А. М. Гайсин, Р. А. Гайсин, Т. И. Белоус, Регулярность роста ряда Дирихле по усиленно не полной системе экспонент,

Сиб. матем. журн., 2023, том 64, номер 4, 742–752

https://www.mathnet.ru/smj7794

Сибирский математический журнал
Июль—август, 2023. Том 64, № 4

УДК 517.53

РЕГУЛЯРНОСТЬ РОСТА РЯДА ДИРИХЛЕ ПО УСИЛЕННО НЕ ПОЛНОЙ СИСТЕМЕ ЭКСПОНЕНТ

А. М. Гайсин, Р. А. Гайсин, Т. И. Белоус

Аннотация. Изучается поведение суммы ряда Дирихле $F(s) = \sum_n a_n e^{\lambda_n s}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, абсолютно сходящегося в левой полуплоскости $\Pi_0 = \{s = \sigma + it : \sigma < 0\}$, на кривой, произвольным образом приближающейся к мнимой оси — границе этой полуплоскости. Предполагается, что для максимального члена ряда выполнена некоторая оценка снизу на какой-то последовательности точек $\sigma_n \uparrow 0-$.

Суть обсуждаемых задач следующая. Пусть γ — некоторая кривая, начинающаяся в полуплоскости Π_0 и оканчивающаяся на ее границе или асимптотически приближающаяся к ней. Спрашивается, при каких условиях найдется последовательность $\{\xi_n\} \subset \gamma$, $\operatorname{Re}\xi_n \to 0-$, такая, что $\ln M_F(\operatorname{Re}\xi_n) \sim \ln |F(\xi_n)|$, где $M_F(\sigma) = \sup_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)|$. Ответ на этот вопрос был получен А. М. Гайсиным еще в 2003 г. В настоящей статье получено решение следующей задачи: при каких дополнительных условиях на γ будет справедливо усиленное асимптотическое соотношение для суммы $F(s)$ ряда Дирихле в случае, когда аргумент s стремится к мнимой оси вдоль γ по достаточно массивному множеству?

DOI 10.33048/smzh.2023.64.407

Ключевые слова: ряд Дирихле, лакунарный степенной ряд, максимальный член, кривая ограниченного наклона, полуплоскость сходимости.

1. Введение

Статья посвящена оценке суммы ряда Дирихле, область сходимости которого — полуплоскость, на дуге ограниченного наклона. По определению дуга $\gamma = \{z = x + iy : y = g(x),\ a \le x \le b\}$ *имеет ограниченный наклон*, если выполняется условие Липшица

$$\sup_{x_1 \ne x_2} \left| \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} \right| = K < \infty. \tag{1}$$

Условие (1) означает, что тангенсы углов всех хорд по модулю не превосходят K. В этом случае дугу γ для краткости будем называть *дугой K-ограниченного наклона.* В отличие от случая произвольных кривых в данном случае можно получить более сильные оценки, а именно точные асимптотические равенства, справедливые всюду на полуинтервале $[-1, 0)$ вне некоторого исключительного множества E, т. е. на *асимптотическом множестве* $A = [-1, 0)\backslash E$. Подобным исследованиям, связанным с асимптотикой целых функций, заданных лакунарными степенными рядами

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{p_n}, \quad a_n \ne 0, \quad p_n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

или их обобщениями — рядами Дирихле с последовательностью показателей $\{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — посвящены многочисленные работы (см., например, [1]). В ряде статей была обнаружена тесная связь между асимптотическими свойствами рядов Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$ и аппроксимативными свойствами системы экспонент $\{e^{\lambda_n z}\}$ на дугах. Наиболее полно эти вопросы исследовались в работах [2, 3], где были получены результаты законченного характера по проблеме неполноты системы экспонент на дугах. Но случай, когда область сходимости ряда (2) есть круг $D(0,1) = \{z : |z| < 1\}$ или область сходимости ряда Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it, \quad 0 < \lambda_n \uparrow \infty, \tag{3}$$

— полуплоскость $\Pi_0 = \{s : \operatorname{Re} s < 0\}$, исследован недостаточно. Эта ситуация впервые была рассмотрена в [4]. Вкратце остановимся на основных результатах нашей работы.

Пусть γ — любая спрямляемая кривая из полуплоскости Π_0, примыкающая к мнимой оси. Нас будет интересовать следующий вопрос: при каких условиях на показатели λ_n хотя бы для какой-то последовательности $\{s_n\}$, $s_n \in \gamma$, при $\sigma_n = \operatorname{Re} s_n \to 0-$

$$\ln |F(s_n)| = (1 + o(1)) \ln M_F(\sigma_n), \tag{4}$$

где $M_F(\sigma) = \sup\limits_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)|$, а $F(s)$ — сумма ряда (3).

Для целых рядов Дирихле ответ на сформулированный вопрос дан в статье [1], где в терминах λ_n получен критерий того, чтобы для суммы любого такого ряда (3) выполнялось соотношение типа (4) на любой кривой Γ, уходящей в бесконечность и обладающей свойством: если $s \in \Gamma$ и $s \to \infty$, то $\operatorname{Re} s \to +\infty$. Как показано в [3], условия этого критерия достаточны для того, чтобы система экспонент $\{e^{\lambda_n z}\}$ была усиленно не полна в полосе

$$P(-1, 0) = \{z = x + iy : -1 \le x \le 0,\ |y| < \infty\},$$

т. е. для любого $\beta > 0$, $\beta \notin \Lambda$,

$$\inf_{\gamma} \inf_{c_n} \Big\| e^{\beta z} - \sum_{n} c_n e^{\lambda_n z} \Big\|_{\gamma} = \varepsilon_\beta > 0.$$

Здесь $\|g\|_\gamma = \max\limits_{t \in \gamma} |g(t)|$, внутренний инфимум берется по всем квазиполиномам $\sum\limits_{n} c_n e^{\lambda_n z}$, а внешний — по всем кривым γ из полосы $P(-1,0)$, соединяющим ее вертикальные стороны.

Этот далеко не простой результат, полученный в [3], явно указывает на связь соотношения (4) с усиленной неполнотой системы экспонент $\{e^{\lambda_n z}\}$. Для того чтобы убедиться в этом, сформулируем условия упомянутого критерия. Они следующие (см. [3]):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty, \tag{A}$$

$$\int_0^{\lambda_n} \frac{\mu(\lambda_n; t)}{t}\, dt \le w(\lambda_n), \quad n \ge 1, \tag{B}$$

где $\mu(\lambda_n;t)$ — число точек λ_k, $\lambda_k \neq \lambda_n$, из отрезка $\{h : |h-\lambda_n| \le t\}$, а мажоранта w такова, что $w(t)(1+t^2)^{-1}$ принадлежит $L^1(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$.

Отметим, что в [1] условие (B) приводится в виде

$$-\ln|Q'(\lambda_n)| \le w(\lambda_n), \quad n \ge 1,$$

где $Q(z)$ — четное произведение Вейерштрасса с нулевым множеством $\{\pm\lambda_n\}$.

Таким образом, если для любого целого ряда Дирихле (3) выполняется асимптотическое соотношение типа (4), то, как следует из результатов работ [1, 3], система экспонент $\{e^{\lambda_n z}\}$ усиленно не полна в полосе $P(-1,0)$.

В случае полуплоскости Π_0 к показателям ряда (3) приходится предъявлять более жесткие по сравнению с (A), (B) требования, чем в ситуации плоскости (см. [4]). Это означает, что система $\{e^{\lambda_n z}\}$ тем более усиленно не полна. Пока остается открытым следующий вопрос: является ли условие усиленной неполноты системы $\{e^{\lambda_n z}\}$ хотя бы необходимым для того, чтобы для любого ряда (3), абсолютно сходящегося в Π_0, выполнялось соотношение регулярности роста (4)?

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность, имеющая конечную верхнюю плотность

$$D = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n}.$$

Введем также следующие функции распределения точек $\lambda \in \Lambda$:

$$n(t) = \sum_{\lambda_n \le t} 1, \quad N(t) = \int_0^t \frac{n(x)}{x}\,dx.$$

Пусть L — класс всех положительных непрерывных и неограниченно возрастающих на $[0,\infty)$ функций. Пусть W — класс сходимости, т. е.

$$W = \left\{ w \in L : \int_1^\infty \frac{w(x)}{x^2} dx < \infty \right\},$$

а

$$W_\varphi = \{w \in W : \varlimsup_{t\to\infty} \varphi(t)J(t;w) = 0\}, \quad \underline{W}_\varphi = \{w \in W : \varliminf_{t\to\infty} \varphi(t)J(t;w) = 0\},$$

где $\varphi \in L$,

$$J(t;w) = \int_t^\infty \frac{w(x)}{x^2}\,dx.$$

Через H обозначим подкласс L, состоящий из всех функций Φ, для которых

1) $\sup\limits_{t>0} \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)} < \infty$,

2) $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\varphi(t)\ln t}{t} = 0$,

где φ — функция, обратная к Φ.

Пусть $e \subset [-1,0)$ — измеримое по мере m Лебега множество. Напомним, что *верхней* De и *нижней* de *плотностями* называются величины (см. [4]):

$$De = \varlimsup_{\sigma\to 0-} \frac{m(e\cap[\sigma,0))}{|\sigma|}, \quad de = \varliminf_{\sigma\to 0-} \frac{m(e\cap[\sigma,0))}{|\sigma|}.$$

В [4] доказана следующая

Теорема 1. *Пусть $\Phi \in H$ и выполняется оценка*

$$\varlimsup_{\sigma\to 0-} \frac{\ln\mu(\sigma)}{\Phi\left(\frac{1}{|\sigma|}\right)} > 0,$$

где $\mu(\sigma) = \max\limits_{n\geq 1}\{|a_n|e^{\lambda_n\sigma}\}$ — максимальный член ряда (3).

Предположим, что для некоторой функции $w \in W$ выполняются оценки

$$-\ln|Q'(\lambda_n)| \leq w(\lambda_n), \quad n \geq 1,$$

где

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right).$$

Если $\varphi(t)J(t; w + N) = o(1)$, $t \to \infty$ ($N = N(t)$ — введенная выше функция распределения Λ), то при $\sigma \to 0-$ вне некоторого множества $e \subset [-1, 0)$ нулевой нижней плотности справедливо равенство

$$\ln M_F(\sigma) = (1 + o(1))\ln|F(\sigma)|,$$

где $M_F(\sigma) = \sup\limits_{|t|<\infty}|F(\sigma + it)|$.

В настоящей работе получены более общие результаты, а именно, получены асимптотические оценки такого типа для дуг $\gamma \subset \Pi_0$ ограниченного наклона, оканчивающихся на мнимой оси.

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема 2. *Пусть $\varphi \in L$, $w \in W_\varphi$, где $w(x) = N(ex)$. Если максимальный член ряда* (3) *удовлетворяет условию*

$$\varlimsup_{\sigma\to 0-} \frac{\ln\mu(\sigma)}{\Phi\left(\frac{1}{|\sigma|}\right)} > 0 \tag{5}$$

(Φ — функция, обратная к φ), а для некоторой функции $\widetilde{w} \in W_\varphi$ выполняются оценки

$$-\ln|Q'(\lambda_n)| \leq \widetilde{w}(\lambda_n), \quad n \geq 1, \tag{6}$$

то для любой дуги γ K-ограниченного наклона, определяемой уравнением $y = g(x)$, $-1 \leq x \leq 0$, при $s \in \gamma$, $\operatorname{Re} s = \sigma \to -1$ по асимптотическому множеству $A \subset [-1, 0)$, верхняя плотность DA которого удовлетворяет неравенству

$$DA = \varlimsup_{\sigma\to 0+} \frac{m(A \cap [\sigma, 0))}{|\sigma|} \geq \frac{1}{\sqrt{1 + K^2}},$$

справедливо соотношение

$$\ln|F(s)| = (1 + o(1))\ln M_F(\sigma), \quad s \in \gamma,\ s = \sigma + it. \tag{7}$$

Замечание. Если в теореме 2 функция $N(ex)$ принадлежит классу $\underline{W}_\varphi$, а вместо (5) выполняется условие

$$\varliminf_{\sigma\to 0-} \frac{\ln\mu(\sigma)}{\Phi\left(\frac{1}{|\sigma|}\right)} > 0,$$

то равенство (7) также имеет место при $s \in \gamma$, $\operatorname{Re} s = \sigma \to 0-$ по множеству $A \subset [-1, 0)$, для которого $DA \geq \frac{1}{\sqrt{1+K^2}}$.

Теорема 2, в отличие от теоремы 1 из [4], доказана без дополнительных ограничений на функцию φ. Если в [4] требуется, чтобы Φ принадлежала H (Φ — обратная к φ), то в нашем случае функция φ подчинена минимальному ограничению: $\varphi \in L$. Кроме того, в теореме 2 вместо полуинтервала $[-1, 0)$ рассматривается случай дуги γ ограниченного K-наклона.

В отличие от работы [1], где исследуются целые ряды Дирихле, в случае полуплоскости возникают существенные трудности, связанные с оценкой размеров исключительных множеств. Поэтому здесь предполагается выполнение некоторых оценок снизу для максимального члена ряда. Эти оценки вполне естественны и в других задачах встречались ранее (см., например, в [4, 5]). Указанные оценки для $\ln \mu(\sigma)$ снизу позволяют получить необходимые оценки для мер исключительных множеств из $[-1, 0)$.

2. Доказательство теоремы 2

Пусть $L, W, W_\varphi, \underline{W}_\varphi$ — классы функций, введенные выше. Будем говорить, что две функции φ и w из класса L *согласованы*, если $\varphi(x)w(x) = o(x)$ при $x \to \infty$.

Пусть, как и выше, $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность вещественных чисел, имеющая конечную верхнюю плотность

$$D = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{\lambda_n}.$$

В этом случае функция Q, определенная в теореме 1, является целой функцией экспоненциального типа (см., например, [6]).

Пусть ряд Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it, \tag{8}$$

сходится в полуплоскости $\Pi_0 = \{s : \operatorname{Re} s < 0\}$. Через $\mu(\sigma)$ обозначим максимальный член ряда (8), а через $\nu = \nu(\sigma)$ — центральный индекс, т. е. $\nu(\sigma) = \max\{n \geq 1 : \mu(\sigma) = |a_n| e^{\lambda_n \sigma}\}$.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 2, сформулируем лемму.

Лемма 1. *Пусть функция $g(z)$ аналитична и ограничена в круге $D(0, R) = \{z : |z| < R\}$, причем $|g(0)| \geq 1$. Если $0 < r < 1 - N_0^{-1}$ $(N_0 > 1)$, то существует не более чем счетное множество кружков*[1)]

$$V_n = \{z : |z - z_n| \leq \rho_n\}, \quad \sum_n \rho_n \leq R r^{N_0}(1 - r) \tag{9}$$

таких, что в круге $\{z : |z| \leq rR\}$, но вне множества $\bigcup_n V_n$, справедлива оценка

$$\ln |g(z)| \geq \frac{R - |z|}{R + |z|} \ln |g(0)| - 5 N_0 L_0, \tag{10}$$

где

$$L_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |g(Re^{i\theta})|\, d\theta - \ln |g(0)|.$$

[1)] Когда речь идет об исключительных множествах, следуя Б. Я. Левину, А. Ф. Леонтьеву и др., будем употреблять термин «кружок» вместо «круг» (см. об этом подробнее в [7]).

Лемма 1 доказана в [8].

Приступим к доказательству основного результата.

Доказательство. Пусть $w(x) = N(ex)$, $w \in W_\varphi$, $\widetilde{w}$ — мажоранта из условия (6). Так как $\widetilde{w} \in W_\varphi$, функция $w_1(x) = w(x) + \widetilde{w}(x)$ принадлежит классу W_φ. Следовательно, $\varphi(x)w_1(x) = o(x)$ при $x \to \infty$. Тогда найдется функция $w^*(x) = \beta(x)w_1(x)$, где $0 < \beta(x) \uparrow \infty$, $x \to \infty$, также принадлежащая W_φ, для которой $\varphi(x)w^*(x) = o(x)$ при $x \to \infty$.

Пусть $v = v(\sigma)$ — решение уравнения

$$w^*(v) = 3\ln\mu(\sigma). \tag{11}$$

Ясно, что $v(\sigma) \uparrow \infty$ при $\sigma \uparrow 0$. Уравнение (11) можно представить в виде

$$w^*(v) = e^{u(\sigma)}, \tag{12}$$

где $u(\sigma) = \ln 3 + \ln\ln\mu(\sigma)$, $w^*(v) = \beta(v)w_1(v)$, $v = v(\sigma)$. Поскольку $w^* \in W_\varphi$, то

$$\lim_{v\to\infty} \varphi(v)J(v; w^*) = 0, \tag{13}$$

где $v = v(\tau) \to \infty$ при $\tau \to 0-$.

Из условия (5) с учетом (11) следует, что существует последовательность $\{\tau_j\}$, $\tau_j \to 0-$, для которой

$$w^*(v(\tau_j)) = 3\ln\mu(\tau_j) > \varepsilon_o\Phi\left(\frac{1}{|\tau_j|}\right), \quad \varepsilon_o > 0.$$

Но поскольку $w^*(x) = o(x)$ при $x \to \infty$, отсюда получаем, что

$$\frac{1}{|\tau_j|} < \varphi(\varepsilon_o^{-1}w^*(v_j)) < \varphi(v_j),$$

где $v_j = v(\tau_j)$, $j \geq j_0$.

Следовательно, из (13) и условий согласованности функций φ и w^* получаем, что

$$\lim_{\tau_j\to 0-} \frac{1}{|\tau_j|}J(v_j; w^*) = 0, \quad v_j = v(\tau_j),$$

$$\lim_{\sigma\to 0-} \frac{w^*(v(\sigma))}{|\sigma|v(\sigma)} = 0. \tag{14}$$

Из (14) видно, что $\sigma + \frac{w^*(v(\sigma))}{v(\sigma)} < 0$ при малых $|\sigma|$.

Далее нам понадобится следующая лемма типа Бореля — Неванлинны (см. [9, лемма 3.2]).

Лемма 2. *Пусть $u(t)$ — непрерывная неубывающая на $[-1, 0)$ функция, $u(t) \to \infty$ при $t \to 0-$. Пусть $w \in W$, а $v = v(t)$ — решение уравнения* (11). *Если*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{w(v(t))}{|t|v(t)} = 0,$$

а для некоторой последовательности $\{\tau_j\}$, $\tau_j \uparrow 0$,

$$\lim_{\tau_j\to 0-} \frac{1}{|\tau_j|}J(v_j; w) = 0, \quad v_j = v(\tau_j),$$

то при $t \to 0-$ вне некоторого множества $e \subset [-1, 0)$, для которого

$$m(e \cap [\tau_j, 0)) = o(|\tau_j|), \quad \tau_j \to 0-,$$

имеет место асимптотическое равенство

$$u\left(t+\frac{w(v(t))}{v(t)}\right)=u(t)+o(1).$$

Имея в виду равенства (11), (12), применим лемму 2 к функции $u(\sigma)=\ln 3+\ln\ln\mu(\sigma)$, полагая в ней $w=w^*$. Тогда при $\sigma\to 0-$ вне некоторого множества $e_1\subset[-1,0)$, для которого $m(e_1\cap[\tau_j,0))=o(|\tau_j|)$, $\tau_j\to 0-$, выполняется оценка

$$\mu(\sigma+3h^*)\le\mu(\sigma)^{1+o(1)},\quad h^*=\frac{w^*(v(\sigma))}{v(\sigma)}. \tag{15}$$

Следовательно, при $\sigma\to 0-$ вне e_1 имеем

$$R_v=\sum_{\lambda_j>v}|a_j|e^{\lambda_j\sigma}\le\mu(\sigma+h^*)\sum_{\lambda_j>v}e^{-h^*\lambda_j}\le C\mu(\sigma)^{1+o(1)}\exp\{\max_{t\ge v}(\ln t-h^*t)\},$$

где $C=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j}<\infty$, так как $w(x)=N(ex)$ принадлежит W.

Максимум функции $\psi(t)=\ln t-h^*t$ достигается в точке $t_\epsilon=\frac{1}{h^*}=\frac{v}{w^*(v)}<v$. Следовательно,

$$\max_{t\ge v}\psi(t)=\psi(v)=-w^*(v)\left[1-\frac{\ln v}{w^*(v)}\right].$$

Поскольку

$$\frac{\ln v}{w^*(v)}\le\frac{\ln v}{N(ev)}\le\frac{\ln v}{N(v)}\le\frac{\ln v}{\int\limits_{\sqrt{v}}^{v}\frac{n(x)}{x}dx}\le\frac{\ln v}{n(\sqrt{v})\ln\sqrt{v}}=\frac{2}{n(\sqrt{v})}=o(1),\ \ v\to\infty,$$

очевидно, $\psi(v)=-(1+o(1))w^*(v)=-(1+o(1))3\ln\mu(\sigma)$ при $v\to\infty$. Следовательно,

$$R_v\le\mu(\sigma)^{-2(1+o(1))}. \tag{16}$$

Значит, при $\sigma\in[\sigma',0)\backslash e_1$ имеем $\lambda_{\nu(\sigma)}\le v(\sigma)$, где $\nu=\nu(\sigma)$ — центральный индекс ряда (8).

Пусть

$$F_a(s)=\sum_{\lambda_n\le a}a_ne^{\lambda_ns},\quad s=\sigma+it.$$

Тогда для $\lambda_n\le a$ имеем (см. [6])

$$a_n=e^{-\alpha\lambda_n}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\varphi_n(t)F_a(t+\alpha)\,dt, \tag{17}$$

где α — произвольный параметр,

$$\varphi_n(t)=\frac{1}{Q_a'(\lambda_n)}\int\limits_0^{\infty}\frac{Q_a(\lambda)}{\lambda-\lambda_n}e^{-\lambda t}\,d\lambda,\quad Q_a(\lambda)=\prod_{\lambda_n\le a}\left(1-\frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right), \tag{18}$$

а C — любой замкнутый контур, охватывающий $\overline{D}$ — сопряженную диаграмму $Q_a(\lambda)$. Но $Q_a(\lambda)$ — полином, следовательно, $\overline{D}=\{0\}$.

Положим $a = v(\sigma)$, $\alpha = \sigma + i\tau$, где τ такое,что $\alpha \in \gamma$. В качестве C возьмем контур $\{t : |t| = h^{(1)}\}$, где $h^{(1)} = h^{(1)}(\sigma) = \frac{h^*(\sigma)}{\sqrt{\beta(v(\sigma))}}$. Из (6), (11) следует, что для $\lambda_n \leq v(\sigma)$ при $\sigma \to 0-$

$$\frac{1}{|Q'_v(\lambda_n)|} \leq \frac{1}{|Q'(\lambda_n)|} \leq e^{\widetilde{w}(\lambda_n)} \leq e^{\widetilde{w}(v)} = e^{o(w^*(v))} = \mu(\sigma)^{o(1)}.$$

Следовательно, из (17), (18) получаем, что для $\lambda_n \leq v(\sigma)$ при $\sigma \to 0-$ вне e_1

$$|a_n|e^{\lambda_n \sigma} \leq \mu(\sigma)^{o(1)} h^{(1)} \Big[\max_{|\xi-\alpha| \leq h^{(1)}} |F(\xi)| + \sum_{\lambda_j > v} |a_j| e^{\lambda_j(\sigma + h^{(1)})} \Big] \int_0^\infty \left| \frac{Q_v(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} \right| |e^{-\lambda t}||d\lambda|, \quad (19)$$

где $\alpha = \sigma + i\tau \in \gamma$.

Пусть $\lambda = re^{i\varphi}$ такое, что $|\lambda - \lambda_n| > 1$. Тогда

$$\left| \frac{Q_v(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} \right| \leq |Q_v(\lambda)|. \quad (20)$$

В противном случае по принципу максимума модуля имеем

$$\max_{|\lambda - \lambda_n| \leq 1} \left| \frac{Q_v(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} \right| = |Q_v(\lambda_o)|, \quad |\lambda_o - \lambda_n| = 1. \quad (21)$$

Поскольку $|\lambda_o - \lambda| \leq 2$, а $|e^{-\lambda t}| \leq e^{-rh^{(1)}}$ при $|t| = h^{(1)}$, то, учитывая, что $\lambda_{\nu(\sigma)} \leq v(\sigma)$, и применяя оценку типа (16) для остатка ряда в (19), а также (20), (21), из (19) при $\sigma \to 0-$ вне e_1 получаем

$$\mu(\sigma)^{1+o(1)} \leq h^{(1)} [\max_{|\xi-\alpha| \leq h^{(1)}} |F(\xi)| + \mu(\sigma)^{-2(1+o(1))}] \int_0^\infty M(r+2; Q_v) e^{-rh^{(1)}}\, dr. \quad (22)$$

Учитывая определения величин $v = v(\sigma)$, $h^{(1)} = h^{(1)}(\sigma)$, а также неравенства $n(x) \leq N(ex)$, $\ln(1 + x^2) < x$, $x > 0$, имеем

$$\ln M(R; Q_v) = n(v) \ln\left(1 + \frac{R^2}{v^2}\right) + 2R^2 \int_0^v \frac{n(t)}{t(t^2 + R^2)}\, dt$$
$$\leq \frac{n(v)}{v} R + 2N(v) = o(1) h^{(1)} R + o(1) \ln \mu(\sigma), \quad R = r + 2.$$

Следовательно, из (22) получаем, что при $\sigma \to 0-$ вне e_1

$$\mu(\sigma)^{1+o(1)} \leq \max_{|\xi-\alpha| \leq h^{(1)}} |F(\xi)| = |F(\xi^*)|, \quad (23)$$

где $|\xi^* - \alpha| = h^{(1)}$, $\alpha = \sigma + i\tau \in \gamma$.

Учитывая оценку (15), при $\sigma \to 0-$ вне e_1 имеем также

$$\mu(\sigma) \leq M_F(\sigma) \leq M_F(\sigma + 2h^*) \leq \sum_{n=1}^\infty |a_n| e^{\lambda_n(\sigma + 2h^*)}$$
$$\leq \mu(\sigma + 3h^*) \Big[n(v) + \sum_{\lambda_j > v(\sigma)} e^{-h^* \lambda_j} \Big] < \mu(\sigma)^{1+o(1)}. \quad (24)$$

Пусть $B = [-1,0)\backslash e_1$, $h = \frac{w_1(v(\sigma))}{v(\sigma)}$. Тогда имеется последовательность $\{\sigma_j\}$, $\sigma_j \in B$, $\sigma_j \uparrow 0$, $\sigma_j + h_j \le \sigma_{j+1}$, $j \ge 1$, такая, что [4]

$$B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} [\sigma_j - h_j, \sigma_j + h_j],$$

где $h_j = \frac{w_1(v_j)}{v_j}$, $v_j = v(\sigma_j)$, $j \ge 1$.

Положим $g(z) = F(z+\xi^*)$. Из (23) видно, что $|g(0)| \ge 1$ при $\sigma' < \sigma'' \le \sigma < 0$ вне e_1. Применим лемму 1 к функции $g(z)$, полагая в (23) $\sigma = \sigma_j$, $h^{(1)} = h_j^{(1)} = \frac{w_1(v_j)}{v_j}\sqrt{\beta(v_j)}$, а в оценках (9), (10) $N_0 = 4$, $r = r(j) = \frac{1}{\sqrt{\beta(v_j)}}$, $R = h_j^*$, где $h_j^* = \frac{w^*(v_j)}{v_j}$, $j \ge j_1$. Здесь номер j_1 выбирается из условия $r = r(j) < 1 - N_o^{-1} = \frac{3}{4}$ при $j \ge j_1$. Тогда в круге $\{z : |z| \le h_j^{(1)}\}$, но вне исключительных кружков V_{nj} с общей суммой радиусов

$$\sum_n \rho_n \le \frac{h_j}{\beta_j}, \quad \beta_j = \beta(v(\sigma_j)),\ j \ge j_1, \tag{25}$$

выполняется оценка (10). Поскольку круг $K_j = \{z : |z| \le h_j\}$ содержится в круге $\{z : |z| \le h_j^{(1)}\}$, то в круге K_j, но вне кружков V_{nj} с общей суммой радиусов, удовлетворяющей оценке из (25), при $j \to \infty$ получаем

$$\ln|g(z)| \ge \left[1 + o(1) - \frac{20L_o}{\ln|g(0)|}\right] \ln|g(0)|. \tag{26}$$

Учитывая (23), (24), а также то, что $|g(0)| \ge 1$, убеждаемся в том, что при $j \to \infty$ выполняется равенство

$$\frac{L_o}{\ln|g(0)|} = o(1),$$

где

$$L_o = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|g(Re^{i\theta})|d\theta - \ln|g(0)|,$$

$$g(0) = F(\xi^*), \quad |\operatorname{Re}\xi^* - \alpha_j| \le h^{(1)}, \quad \alpha_j = \sigma_j + it_j \in \gamma.$$

Следовательно, из (26) для всех z из множества $\{z : |z| \le h_j^{(1)}\}\backslash \bigcup_n V_{nj}$ при $j \to \infty$ имеем

$$\ln|g(z)| \ge (1 + o(1)) \ln|g(0)|. \tag{27}$$

Но тогда, учитывая, что $g(z) = F(z + \xi^*)$, и используя оценки (23)–(27), получаем, что в круге $\{z : |z - \alpha_j| \le h_j\}$, $\alpha_j = \sigma_j + it_j \in \gamma$, но вне исключительных кружков V_{nj} с общей суммой радиусов не больше $\frac{h_j}{\beta_j}$, $j \ge j_1$,

$$\ln|F(z)| > (1 + o(1)) \ln\mu(\sigma_j), \quad j \to \infty. \tag{28}$$

Пусть e_2 — проекция исключительных кружков всех кругов $\{z : |z - \alpha_j| \le h_j\}$ на B, где $B = [-1,0)\backslash e_1$, $B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} [\sigma_j - h_j, \sigma_j + h_j]$, $\sigma_j \in B$, $\sigma_j + h_j \le \sigma_{j+1}$, $j \ge 1$. Покажем, что $De_2 = 0$. Действительно, пусть $\sigma_j \le \sigma < \sigma_{j+1}$. Согласно

(14) $h_j \le h_j^{(1)} < h_j^* = o(\sigma_j)$, $j \to \infty$. Учитывая оценку $\sum\limits_{k \ge j+1} h_k \le |\sigma|$, получаем, что

$$\frac{m(e_2 \cap [\sigma, 0))}{|\sigma|} \le \frac{2h_j}{|\sigma_j + h_j|\beta_j} + \frac{2}{|\sigma|} \sum_{k \ge j+1} \frac{h_k}{\beta_k}$$
$$\le \frac{2h_j}{|\sigma_j|\beta_j(1+o(1))} + \frac{2}{\beta_{j+1}} = o(1), \quad j \to \infty.$$

Значит, $de_2 = 0$, а следовательно, если положить $e = e_1 \cup e_2$, то $de = 0$. Здесь учтено, что $De_2 = 0$.

Оценка (28) имеет место в каждом круге

$$K_j = \{z : |z - \alpha_j| \le h_j\}, \quad \alpha = \sigma_j + it_j \in \gamma,$$

но вне исключительных кружков V_{nj}, общая сумма радиусов которых удовлетворяет оценке (25).

Оценим меру проекции p_j дуги $\gamma_j = \gamma \cap K_j$ на отрезок $[a_j, b_j]$, где $a_j = \sigma_j - h_j$, $b_j = \sigma_j + h_j$. Обозначая $\beta = \eta + i\mu$ правый конец дуги γ (она принадлежит окружности K_j), имеем

$$h_j^2 = (\eta - \sigma_j)^2 + [g(\eta) - g(\sigma_j)]^2 \le (K^2+1)(\eta - \sigma_j)^2$$

(дуга γ ограниченного K-наклона определяется уравнением $y = g(x)$, $-1 \le x \le 0$). Как видно, мера проекции γ_j на отрезок $[\sigma_j, b_j]$ не меньше $\frac{h_i}{\sqrt{K^2+1}}$. То же самое верно и для проекции γ_j на $[a_j, \sigma_j]$. Так что линейная мера Лебега

$$mp_j = \eta - \mu \ge \frac{2}{\sqrt{K^2+1}} h_j.$$

Отсюда следует, что верхняя плотность DP множества $P = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} p_j$ не меньше $\frac{1}{\sqrt{K^2+1}}$.

Пусть $\{\tau_j\}$ — последовательность, введенная в рассмотрение выше, для нее

$$\frac{m(e \cap [\tau_j, 0))}{|\tau_j|} \to 0$$

при $\tau_j \to 0-$. Положим $A = P \setminus e$. На этом множестве выполняются асимптотические оценки (24), (28), откуда следует, что при $s = \gamma$, $\operatorname{Re} s = \sigma \to 0-$ по асимптотическому множеству A

$$\ln |F(s)| = (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma) = (1 + o(1)) \ln M_F(\sigma).$$

Осталось оценить меру DA. Имеем

$$DA = \overline{\lim_{\sigma \to 0-}} \frac{m(A \cap [\sigma, 0))}{|\sigma|} \ge \overline{\lim_{\tau_j \to 0-}} \frac{m(P \cap [\tau_j, 0))}{|\tau_j|} - \lim_{\tau_j \to 0-} \frac{m(e \cap [\tau_j, 0))}{|\tau_j|} \ge \frac{1}{\sqrt{K^2+1}},$$

что и требовалось.

Теорема 2 доказана полностью.

Благодарность. Авторы признательны рецензенту за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гайсин А. М.* Оценки роста и убывания целой функции бесконечного порядка на кривых // Мат. сб. 2003. Т. 194, № 8. С. 55–82.
2. *Гайсин А. М., Гайсин Р. А.* Неполные системы экспонент на дугах и неквазианалитические классы Карлемана. II // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27, № 1. С. 49–73.
3. *Гайсин Р. А.* Интерполяционные последовательности и неполные системы экспонент на кривых // Мат. сб. 2021. Т. 212, № 5. С. 58–79.
4. *Гайсин А. М.* Поведение логарифма модуля суммы ряда Дирихле, сходящегося в полуплоскости // Изв. РАН. Сер. мат. 1994. Т. 58, № 4. С. 173–185.
5. *Скаскив О. Б.* К теореме Вимана о минимуме модуля аналитических в единичном круге функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1989. Т. 53, № 4. С. 833–850.
6. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. М.: Наука, 1983.
7. *Красичков-Терновский И. Ф.* Одна геометрическая лемма, полезная в теории целых функций, и теоремы типа Левинсона // Мат. заметки. 1978. Т. 24, № 4. С. 531–546.
8. *Гайсин А. М.* Поведение суммы ряда Дирихле заданного роста // Мат. заметки. 1991. Т. 50, № 4. С. 47–56.
9. *Гайсин А.М., Белоус Т. И.* Максимальный член ряда Дирихле, сходящегося в полуплоскости: теорема об устойчивости // Уфимск. мат. журн. 2022. Т. 14, № 3. С. 23–34.

Поступила в редакцию 3 марта 2023 г.
После доработки 20 апреля 2023 г.
Принята к публикации 16 мая 2023 г.

Гайсин Ахтяр Магазович (ORCID 0000-0002-4579-9077),
Гайсин Рашит Ахтярович (ORCID 0000-0002-4356-2842)
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112, Уфа 450008
gaisinam@mail.ru, rashit.gajsin@mail.ru

Белоус Татьяна Ивановна
Уфимский университет науки и технологий,
ул. Заки Валиди, 32, Уфа 450076
belousti@yandex.ru