

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

S. N. Popova, Simultaneous Local Controllability of the Spectrum and the Lyapunov Irregularity Coefficient of Regular Systems,  
*Differ. Uravn.*, 2004, Volume 40, Number 3, 425–428

<https://www.mathnet.ru/eng/de11050>

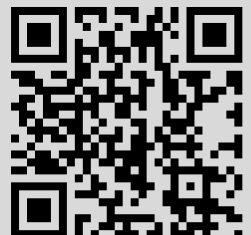
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.168

April 25, 2025, 02:57:25



УДК 517.977+517.926

# ОДНОВРЕМЕННАЯ ЛОКАЛЬНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ СПЕКТРА И КОЭФФИЦИЕНТА НЕПРАВИЛЬНОСТИ ЛЯПУНОВА ПРАВИЛЬНЫХ СИСТЕМ

© 2004 г. С. Н. Попова

Наряду с исходной линейной однородной дифференциальной системой

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

с кусочно-непрерывным ограниченным матричным коэффициентом  $A(\cdot)$  рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

где матрица  $B(\cdot)$  также предполагается ограниченной и кусочно-непрерывной. Замкнув систему (2) линейной обратной связью  $u = Ux$  с ограниченной кусочно-непрерывной  $m \times n$ -матрицей  $U(\cdot)$ , получим систему

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Поскольку система (3) является однородной и имеет ограниченные кусочно-непрерывные коэффициенты, для нее определены характеристические показатели и иные инварианты преобразований Ляпунова [1, с. 42]. Основная задача, решаемая в настоящей работе, состоит в выяснении условий, при которых за счет надлежащего выбора коэффициента обратной связи  $U(\cdot)$  (рассматриваемого как управляющее воздействие) возможно целенаправленное изменение полного спектра показателей Ляпунова [1, с. 42] и коэффициента неправильности Ляпунова [1, с. 51] системы (3) в некоторой окрестности полного спектра и коэффициента неправильности невозмущенной системы (1), т.е. управление ими.

Введем необходимые обозначения. Пусть  $\mathbb{R}^n$  – евклидово пространство размерности  $n$  с каноническим ортонормированным базисом  $e_1, \dots, e_n$  и нормой  $\|\cdot\|$ , определяемой равенством  $\|x\| = \sqrt{x^*x}$  (звездочка означает транспонирование);  $M_{mn}$  – пространство вещественных матриц размерности  $m \times n$  со спектральной нормой, т.е. операторной нормой, индуцируемой в  $M_{mn}$  евклидовыми нормами в  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{R}^m$ . Пространство ограниченных кусочно-непрерывных отображений  $U: I \rightarrow M_{mn}$ , определенных на произвольном промежутке  $I \subset \mathbb{R}$ , с равномерной нормой  $\|U\|_{C(I)} := \sup\{\|U(t)\| : t \in I\}$  будем обозначать  $KC_{mn}(I)$ .

Матрицу Коши однородной системы (1) обозначим через  $X(t, s)$ , а ее полный спектр показателей Ляпунова – через  $\lambda_1(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$ . Для произвольной кусочно-непрерывной ограниченной функции  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  положим

$$\bar{p} = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \int_0^t p(s) ds, \quad \underline{p} = \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \int_0^t p(s) ds, \quad \check{p} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \int_0^t p(s) ds$$

– соответственно верхнее, нижнее и точное средние значения  $p(\cdot)$ .

Будем предполагать, что система (2) равномерно вполне управляема [2], т.е. существуют такие  $\vartheta > 0$  и  $\alpha > 0$ , что при каждом  $t_0 \in \mathbb{R}$  и  $\xi \in \mathbb{R}^n$  имеет место неравенство

$$\int_{t_0}^{t_0+\vartheta} \|\xi^* X(t_0, s) B(s)\|^2 ds \geq \alpha \|\xi\|^2.$$

Тогда [3, теорема 2] выполнено следующее свойство: найдутся такие  $\beta_0 > 0$  и  $l_0 > 0$ , что для произвольной матрицы  $Q(\cdot) \in KC_{nn}(\mathbb{R})$ ,  $\|Q\|_C \leq \beta_0$ , существует управление  $U(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$ ,  $\|U\|_C \leq l_0 \|Q\|_C$ , гарантирующее асимптотическую эквивалентность системы  $\dot{y} = (A(t) + Q(t))y$  и системы (3) при  $U = U(\cdot)$ .

**Теорема.** Если система (2) равномерно вполне управляема, а однородная система (1) правильная, то система (3) обладает свойством одновременной локальной пропорциональной управляемости полного спектра показателей Ляпунова и коэффициента неправильности Ляпунова, т.е. найдутся

такие  $\beta > 0$  и  $l > 0$ , что для любого набора чисел  $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n$ , удовлетворяющих неравенству  $\max\{|\mu_i - \lambda_i(A)| : i = \overline{1, n}\} \leq \beta$ , и любого числа  $\sigma \in [0, \beta]$  существует управление  $U(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$ ,  $\|U\|_C \leq l \max\{\sigma, |\mu_i - \lambda_i(A)| : i = \overline{1, n}\}$ , обеспечивающее выполнение равенств  $\lambda_i(A + BU) = \mu_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $\sigma_{\text{Л}}(A + BU) = \sigma$ .

**Доказательство.** Приведем правильную однородную систему (1) перроновским преобразованием  $y = L(t)x$  к системе

$$\dot{y} = F(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad (4)$$

с верхней треугольной матрицей  $F(\cdot) = \{f_{ij}(\cdot)\}_{i,j=1}^n$ . Система (4) правильна, поэтому в силу критерия Ляпунова правильности треугольной системы [4, с. 174–178] диагональные элементы матрицы  $F(\cdot)$  имеют точные средние значения  $\check{f}_{ii}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , реализующие полный спектр показателей Ляпунова  $\lambda_1(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$  системы (4). Выберем матрицу перроновского преобразования  $L(\cdot)$  так, чтобы выполнялись равенства  $\lambda_i(A) = \check{f}_{ii}$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Преобразование  $y = L(t)x$  приводит систему (2) к системе

$$\dot{y} = F(t)y + L(t)B(t)u,$$

которая равномерно вполне управляема согласно лемме 2.4 из [5]. Применяя к этой системе теорему 2 из работы [3], найдем величины  $\beta_0 > 0$ ,  $l_0 > 0$  и положим  $\beta = \beta_0/2$ . Возьмем любой набор чисел  $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n$ , таких, что  $|\mu_i - \lambda_i(A)| \leq \beta$ ,  $i = \overline{1, n}$ , и произвольное число  $\sigma \in [0, \beta]$ . Положим  $P(t) = \text{diag}(\mu_1 - \lambda_1(A), \dots, \mu_{n-1} - \lambda_{n-1}(A), p(t) - \lambda_n(A))$ , где  $p(t) = \mu_n - \sigma + \sigma(\sin \ln(|t|+1) + \cos \ln(|t|+1))/2$ . Тогда [6, с. 77–78]  $\underline{p} = \mu_n - \sigma$ ,  $\overline{p} = \mu_n$  и  $\mu_n - \sigma \leq p(t) \leq \mu_n$  при всех  $t \in \mathbb{R}$ . Следовательно,  $\|p - \lambda_n(A)\|_C \leq |\mu_n - \lambda_n(A)| + \sigma \leq 2 \max\{\sigma, |\mu_n - \lambda_n(A)|\}$ , поэтому  $\|P\|_C = \max\{\|p - \lambda_n(A)\|_C, |\mu_i - \lambda_i(A)| : i = \overline{1, n-1}\} \leq 2 \max\{\sigma, |\mu_i - \lambda_i(A)| : i = \overline{1, n}\} \leq 2\beta = \beta_0$ . Из теоремы 2 работы [3] следует, что найдется управление  $V(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$ ,  $\|V\|_C \leq l_0\|P\|_C$ , обеспечивающее асимптотическую эквивалентность замкнутой системы

$$\dot{y} = (F(t) + L(t)B(t)V(t))y \quad (5)$$

и возмущенной системы

$$\dot{z} = G(t)z, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad (6)$$

где  $G(\cdot) := F(\cdot) + P(\cdot)$ ,  $G(\cdot) = \{g_{ij}(\cdot)\}_{i,j=1}^n$ . Применив к системе (5) обратное преобразование  $y = L(t)x$ , получим систему  $\dot{x} = (A(t) + B(t)V(t)L(t))x$ . Положим  $U(t) = V(t)L(t)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \|U\|_C &\leq \|V\|_C \|L\|_C = \|V\|_C \leq l_0 \|P\|_C \leq \\ &\leq 2l_0 \max\{\sigma, |\mu_i - \lambda_i(A)| : i = \overline{1, n}\} =: l \max\{\sigma, |\mu_i - \lambda_i(A)| : i = \overline{1, n}\}, \end{aligned}$$

а для показателей Ляпунова и коэффициента неправильности Ляпунова системы (3) с  $U = U(\cdot)$  справедливы равенства

$$\lambda_i(A + BU) = \lambda_i(G), \quad i = \overline{1, n}, \quad \sigma_{\text{Л}}(A + BU) = \sigma_{\text{Л}}(G).$$

Докажем, что  $\lambda_i(G) = \mu_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $\sigma_{\text{Л}}(G) = \sigma$ . Для этого рассмотрим усеченную систему

$$\dot{\eta} = \tilde{G}(t)\eta, \quad \eta \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad (7)$$

матрица  $\tilde{G}(t) = \{g_{ij}(t)\}_{i,j=1}^{n-1}$  которой получается из  $G(t)$  вычеркиванием последней строки и последнего столбца. Поскольку  $\tilde{G}(\cdot)$  – верхняя треугольная матрица, а ее диагональные элементы имеют точные средние значения  $\check{g}_{ii} = \check{f}_{ii} + \mu_i - \lambda_i(A) = \mu_i$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ , в силу упомянутого выше критерия правильности Ляпунова система (7) правильна, а ее полный спектр состоит из чисел  $\lambda_i(\tilde{G}) = \mu_i$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ .

Пусть  $\eta^{(1)}(\cdot), \dots, \eta^{(n-1)}(\cdot)$  – нормальная фундаментальная система решений (ФСР) системы (7) такая, что  $\lambda[\eta^{(i)}] = \mu_i$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ . Для каждого  $t \in \mathbb{R}$  и  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  через  $z^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^n$  обозначим вектор, первые  $n-1$  координат которого совпадают с соответствующими координатами вектора  $\eta^{(i)}(t)$ , а последняя координата равна нулю. Тогда  $z^{(1)}(\cdot), \dots, z^{(n-1)}(\cdot)$  – линейно независимые решения системы (6) такие, что  $\lambda[z^{(i)}] = \mu_i$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ .

Найдем показатель Ляпунова решения  $z^{(n)}(\cdot)$  системы (6), удовлетворяющего начальному условию  $z^{(n)}(0) = e_n$ . Для его координат справедливы равенства

$$z_n^{(n)}(t) = h_n(t), \quad z_k^{(n)}(t) = \sum_{j=k+1}^n h_k(t) \int_0^t h_k^{-1}(s) f_{kj}(s) z_j^{(n)}(s) ds, \quad k = n-1, \dots, 1,$$

где  $h_i(t) := \exp \int_0^t g_{ii}(s) ds$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Докажем, что при всех  $l \in \{1, \dots, n\}$  имеет место неравенство

$$\lambda[z_l^{(n)}] \leq \mu_n. \tag{8}$$

Действительно, при  $l = n$  выполнено строгое равенство

$$\lambda[z_n^{(n)}] = \lambda[h_n] = \overline{g_{nn}} = \overline{(f_{nn} + p - \lambda_n(A))} = \bar{p} + \check{f}_{nn} - \lambda_n(A) = \bar{p} = \mu_n.$$

Предположим, что неравенство (8) установлено при всех  $l \in \{n, \dots, k + 1\}$ , где  $k \in \{n - 1, \dots, 1\}$ . Проверим неравенство (8) для  $l = k$ . Для каждого  $l \in \{k + 1, \dots, n\}$  имеем соотношения

$$\lambda[f_{kl}(t)h_k^{-1}(t)z_l^{(n)}(t)] \leq \lambda[h_k^{-1}] + \lambda[z_l^{(n)}] \leq \overline{(-g_{kk})} + \mu_n = \mu_n - \check{g}_{kk} = \mu_n - \mu_k,$$

причем разность  $\mu_n - \mu_k$  неотрицательна. Следовательно [4, с. 132],

$$\lambda \left[ \int_0^t f_{kl}(s)h_k^{-1}(s)z_l^{(n)}(s) ds \right] \leq \mu_n - \mu_k,$$

поэтому

$$\lambda[z_k^{(n)}] \leq \max \left\{ \lambda \left[ h_k(t) \int_0^t f_{kl}(s)h_k^{-1}(s)z_l^{(n)}(s) ds \right] : l = \overline{k + 1, n} \right\} \leq \lambda[h_k] + \mu_n - \mu_k = \mu_n.$$

Таким образом, неравенство (8) доказано. Из него вытекает, что  $\lambda[z^{(n)}] = \max\{\lambda[z_k^{(n)}] : k = \overline{1, n}\} = \lambda[z_n^{(n)}] = \mu_n$ .

Совокупность функций  $z^{(1)}(\cdot), \dots, z^{(n)}(\cdot)$  линейно независима на  $\mathbb{R}$ , так как  $z_n^{(n)}(t) \neq 0$  при каждом  $t \in \mathbb{R}$ , а  $z_n^{(1)}(t) \equiv \dots \equiv z_n^{(n-1)}(t) \equiv 0$  на  $\mathbb{R}$ . Следовательно, функции  $z^{(1)}(\cdot), \dots, z^{(n)}(\cdot)$  образуют ФСР системы (6). Докажем ее нормальность. Для этого возьмем произвольный ненулевой вектор  $\xi = \text{col}(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$  и вычислим показатель Ляпунова решения  $z(\cdot) = \sum_{i=1}^n \xi_i z^{(i)}(\cdot)$ . Пусть  $j := \max\{i : \xi_i \neq 0\}$ . Если  $j = n$ , то

$$z_n(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i z_n^{(i)}(t) = \xi_n z_n^{(n)}(t),$$

поэтому  $\lambda[z] \geq \lambda[z_n] = \lambda[z_n^{(n)}] = \mu_n$ . С другой стороны,

$$\lambda[z] = \lambda \left[ \sum_{i=1}^n \xi_i z^{(i)} \right] \leq \max\{\lambda[z^{(i)}] : i = \overline{1, n}\} = \mu_n.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае  $\lambda[z] = \mu_n = \max\{\lambda[z^{(i)}] : \xi_i \neq 0\}$ . Если же  $j < n$ , то последняя координата вектора  $z(t)$  тождественно равна нулю на  $\mathbb{R}$ , поэтому в силу нормальности ФСР  $\eta^{(1)}, \dots, \eta^{(n-1)}$  системы (7) имеем равенства

$$\lambda[z] = \lambda \left[ \sum_{i=1}^j \xi_i \eta^{(i)} \right] = \lambda[\eta^{(j)}] = \mu_j = \max\{\lambda[z^{(i)}] : \xi_i \neq 0\}.$$

Это означает, что ФСР  $z^{(1)}(\cdot), \dots, z^{(n)}(\cdot)$  несжимаема [4, с. 142] и в силу теоремы Ляпунова [4, с. 142–144] нормальна. Таким образом, полный спектр показателей Ляпунова системы (6) состоит из чисел  $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n$ . Для коэффициента неправильности Ляпунова этой системы имеем равенства [7, с. 77]

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{Л}}(G) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i(G) - \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \int_0^t \text{Sp } G(s) ds = \\ &= \sum_{i=1}^n \mu_i - \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \int_0^t \left( \sum_{i=1}^{n-1} (f_{ii}(s) + \mu_i - \lambda_i(A)) + f_{nn}(s) + p(s) - \lambda_n(A) \right) ds = \end{aligned}$$

$$= \mu_n + \sum_{i=1}^n \lambda_i(A) - \sum_{i=1}^n \check{f}_{ii} - \underline{p} = \mu_n - \underline{p} = \mu_n - (\mu_n - \sigma) = \sigma.$$

Теорема доказана.

**Замечание.** В работах [8, 9] установлена локальная управляемость показателей Ляпунова равномерно согласованных систем в случае правильности однородной системы (1). В отличие от доказанного в настоящей работе утверждения указанной теоремы не содержат липшицевой оценки нормы управления в зависимости от возмущения полного спектра показателей Ляпунова. Кроме того, в этих работах не рассматривалась задача управления коэффициентом неправильности.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 03-01-00014) и Конкурсным центром Министерства образования Российской Федерации (проекты Е00-1.0-5 и Е02-1.0-100).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляпунов А.М.* Собр. соч.: В 6 т. Т. 2. М.; Л., 1956.
2. *Kalman R.E.* // Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. 1960. V. 5. № 1. P. 102–119.
3. *Попова С.Н.* // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 1. С. 41–46.
4. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
5. *Попова С.Н.* Задачи управления показателями Ляпунова: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ижевск, 1992.
6. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.
7. *Изобов Н.А.* // Итоги науки и техники. Мат. анализ. 1974. Т. 12. С. 71–146.
8. *Зайцев В.А.* Согласованность, достижимость и управление показателями Ляпунова: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ижевск, 2000.
9. *Тонков Е.Л.* // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. Suppl. 1. 2000. P. S228–S253.

Институт математики и информатики при Удмуртском  
государственном университете, г. Ижевск

Поступила в редакцию  
20.12.2002 г.