И. З. Батыршин, Параметрические классы нечетких конъюнкций в задачах оптимизации нечетких моделей,
Исслед. по информ., 2000, выпуск 2, 63–70

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КЛАССЫ НЕЧЕТКИХ КОНЪЮНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ НЕЧЕТКИХ МОДЕЛЕЙ

И.З. Батыршин

В последние годы во многих странах проводятся активные теоретические и прикладные исследования по нечеткому моделированию сложных процессов и систем, имеющих приложения в нечетком управлении, в распознавании образов, в системах принятия решений, прогнозирования и т.д. [1, 2, 14-16, 19, 23]. Эти исследования активизировались после получения в 1992 году фундаментальных результатов о том, что системы нечеткого логического вывода являются универсальными аппроксиматорами функций [14, 18, 22, 24, 25]. В это же время появляются работы по реализации систем нечеткого логического вывода с помощью нейронных сетей, что открыло новые возможности по обучению и настройке нечетких моделей [9, 10, 14, 15, 19, 20, 23]. Разработка специализированных микропроцессоров для программирования систем с нечеткой логикой обеспечила коммерческую реализацию нечетких систем в товарах народного потребления и в промышленности [2, 19, 28]. В 1993-1994 г.г. возникает новое научное направление "Мягкие вычисления", объединяющее методологии построения систем нечеткого логического вывода и нейронных сетей, генетические алгоритмы оптимизации, вероятностные рассуждения и другие методы моделирования и обработки неопределенностей [14, 15, 19, 20, 23].

Нечеткие модели основаны на представлении объекта или процесса в виде совокупности правил системы нечеткого логического вывода. Наибольшее распространение получили два типа нечетких моделей - модели Мамдани и модели Сугено [15]. Простейшая модель Мамдани для систем с двумя входами и одним выходом состоит из правил вида:

Если X есть A и Y есть B, то Z есть C,

где X и Y – имена входных переменных системы, например, *ДАВЛЕНИЕ* и *ТЕМПЕРАТУРА*, Z – имя выходной переменной, например, *ОБЪЕМ*, A, B, C - нечеткие понятия-термы (типа *ОЧЕНЬ МАЛО, МАЛО, ОКОЛО НУЛЯ, ВЕЛИКО,...*), определенные на множестве вещественных значений входных и выходных переменных x, y и z в виде некоторых нечетких множеств (fuzzy set). Аналогичная модель Сугено состоит из правил вида:

Если X есть A и Y есть B, то $z=f(x,y)$, где в правой части правил стоят вещественные функции, выражающие зависимость выходной переменной z от входных переменных x и y. Например, в модели Сугено первого порядка функции f являются линейными функциями от x и y. Широкое практическое применение нечеткие модели получили при построении нечетких регуляторов. В этом случае x обычно обозначает ошибку на выходе системы управления, y - скорость изменения ошибки, а z - управляющий сигнал. В процессе нечеткого логического вывода численным значениям входных переменных x и y ставятся в соответствие их степени принадлежности нечетким понятиям A и B и определяются степени срабатывания правил в результате вычисления конъюнкций (“и”) этих значений. Обычно степень срабатывания правила рассматривается как вес, приписываемый заключению правила. Так как при заданных численных значениях x и y срабатывают обычно несколько правил, то выходной переменной приписывается одновременно несколько значений с разным весом, которые затем “агрегируются” в одно значение, которое и определяет выход системы для заданных значений x и y. Поскольку заключениями правил в модели Мамдани являются нечеткие множества, то они “агрегируются” в одно нечеткое множество, которое в результате процедуры “дефаззификации”, например, вычисления его "центра тяжести", преобразуется в численное значение z [19, 23]. В модели Сугено выход системы обычно вычисляется как взвешенное среднее численных значений z, полученных по всем правилам модели [15].

Таким образом, система нечеткого логического вывода преобразует численные значения входных переменных в численные значения выходных переменных и может быть использована, например, для аппроксимации вещественных функций или экспериментальных данных. Оптимальная аппроксимация может быть получена в результате оптимизации функций принадлежности нечетких понятий, присутствующих в правилах. Параметрическое задание функций принадлежности позволяет производить оптимизацию по параметрам этих функций. Теоретически доказано, что системы нечеткого логического вывода (СНЛВ) являются универсальными аппроксиматорами и могут использоваться для аппроксимации любых функций [14, 18, 22, 24, 25].

Особенность СНЛВ состоит в том, что зависимость между входными и выходными переменными, как, например, в модели Мамдани, выражается в лингвистическом виде и может иметь естественную интерпретацию, понятную пользователю системы. Правила СНЛВ могут отражать экспертные знания о взаимной зависимости параметров моделируемого процесса. Таким образом, СНЛВ представляет собой интеллектуальную информационную систему с базой знаний в виде правил, которые "извлекаются" из данных в задачах прогноза, распознавания, диагностики и интерпретации данных, либо формализуют знания эксперта при построении экспертных систем и систем принятия решений. Оба метода построения правил могут сочетаться, как, например, это бывает при построении нечетких регуляторов.

Возможность моделирования с помощью систем нечеткого логического вывода плохо формализованных процессов и систем, возможность обучения и настройки этих моделей, а также их компактной аппаратной реализации обусловила широкие практические приложения нового научного направления.

Теоретически СНЛВ может с требуемой точностью аппроксимировать любую функцию, однако на практике всегда существуют ограничения на число используемых нечетких множеств и на число правил. Как следствие этого, появляются ограничения на точность аппроксимации. Традиционные подходы к построению нечетких моделей, основанные на настройке или оптимизации функций принадлежности входящих в модель, имеют следующие недостатки:

1. Исходная экспертная информация о виде функций принадлежности может значительно исказиться в процессе оптимизации.

2. Для уменьшения ошибки аппроксимации необходимо увеличение числа используемых функций принадлежности и правил, что приводит к усложнению результирующей нечеткой модели, увеличению памяти для ее хранения и усложнению аппаратной реализации модели.

В работах [5-9] предложен новый подход к построению оптимальных нечетких моделей систем, основанный на параметризации операций (конъюнкции), использующихся в модели, и оптимизации моделей по параметрам операций. Этот подход позволяет преодолевать отмеченные недостатки традиционных подходов. Первый из отмеченных выше недостатков может быть преодолен в результате оптимизации нечетких моделей по нечетким операциям вместо оптимизации по нечетким множествам. Второй недостаток может быть преодолен путем введения ограничений на максимальное число используемых нечетких множеств и правил и использования оптимизации по параметрам операций в дополнение к оптимизации по параметрам нечетких множеств.

Известные параметрические классы нечеткой конъюнкции, которые могут быть использованы в нечетких моделях, достаточно сложны как для оптимизации по параметрам операций, так и для их аппаратной реализации. В [5-9] предлагается использовать в нечетких моделях неассоциативные и некоммутативные операции нечеткой конъюнкции и дизъюнкции, даются методы генерации параметрических классов новых операций, разрабатываются методы оптимизации нечетких моделей по параметрам операций, на тестовых примерах проводится сравнительный анализ применяемого подхода к оптимизации нечетких моделей с традиционными.

В данной работе дается краткий обзор обобщенных операций нечеткой конъюнкции и методов генерации параметрических классов этих операций.

T-нормы как операции нечеткой конъюнкции

В качестве операций нечеткой конъюнкции и нечеткой дизъюнкции традиционно используются T-нормы T и T-конормы S, соответственно, пришедшие в теорию нечетких множеств из теории вероятностных метрических пространств [4, 11-13, 17, 21, 26, 27]. T-нормы определяются как функции T:$[0,1]\times[0,1]\rightarrow[0,1]$, удовлетворяющие свойствам ассоциативности, коммутативности, монотонности: $T(x,y) \leq T(u,v)$ если $x \leq u$, $y \leq v$; и условию $T(x,1) = x$. Простейшими примерами T-норм являются:

$$T_c(x,y) = min\{x,y\};$$

$$T_p(x,y) = xy;$$

$$T_b(x,y) = max\{0, x+y-1\};$$

$$T_d(x,y) = \begin{cases} x, \; if\, y=1 \\ y, \; if\, x=1. \\ 0, \; иначе \end{cases}$$

T-конорма S определяется как ассоциативная, коммутативная и монотонная операция, удовлетворяющая условию $S(x,0)=x$. T-нормы и T-конормы могут быть получены друг из друга с помощью операции нечеткого отрицания, например $N(x) = 1 - x$, на основе закона Де Моргана. Тогда двойственными T-конормами для приведенных выше T-норм будут:

$$S_c(x,y) = max\{x,y\};$$

$$S_p(x,y) = x+y-xy;$$

$$S_b(x,y) = min\{1, x+y\};$$

$$S_d(x,y) = \begin{cases} x, \; if\, y=0 \\ y, \; if\, x=0. \\ 1, \; иначе \end{cases}$$

Для любых T-норм T и T-конорм S следует выполнение следующих неравенств: $T_d(x,y) \leq T(x,y) \leq T_c(x,y) \leq S_c(x,y) \leq S(x,y) \leq S_d(x,y)$. Эти неравенства важны с практической точки зрения, так как они устанавливают границы возможного варьирования операций T и S.

T-нормы, как ассоциативные функции, могут быть генерированы несколькими способами [3, 4, 21]. Например, они могут быть построены как

$$T(x,y) = \varphi^{-1}(T_0(\varphi(x),\varphi(y)));$$

где φ - любая возрастающая биекция φ:[0,1] $\rightarrow$ [0,1] такая, что $\varphi(0)= 0$, $\varphi(1)= 1$, φ^{-1} – обратная функция для φ, T_0 - некоторая T-норма, например, $T(x,y)= xy$. Параметрические классы T-норм в общем случае достаточно сложны из-за необходимости использования обратных функций для их конструирования. Ниже приводятся примеры простейших параметрических классов T-норм, варьирующих от T_d до T_c (при $p \geq 0$):

$$T(x,y) = max(0, x^{-p} + y^{-p} - 1)^{-1/p},$$
$$T(x,y) = 1 - [(1-x)^p + (1-y)^p - (1-x)^p(1-y)^p]^{1/p},$$
$$T(x,y) = 1 - min(1,((1-x)^p + (1-y)^p)^{1/p}).$$

Обощенные операции нечеткой конъюнкции

В работе [7] были предложены методы построения более простых параметрических классов операций конъюнкции, основанные на удалении аксиом ассоциативности и коммутативности из определения T-норм. Условие ассоциативности часто не является необходимым в нечетких моделях, а некоммутативность может позволить учесть разный характер переменных, используемых в нечетких моделях, при фиксированности их позиций в правилах. В [7] операцией нечеткой конъюнкции называется функция T:[0,1]×[0,1]→[0,1], удовлетворяющая условию монотонности и условию $T(x,1) = T(1,x) = x$. Нечеткой дизъюнкцией называется монотонная функция, удовлетворяющая условию $S(x,0) = S(0,x) = x$.

В [7] показано, в частности, что если T_1, T_2 – конъюнкции, s – псевдодизъюнкция, т.е. монотонная функция s:[0,1]×[0,1]→[0,1], удовлетворяющая условию $s(1,y) = s(x,1) = 1$, то функция

$$T(x,y) = T_2(T_1(x,y),s(x,y)),$$

будет конъюнкцией. Примерами простейших неассоциативных конъюнкций, построенных таким путем, являются следующие:

$$T(x,y) = (x+y-xy)\, min(x,y),$$

$$T(x,y) = max(x,y)xy,$$

$$T(x,y) = xy(x+y-xy).$$

Для получения параметрических классов конъюнкций было предложено несколько методов их генерации, в частности:

$$T(x,y) = T_2(T_1(x,y),S(g_1(x),g_2(y))),$$

где T_1 и T_2 - произвольные конъюнкции, S - произвольная дизъюнкция, g_1,g_2:[0,1]→[0,1] - неубывающие функции такие, что $g_1(1)= g_2(1)=1$. Приведем примеры параметрических классов конъюнкций ($p,q \geq 0$):

$$T(x,y) = min(x,y)max\{1-p(1-x),1-q(1-y), 0\},$$
$$T(x,y) = min(x,y)max(x^p,y^q),$$
$$T(x,y) = (xy)min(1, x^p+y^q),$$
$$T(x,y) = xy(x^p+y^q -x^py^q).$$

В работе [8] были предложены методы генерации более общего класса конъюнкций, называемых G-конъюнкциями и определяемых условием монотонности и условиями $T(0,0) = T(0,1)= T(1,0)= 0$, $T(1,1) = 1$. Такие конъюнкции могут быть генерированы следующим образом:

$$T(x,y) = f(T_1(g(x),h(y))),$$

где T_1 это G-конъюнкция, а f, g, h:[0,1]→[0,1] - неубывающие функции такие, что $f(0)= g(0)= h(0)=0$, $f(1)= g(1) = h(1) = 1$. Примерами G-конъюнкций являются следующие функции ($p,q \geq 0$):

$$T(x,y) = min(x^p,y^q),$$
$$T(x,y) = x^py^q.$$

Таким образом, введение в рассмотрение обобщенных классов операций нечеткой конъюнкции позволило предложить более простые параметрические классы этих операций. Ряд введенных параметрических операций конъюнкции использовался в задаче оптимизации нечетких моделей по параметрам операций [6, 7, 9]. На тестовых примерах показано, что оптимизация нечетких моделей по параметрам операций конъюнкции может быть использована вместо или в дополнение к оптимизации параметров функций принадлежности и позволяет уменьшать ошибку аппроксимации данных нечеткими моделями по сравнению с традиционными подходами к построению оптимальных нечетких моделей.

В работе [5] было предложено снять ограничения на значения параметров p,q и рассматривать в качестве их значений любые вещественные значения. Для приведенных выше примеров G-конъюнкций такой подход эквивалентен применению традиционных операций конъюнкции (T-норм) совместно с модификаторами нечетких множеств [29]. Экспериментальное моделирование показало эффективность нового подхода к оптимизации нечетких моделей [5].

Литература

1. Аверкин А.Н., Батыршин И.З., Блишун А.Ф., Силов В.Б., Тарасов В.Б. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д.А.Поспелова. - М.: Наука, 1986.

2. Асаи К., Ватада Д., Иваи С. и др. Прикладные нечеткие системы / Под ред. Т. Тэрано, К. Асаи, М. Сугено. - М.: Мир, 1993.

3. Aczel J. Lectures on Functional Equations and Their Applications. - New York: Academic Press, 1966.

4. Alsina C., Trillas E., Valverde L. On some logical connectives for fuzzy sets theory // J. Math. Anal. Appl. - 1983. - Vol. 93. - P. 15 - 26.

5. Batyrshin I. Generalized parametric conjunction operations in fuzzy modeling // R.Hampel, M.Wagenknecht, N.Chaker (eds.) Fuzzy Control. Theory and Practice. - Heilderberg; New York; Physica-Verlag, 2000. (Advances in Soft Computing). - P. 88-97.

6. Batyrshin I., Bikbulatov A., Kaynak O., Rudas I. Functions approximation based on the tuning of generalized connectives. // Proceedings of EUROFUSE - SIC '99. - Budapest, 1999. - P. 556-561.

7. Batyrshin I., Kaynak O. Parametric classes of generalized conjunction and disjunction operations for fuzzy modeling // IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1999. - V. 7. - N 5. - P. 586-596.

8. Batyrshin I., Kaynak O., Rudas I. Generalized conjunction and disjunction operations for fuzzy control // Proceeding 6th European Congress on Intelligent Technignes & Soft Computing, EUFIT'98. - Aachen, 1998. - Vol. 1. - P. 52-57.

9. Bikbulatov A., Batyrshin I. Tuning of operations in fuzzy models by neural nets // Proceedings of 7th Zittau Fuzzy Colloquium. - Zittau, 1999. - P. 142-147.

10. Cervinka O. Automatic tuning of parametric T-norms and T-conorms in fuzzy modeling // Proc. 7th IFSA World Congress. - Prague: ACADEMIA, 1997. - Vol. 1. - P. 416-421.

11. Dombi J., Vas Z. Basic theoretical treatment of fuzzy connectives. - Acta Cybernet. - 1983. - Vol. 6. - P. 191-201.

12. Dubois D., Prade H. A review of fuzzy set aggregation connectives // Inform. Sci. - 1985. - Vol. 36. - P. 85-121.

13. Fodor J.C. Strict preference relations based on weak t-norms // Fuzzy Sets and Systems. - 1991. - Vol. 43. - P. 327-336.

14. Jang J.S.R. ANFIS: Adaptive-Network-Based Fuzzy Inference System // IEEE Trans. SMC. - 1993. - Vol. 23. - N 3. - P. 665-685.

15. Jang J.-S.R., Sun C.T., Mizutani E. Neuro-Fuzzy and Soft Computing. A Computational Approach to Learning and Machine Intelligence. - Prentice-Hall International, 1997.

16. Kaufmann A., Gupta M.M. Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science. - Amsterdam: North-Holland, 1988.

17. Klement E.P. Construction of fuzzy σ-algebras using triangular norms // J. Math. Anal. Appl. - 1982. - Vol. 85. - P. 543-565.

18. Kosko B. Fuzzy systems as universal approximators // Proceedings of the First IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems (IEEE FUZZ-92). - 1992. - P. 1153-1162.

19. Kosko B. Fuzzy Engineering. - New Jersey: Prentice-Hall, 1997.

20. Lin C.T. Neural Fuzzy Control Systems with Structure and Parameter Learning. - Singapore: World Scientific, 1994.

21. Schweizer B., Sklar A. Probabilistic Metric Spaces. - Amsterdam: North-Holland, 1983.

22. Wang L.-X. Fuzzy systems are universal approximators // Proceedings of the IEEE Int. Conf. On Fuzzy Systems. - San Diego, 1992.

23. Wang Li-Xin. A Course in Fuzzy Systems and Control. - Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall PTR, 1997.

24. Wang L., Mendel J.M. Fuzzy basis functions, universal approximation and orthogonal least-squares learning // IEEE Trans. on Neural Networks. - 1992. - Vol. 3. - N 5. - P. 807-814.

25. Watkins F.A. Comments on Singh and Zeng: "Approximation theory of fuzzy systems - SISO case" // IEEE Trans. on Fuzzy Systems. - 1996. - Vol. 4. - N 1. - P. 80-81.

26. Weber S. A general concept of fuzzy connectives, negations and implications based on t-norms and t-conorms // Fuzzy Sets Syst. - 1983. - Vol. 11. - P. 115-134.

27. Yager R.R. On a general class of fuzzy connectives // Fuzzy Sets Syst. - 1980. - Vol. 4. - P. 235-242.

28. Yamakawa T., Miki T. The current mode fuzzy logic integrated circuits fabricated by the standard CMOS process // IEEE Trans. Comput. - 1986. - Vol. 35. - P. 161-167.

29. Zadeh L.A. A fuzzy-set-theoretic interpretation of linguistic hedges // Journal of Cybernetics. - 1972. - Vol. 2. - N. 3. P. 4-34.