1974 г. сентябрь — октябрь *т. XXIX, вып. 5(179)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ПРОСТРАНСТВЕННО ОДНОРОДНЫЕ, НЕПРЕРЫВНЫЕ МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ НА АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ И ГАРМОНИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

А. Д. Бендиков

Пусть $\mathfrak{A}$ — локально компактная, связная абелева группа, счетная на бесконечности. Согласно структурной теореме (см. [3]) $\mathfrak{A}$ является проективным пределом групп $\mathfrak{A}_n$, которые изоморфны $R^p \times T^n$, где R^p — p-мерное евклидово пространство, а T^n — n-мерный тор.

Мы будем рассматривать непрерывный пространственно однородный марковский процесс $X = (x_t, \mathscr{M}_t, P^x)$ на $\mathfrak{A}$. Если γ_n естественный гомоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}_n$, то мы положим $X_n = \gamma_n(X)$ (см. [1], стр. 448). Процесс X_n является непрерывным, пространственно однородным марковским процессом на $\mathfrak{A}_n$. Чтобы не вводить новых обозначений, будем предполагать, что связная подгруппа $\mathfrak{A}_0$, порожденная траекториями процесса X, исходящими из точки $x = 0$, совпадает с $\mathfrak{A}$.

Мы изучаем свойства гармонических функций для X и связи, существующие между двумя теориями потенциала на группах: теорией гармонических групп (см. [4]) и пространствами Дирихле, инвариантными относительно сдвига (см. [5]).

В случае $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_n$ гармонические функции непрерывны и имеет место теорема Гарнака о предельном переходе. В общем случае последние два свойства имеют место лишь при выполнении некоторых условий, которые приведены в настоящей работе. Для формулировки результатов нам потребуются следующие обозначения: $\widehat{\mathfrak{A}}$ — дуальная группа, $f(t, \theta)$ — характеристическая функция закона распределения $x_t (x_0 = 0)$; $f(\theta)$ — квадратичная форма на $\widehat{\mathfrak{A}}$, входящая в представление

$$f(t, \theta) = \exp(-tf(\theta));$$

$f_n(\theta)$ — квадратичная форма, соответствующая процессу X_n, $k(x, \Gamma)$ — ядро Грина для процесса X, т. е.

$$k(x, \Gamma) = E_x \left(\int_0^\infty \chi_\Gamma(x_t)\, dt \right);$$

χ_Γ — индикатор борелевского подмножества $\Gamma \subset \mathfrak{A}$.

Введем еще условие

$$(R) \qquad \forall n > 0 \ \operatorname{rang} f_n = n + p.$$

Теорема 1. *При условии* (R) *следующие утверждения эквивалентны:*

а) *имеет место теорема Гарнака,* б) *мера* k *абсолютно непрерывна относительно меры Хаара и ее плотность непрерывна на множестве* $\mathfrak{A} \setminus \{0\}$.

Теорема 2. Пусть X — *симметричный процесс с независимыми координатами и* λ_n — *дисперсия его* n-*й координаты.*

1) *Если* λ_n *растет не медленнее, чем* n^q, $q > 1$, *то выполняется условие* б) *теоремы* 1.

2) *Если* λ_n *убывает не медленнее, чем* $\exp(-n^q)$, $q > 1$, *то мера* k *не абсолютно непрерывна.*

Перейдем к гармоническим группам и пространствам Дирихле.

Определение. Пусть $\mathscr{H}$ — пучок действительных функций на $\mathfrak{A}$. Пара $(\mathfrak{A}, \mathscr{H})$ называется слабо гармонической группой, если она удовлетворяет системе аксиом, которая получается из системы аксиом гармонической группы путем ослабления аксиомы сходимости: верхняя (нижняя) огибающая фильтрующегося семейства гармонических функций является гармонической функцией, *если она локально ограничена сверху (снизу).*

Теорема 3. *Каждая слабо гармоническая группа* $(\mathfrak{A}, \mathscr{H})$, *удовлетворяющая условиям:* 1) *функция* $f(x) \equiv 1$ *является супергармонической;* 2) *существует мера* k, *имеющая точечный гармонический носитель* $\{0\}$ (см. [2], стр. 450—451), *порождает регулярное инвариантное относительно сдвига пространство Дирихле* $\mathscr{D}$ *локального типа; при этом* k *есть ядро потенциалов для* $\mathscr{D}$.

Теорема 4. *Пусть* $\mathscr{D}$ *есть регулярное, инвариантное относительно сдвига пространство Дирихле локального типа и* k — *его ядро потенциалов. Если* k *имеет плотность* $k(x)$ *относительно меры Хаара (и только в этом случае), то* $\mathscr{D}$ *порождает гармоническую или слабо гармоническую группу* $(\mathfrak{A}, \mathscr{H})$ *со свойствами* 1)—2) *в зависимости от того, непрерывна или нет функция* $k(x)$ *на множестве* $\mathfrak{A} \setminus \{0\}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Б. Дынкин, Марковские процессы, М., Физматгиз, 1963.
[2] Н. С. Ландкоф, Основы современной теории потенциала, М., Физматгиз, 1966.
[3] А. Вейль, Интегрирование в топологических группах и его применение, М., ИЛ, 1950.
[4] J. Bliedtner, Harmonishe Gruppen und Huntsche Faltungskerner. Seminar über Potentialtheorie. Lecture Notes in Mathematics 69. Springer, 1968.
[5] J. Deny, Methodes Hilbertiennes en Theorie du Potential, Potential Theory, Summer Course, C.J.M.E., 1970.

Поступило в Правление общества 13 декабря 1973 г.