображение $\widehat{f}: S^{2n-1} \rightarrow S^{2n-1}$, заданное формулой

$$\widehat{f}(z) = (z_1^{l_1}/|z_1|^{l_1-1}, \dots, z_n^{l_n}/|z_n|^{l_n-1}),$$

где l_i определяются из уравнений $k_i l_i \equiv m_i \pmod{N}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда $\widehat{f} \circ \rho_1(a) |_{S^{2n-1}} = \rho_2(a) |_{S^{2n-1}} \circ \widehat{f}$, т. е. определено отображение $f: M_1 \rightarrow M_2$, поднятием которого является \widehat{f} ;

$$q(M_1, M_2, \psi) = \overline{\deg f} = \overline{\deg \widehat{f}} = \prod_{i=1}^n l_i = \overline{Q(\rho_2(a)) (Q(\rho_1(a)))}^{-1}$$

(черта сверху обозначает вычет mod N).

2. G — бинарная группа диэдра D_r^* , $N = 4r$. Она порождается двумя образующими a, b и соотношениями $a^r = b^2$, $bab^{-1} = a^{-1}$. В этом случае n четно, и действие группы приводится к виду

$$\rho_i(a) = \begin{pmatrix} A_i & 0 \\ 0 & A_i^{-1} \end{pmatrix}, \quad \rho_i(b) = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2,$$

где A_i — диагональные унитарные матрицы $(n/2) \times (n/2)$, $A_i^{2r} = E$. Как и

в п. 1, строим отображение f (с той лишь разницей, что $l_i = l_{i+n/2}$), степень которого также равна

$$\overline{\deg \widehat{f}} = \overline{Q(\rho_2(a)) (\overline{Q(\rho_1(a))})^{-1}} = q(M_1, M_2, \psi) \pmod{N}.$$

Теперь рассмотрим общий случай, когда группа G произвольна. Изоморфизмы $\psi_1: G \rightarrow \pi_1(M_1)$, $\psi_2: G \rightarrow \pi_1(M_2)$ определяют изометрические действия группы G на накрывающей S^{2n-1} , т. е. ортогональные представления $\rho_1, \rho_2: G \rightarrow SO(2n)$. Пусть P — произвольная подгруппа группы G , M_1' и M_2' — фактормногообразия S^{2n-1}/P по действиям ρ_1 и ρ_2 соответственно. Тогда, очевидно, $q(M_1', M_2', \psi|_P) = q(M_1, M_2, \psi) \pmod{|P|}$. Теперь для вычисления q осталось воспользоваться тем, что любая силовская подгруппа группы G есть либо циклическая, либо обобщенная кватернионная группа D_2^*m .

Теорема 1. Пусть P_1, P_2, \dots, P_m — полный набор несопряженных силовских подгрупп группы G , a_1, a_2, \dots, a_m — их элементы, такие, что $a_i \in P_i$, $i=1, 2, \dots, m$, и

$$(\text{порядок } a_i) = \begin{cases} |P_i|, & \text{если } P_i \text{ — циклическая;} \\ |P_i|/2, & \text{если } P_i \text{ — обобщенная кватернионная.} \end{cases}$$

Тогда $Q(\rho_1(a_i))q(M_1, M_2, \psi) \equiv Q(\rho_2(a_i)) \pmod{|P_i|}$. Так как

$$|G| = \prod_{i=1}^m |P_i| \text{ и } (|P_i|, |P_j|) = 1 \quad \forall i, j \leq m, i \neq j,$$

то q из этих условий определяется однозначно.

Следствие 1. Если $\varphi: G \rightarrow G$ — автоморфизм и $\varphi(a_i) = c_i a_i^k c_i^{-1}$, $i \leq m$ (к такому виду приводится любой автоморфизм, так как силовские подгруппы сопряжены), то $q(M_2, M_2, \varphi) \equiv k_i^n \pmod{|P_i|}$, т. е. $q(M_2, M_2, \varphi)$ зависит только от размерности многообразия M_2 и автоморфизма φ .

Обозначим $q(M_2, M_2, \varphi)$ через $q_n(\varphi)$. Заметим теперь, что $q(M_1, M_2, \varphi \circ \psi) = q(M_1, M_2, \psi)q(M_2, M_2, \varphi) = q(M_1, M_2, \psi)q_n(\varphi)$. Когда φ пробегает все множество $\text{Aut}(G)$, $\varphi \circ \psi$ пробегает все изоморфизмы $\pi_1(M_1) \rightarrow \pi_1(M_2)$. Отсюда получаем

Следствие 2. $M_1 \sim M_2 \Leftrightarrow \exists \varphi \in \text{Aut}(G): q(M_1, M_2, \psi) = \pm q_n(\varphi)$.

Обозначим через $Q(\rho)$ вычет \pmod{N} , такой, что $Q(\rho) \equiv \equiv Q(\rho(a_i)) \pmod{|P_i|}$. Следствие 2 примет вид

$$M_1 \sim M_2 \Leftrightarrow \exists \varphi: Q(\rho_2) = \pm Q(\rho_1)q_n(\varphi).$$

Рассмотрим случай, когда группа G имеет представление $\rho_0: G \rightarrow SO(4)$ без неподвижных векторов и не является циклической. Тогда любое ортогональное представление $\rho: G \rightarrow SO(2n)$ без неподвижных векторов имеет вид $\rho \bigoplus_{i=1}^{n'} \rho_0 \circ \varphi_i$, где $n = 2n'$, $\varphi_i \in \text{Aut}(G)$, $i = 1, 2, \dots, n'$. Легко показать, что

$Q(\rho) = \left(\prod_{i=1}^{n'} q_2(\varphi_i) \right) Q^n(\rho_0)$. Множество $\{q_2(\varphi) | \varphi \in \text{Aut}(G)\}$ совпадает с множеством обратимых квадратичных вычетов \pmod{N} , что устанавливается перебором групп G и их автоморфизмов. Отсюда

$$\{q_{2n'}(\varphi) | \varphi \in \text{Aut}(G)\} = ((\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*)^{2n'},$$

$$\{Q(\rho) | \dim \rho = 4n'\} = ((\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*)^2.$$

Множество ориентированных гомотопических типов многообразий вида $S^{4n'-1}/\rho$ совпадает с $((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*)^2/((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*)^{2n'}$.

Пример. $G \cong I^*$ — бинарная икосаэдральная группа, порожденная образующими a, b и соотношениями $a^{-5}=b^2=(ab)^3$. Тогда $N=120$, $((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*)^2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. В случае $\dim M=8n''+3$ имеется один, в случае $\dim M=8n''+7$ — два гомотопических типа сферических пространственных форм с фундаментальной группой $\pi_1(M) \cong I^*$, в то время как число неизоморфных сферических пространственных форм размерности $4n''-1$ равно $[(n''+2)/2]$.

Кручение Райдемайстера. Напомним определение R -кручения $R(M, \rho)$, где ρ — правое представление группы $\pi_1(M)$ в пространстве V . Пусть многообразие M разбито на клетки $\sigma_i, i=1, 2, \dots, m$. Поднимем это клеточное разбиение до разбиения универсальной накрывающей \tilde{M} . Для каждой клетки σ_i зафиксируем одну из накрывающих ее клеток в \tilde{M} , которую будем обозначать $\hat{\sigma}_i$. Разбиение \tilde{M} дает цепной комплекс

$$C: C_n \rightarrow C_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_0$$

$\pi_1(M)[\mathbb{Z}]$ -модулей с базисом $\hat{\sigma}_i, i=1, 2, \dots, m$.

Определение. Кручение Райдемайстера $R(M, \rho)$ называется кручение комплекса $V \otimes_{\pi_1(M)[\mathbb{Z}]} C$, если этот комплекс ацикличен. В противном случае по определению $R=0$. В качестве базиса в $V \otimes_{\pi_1(M)[\mathbb{Z}]} C$ берутся элементы $e_i \otimes \hat{\sigma}_i$, где $\{e_i\}$ — базис в V .

Очевидно, что $R(M, \rho_1 \oplus \rho_2) = R(M, \rho_1)R(M, \rho_2)$. Если M — сферическая пространственная форма и ρ — нетривиальное неприводимое представление, то $H_*(M, \rho) = 0$ и $R(M, \rho) \neq 0$. Это следует из того, что $H_*(M, \rho_{\text{рег}}) = H_*(M, \rho_{\text{тр}})$, где $\rho_{\text{рег}}$ — регулярное, $\rho_{\text{тр}}$ — тривиальное представления. Для вычисления R -кручения сферических пространственных форм нам будет полезна следующая

Теорема 2. Пусть ρ_1, ρ_2 — ортогональные представления группы G без неподвижных векторов, $\dim \rho_i = 2n_i, i=1, 2, \rho$ — правое представление группы G . Тогда $R(S^{2(n_1+n_2)-1}/\rho_1 \oplus \rho_2, \rho) = R(S^{2n_1-1}/\rho_1, \rho)R(S^{2n_2-1}/\rho_2, \rho)$.

Доказательство. Пусть сфера S^{2n_i-1} разбита на клетки $\sigma_1^i, \sigma_2^i, \dots, \sigma_{k_i}^i$, инвариантно относительно действия $\rho_i, i=1, 2$, причем так, что соответствующее разбиение S^{2n_1-1}/ρ_1 имеет одну $(2n_1-1)$ -мерную клетку, а S^{2n_2-1}/ρ_2 — одну 0-мерную. Разбиению отвечают комплексы $C^i: C_{2n_i-1}^i \rightarrow \dots \rightarrow C_0^i$. Разобьем сферу $S^{2(n_1+n_2)-1} = S^{2n_1-1} * S^{2n_2-1}$ на клетки $\sigma_1^1, \dots, \sigma_{k_1}^1, S^{2n_1-1} * \sigma_1^2, \dots, S^{2n_1-1} * \sigma_{k_2}^2$. Полученное разбиение инвариантно относительно $\rho_1 \oplus \rho_2$. Ему соответствует комплекс $C_{2n_2-1}^2 \rightarrow \dots \rightarrow C_0^2 \rightarrow C_{2n_1-1}^1 \rightarrow \dots \rightarrow C_0^1$, составленный из C^2 и C^1 , где $C_0^2 \cong C_{2n_1-1}^1 \cong G[\mathbb{Z}]$, и гомоморфизм $\partial_{2n}: C_0^2 \rightarrow C_{2n_1-1}^1$ есть просто умножение на $\sum_{g \in G} g$. Если ρ — нетривиальное неприводимое представление, то $\sum_{g \in G} \rho(g) = 0$, и гомоморфизм $V \otimes_{G[\mathbb{Z}]} C_0^2 \rightarrow V \otimes_{G[\mathbb{Z}]} C_{2n_1-1}^1$ — нулевой. Отсюда сразу следует утверждение теоремы.

Перейдем теперь к конкретным вычислениям. 1. G — бинарная группа диэдра D_r^* , порожденная образующими $a, b; a^r=b^2=(ab)^2$. Обозначим через ρ_0 представление G в $SU(2)$, такое, что

$$\rho_0(a) = \begin{pmatrix} e^{\pi i/r} & 0 \\ 0 & e^{-\pi i/r} \end{pmatrix}, \quad \rho_0(b) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Разобьем S^3 на клетки инвариантно относительно ρ_0 . Разбиение фундаментальной области изображено на рис. 1. Одномерные клетки, переходящие при факторизации S^3 по ρ_0 в образующие a и b , обозначены соответствующими буквами. Получаем следующий вид оператора ∂ :

$$\partial\sigma^3 = (a-1)\sigma_1^2 + (ba^{-1}-1)\sigma_2^2;$$

$$\partial\sigma_1^2 = (b^{-1} + b^{-1}a + b^{-1}a^2 + \dots + b^{-1}a^{r-1})\sigma_1^1 - (b^{-1} + 1)\sigma_2^1;$$

$$\partial\sigma_2^2 = (ab^{-1} + 1)\sigma_1^1 - (ab^{-1} - b^{-1})\sigma_2^1;$$

$$\partial\sigma_1^1 = (a-1)\sigma^0; \quad \partial\sigma_2^1 = (b-1)\sigma^0.$$

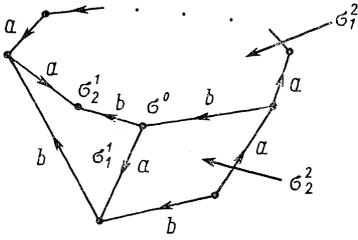


Рис. 1

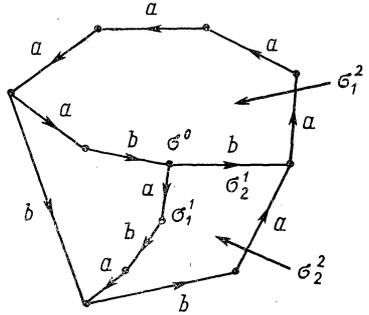


Рис. 2

Элементарные вычисления в случае $\det(\rho(a) - E) \neq 0 \neq \det(\rho(b) - E)$ дают

$$R(S^3/\rho_0, \rho) = \det(\rho(a) - E). \quad (1)$$

Любая сферическая пространственная форма M с $\pi_1(M) = G$ имеет вид $M = S^{4n'-1} / \bigoplus_{i=1}^{n'} \rho_0 \circ \varphi_i$, где $\varphi_i \in \text{Aut}(G)$, $\varphi_i(b) = b$, $\varphi_i(a) = a^{k_i}$, $(k_i, 2r) = 1$.

Из формулы (1) и теоремы 2 следует, что

$$R(M, \rho) = \prod_{i=1}^{n'} \det((\rho(a))^{k_i} - E),$$

где $k_i l_i \equiv 1 \pmod{2r}$. В частности, если $\rho = \rho_0^\top$, то

$$R(M, \rho) = \prod_{j=1}^{n'} (e^{\pi l_j i / r} - 1) (e^{-\pi l_j i / r} - 1).$$

2. Теперь пусть $G \cong I^*$ — бинарная икосаэдральная группа, порожденная элементами a, b ; $a^{-5} = b^2 = (ab)^3$. Поступаем, как и в случае D_r^* :

$$\rho_0(a) = \begin{pmatrix} (\sqrt{5}+1)/4 & (1-\sqrt{5}+2i)/4 \\ (\sqrt{5}-1+2i)/4 & (\sqrt{5}+1)/4 \end{pmatrix}, \quad \rho_0(b) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Разбиение фундаментальной области показано на рис. 2. Оператор ∂ имеет вид

$$\partial\sigma^3 = (aba-1)\sigma_1^2 + (b^{-1}a^{-1}-1)\sigma_2^2;$$

$$\partial\sigma_1^2 = (b+ba+ba^2+ba^3+ba^4)\sigma_1^1 + (b^{-1}+1)\sigma_2^1;$$

$$\partial\sigma_2^2 = (1 + ab + abab) \sigma_1^1 + (a + aba - 1) \sigma_2^1;$$

$$\partial\sigma_1^1 = (a - 1) \sigma^0; \quad \partial\sigma_2^1 = (b - 1) \sigma^0.$$

Если $\det(\rho(a) - E)$, $\det(\rho(b) + E)$, $\det(\rho(ab) - E) \neq 0$, то

$$R(S^3/\rho_0, \rho) = \det(\rho(a) - E) (\det(\rho(ab) - E) (\det(\rho(b) + E))^{-1}).$$

Дальнейшие вычисления ввиду их громоздкости опускаем. Окончательный результат для неприводимых представлений ρ запишем в виде таблицы. У группы I^* имеется единственный внешний автомор-

Размерность ρ	2	2	4	6	3	3	4	5
$tr \rho(a)$	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	$\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$	1	-1	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	$\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$	-1	0
$R(S^3/\rho_0, \rho)$	$\frac{3 - \sqrt{5}}{4}$	$\frac{3 + \sqrt{5}}{4}$	1	2	$-1 + \frac{1}{\sqrt{5}}$	$-1 - \frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{3}{2}$

физм φ . Двумерные представления в таблице — это ρ_0 и $\rho_0 \circ \varphi$. Трехмерные получаются из них стандартным гомоморфизмом $SU(2) \rightarrow SO(3)$. Сферические пространственные формы M с $\pi_1(M) \cong I^*$ имеют вид

$$M = S^{2(n_1+n_2)-1} / \left(\bigoplus_{i=1}^{n_2} \rho_0 \circ \varphi \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{n_1} \rho_0 \right).$$

В этом случае $R(M, \rho_0^\top) = \tau^{n_1-n_2}$, $R(M, \rho_0^\top \circ \varphi) = \tau^{n_2-n_1}$, где $\tau = (3 - \sqrt{5})/4$.

В заключение автор благодарит С. П. Новикова за постановку задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Милнор Дж. Кручение Уайтхеда // Математика. Сб. переводов. 1967. 11, № 1. 3—42.
2. Вольф Дж. Пространства постоянной кривизны. М., 1982.
3. Olum P. Mappings of manifolds and the notion of degree // Ann. Math. 1953. 58, N 3. 458—572.

Поступила в редакцию
18.03.91

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА. 1992. № 5

УДК 512.547

Нгуен Хунг Шон

ТОЖДЕСТВА КОНЕЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП В АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБРАХ

Мы будем рассматривать представления (A, G) , где A — ассоциативная алгебра над фиксированным конечным полем Λ с некоторым заданным гомоморфизмом группы G в группу автоморфизмов алгебры A . Рассматриваются два алфавита $X = \{x_1, x_2, \dots\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ и свободная ассоциативная алгебра $L^\lambda[Y]$ над Λ , порожденная элементами вида y_i^j , где $y_i \in Y$, $f_j \in F_\infty(X)$ — свободная группа счетного ранга.