Ю. Г. Прохоров, Конструкции рациональности некоторых четырехмерных многообразий Фано индекса 2, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1993, номер 2, 35–40

Предложение 5. *Если* $n \not\equiv 2 \pmod 4$, *то*

$$m(V_{\lambda^*}, L_n(V)) = m(V_\lambda, L_n(V)).$$

Если $n \equiv 2 \pmod 4$, *то*

$$m(V_{\lambda^*}, L_n(V)) = m(V_\lambda, L_n(V)) + \frac{2}{n} \sum_{d|(n/2)} \mu(d) \chi^\lambda(\tau^{n/2d}).$$

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant 1$, тогда $\lambda^* = (2^{\lambda_2}, 1^{\lambda_1 - \lambda_2})$. Из (5) имеем

$$m(V_\lambda, L_n(V)) = l_{\lambda_1,\lambda_2} - l_{\lambda_1+1,\lambda_2-1}.$$

Используя предложение 5, получаем:

а) если $n \not\equiv 2 \pmod 4$, то

$$m(V_{\lambda^*}, L_n(V)) = l_{\lambda_1,\lambda_2} - l_{\lambda_1+1,\lambda_2-1};$$

б) если $n \equiv 2 \pmod 4$, то из формул (1) и (2) имеем:

$$m(V_{\lambda^*}, L_n(V)) = l_{\lambda_1,\lambda_2} - l_{\lambda_1+1,\lambda_2-1} + l_{\lambda_1/2,\lambda_2/2}$$

для $\lambda_1 \equiv \lambda_2 \equiv 0 \pmod 2$;

$$m(V_{\lambda^*}, L_n(V)) = l_{\lambda_1,\lambda_2} - l_{\lambda_1+1,\lambda_2-1} - l_{(\lambda_1+1)/2,(\lambda_2-1)/2}$$

для $\lambda_1 \equiv \lambda_2 \equiv 1 \pmod 2$.

В частности, неприводимые $GL(V)$-модули, отвечающие за тождество энгелевости степени n (разбиение $\lambda = (n-1, 1)$) или за стандартное тождество степени n (разбиение $\lambda = (2, 1^{n-2})$), входят в $GL(V)$-разложение модуля $L_n(V)$ с единичной кратностью.

Автор приносит благодарность Ю. А. Бахтурину за помощь и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. М., 1985.
2. Джеймс Г. Теория представлений симметрических групп. М., 1982.
3. Blessenohl O., Laue H. On Witt's dimension formula for free Lie algebras and a theorem of Klyachko//Bull. Austral. Math. Soc. 1989. **40**. 49—57.

Поступила в редакцию
28.04.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1993. № 2

УДК 512.7

Ю. Г. Прохоров

КОНСТРУКЦИИ РАЦИОНАЛЬНОСТИ НЕКОТОРЫХ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ ФАНО ИНДЕКСА 2

Введение. В настоящей работе обсуждается проблема рациональности четырехмерных многообразий Фано индекса 2. Мы будем рассматривать только четырехмерные многообразия Фано индекса 2 над полем $\mathbf{C}$ с группой Пикара, изоморфной $\mathbf{Z}$. Такие многообразия имеют единственный дискретный инвариант — род g, который может принимать целые значения $2 \leqslant g \leqslant 10$ [1, 2]. При $5 \leqslant g \leqslant 10$ линейная система $\left|-\frac{1}{2}K_V\right|$ задает вложение многообразия $V = V_{2g-2} \subsetneq \mathbf{P}^{g+2}$ степени

$2g-2$, и образ $V_{2g-2} \subset \mathbf{P}^{g+2}$ является пересечением квадрик. Основной результат работы составляет следующая

Теорема. *Для каждого целого g, $5 \leqslant g \leqslant 8$, существует четырехмерное рациональное многообразие Фано $V = V_{2g-2} \subset \mathbf{P}^{g+2}$ индекса 2 рода g с* $\operatorname{Pic} V = \mathbf{Z}$.

Теорема является следствием предложений 1—4. Все конструкции рациональности связаны с некоторой плоскостью. Как и в случае четырехмерной кубики, неизвестен ответ на вопрос о рациональности общих многообразий указанных типов [3].

1. Лемма 1. *Теорема Римана—Роха для обратимого пучка $\mathcal{O}_X(D)$ на четырехмерном многообразии X имеет вид*

$$\chi(\mathcal{O}_X(D)) = \frac{1}{24}[D^4 + 2D^3 \cdot c_1(X) + D^2 \cdot (c_1(X)^2 + c_2(X)) +$$

$$+ D \cdot c_1(X) \cdot c_2(X)] + \chi(\mathcal{O}_X).$$

Пусть $F \hookrightarrow X$ — вложение гладкой поверхности в гладкое четырехмерное многообразие X, $\rho: \tilde{X} \to X$ — раздутие F, E — исключительный дивизор и $H^* = \rho^* H$ — полный прообраз дивизора H на $\tilde{X}$.

Лемма 2 [4, утверждение 8.3.9]. *В кольце Чжоу $A(\tilde{X})$ имеют место следующие соотношения*:

$$H^{*4} = H^4, \ H^{*3} \cdot E = 0, \ H^{*2} \cdot E^2 = -F \cdot H^2,$$

$$H^* \cdot E^3 = H|_F \cdot c_1(F) - c_1(X) \cdot H \cdot F,$$

$$E^4 = c_2(X) \cdot F + c_1(X)|_F \cdot c_1(F) - c_2(F) - c_1(X)^2 \cdot F.$$

Лемма 3 [4, утверждение 15.4, 3]. *Для классов Чженя многообразия $\tilde{X}$*

$$c_1(\tilde{X}) = \rho^* c_1(X) - E, \ c_2(\tilde{X}) = \rho^* c_2(X) + \rho^* F - \rho^* c_1(X) \cdot E.$$

2. Случай $g = 5$. Всякое многообразие Фано $V = V_8 \subset \mathbf{P}^7$ представляется в виде пересечения трех квадрик:

$$V = Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3 \ [1].$$

Лемма 4. (i). *Существует многообразие Фано $V = V_8 \subset \mathbf{P}^7$, содержащее плоскость $P = \mathbf{P}^2$.*

(ii). *Общее многообразие Фано $V = V_8 \subset \mathbf{P}^7$, содержащее плоскость P, не содержит других плоскостей, пересекающих P по прямой.*

Доказательство. (i). Рассмотрим плоскость $P \subset \mathbf{P}^7$, заданную уравнениями $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. Тогда квадрики Q_1, Q_2, Q_3, проходящие через P, имеют вид

$$\begin{aligned} Q_1 &: x_0 l_{10} + x_1 l_{11} + x_2 l_{12} + x_3 l_{13} + x_4 l_{14} + q_1 = 0, \\ Q_2 &: x_0 l_{20} + x_1 l_{21} + x_2 l_{22} + x_3 l_{23} + x_4 l_{24} + q_2 = 0, \\ Q_3 &: x_0 l_{30} + x_1 l_{31} + x_2 l_{32} + x_3 l_{33} + x_4 l_{34} + q_3 = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $l_{ij} = l_{ij}(x_5, x_6, x_7)$ — линейные, а $q_i = q_i(x_0, \dots, x_4)$ — квадратичные формы. Докажем, что для общих l_{ij} и q_i многообразие будет гладким. По теореме Бертини для общих l_{ij} и q_i многообразие V не имеет особых точек вне P. В точках $x \in P$ матрица частных производных для уравнений (1) имеет вид $\| l_{ij}(x) \|$.

Нетрудно указать формы l_{ij}, такие, что $rk\,\|l_{ij}(x)\|=3$ в каждой точке $x\in P$. (Например, $l_{i,i-1}=x_5$, $l_{i,i}=x_6$, $l_{i,i+1}=x_7$ и $l_{ij}=0$ при $|i-j|>1$.) Следовательно, для общих l_{ij} и q_i многообразие V — неособое.

(ii). Простой счет параметров. ■

Предложение 1. *Пусть $V=V_8\subset\mathbf{P}^7$ — многообразие Фано, содержащее плоскость P, $\rho:\tilde{V}\to V$ — вздутие P, $H^*=\rho^*H$ — полный прообраз гиперплоского сечения V и E — исключительный дивизор. Тогда*:

(i) *линейная система $|H^*-E|$ определяет бирациональный морфизм $\varphi:\tilde{V}\to\mathbf{P}^4$, стягивающий неприводимый дивизор $D\sim 3H^*-4E$ на поверхность $F\subset\mathbf{P}^4$*;

(ii) *если, кроме того, для плоскости P и многообразия V выполняются условия* (ii) *леммы* 4, *то φ — раздутие гладкой поверхности $F\subset\mathbf{P}^4$. Поверхность F является поверхностью общего типа с инвариантами*:

$$K_F^2=2,\ q(F)=0,\ p_g(F)=3,\ c_2(F)=46,$$

$$K_F\cdot\mathcal{O}_F(1)=7,\ \deg F=9.$$

Доказательство. (i). Пусть $\psi: V\dashrightarrow\mathbf{P}^4$ — проекция из плоскости P, тогда раздутие ρ устраняет неопределенности рационального отображения ψ. Поэтому отображение $\varphi=\psi\circ\rho:\tilde{V}\to\mathbf{P}^4$ является морфизмом и задается линейной системой $|H^*-E|$. Поскольку $c_1(V)=2H$, $c_2(V)=4H^2$, то из леммы 2 получаем $H^{*4}=8$, $H^{*3}\cdot E=0$, $H^{*2}\cdot E^2=-1$, $H^*\cdot E^3=1$, $E^4=3$. Откуда $\deg\varphi=(H^*-E)^4=1$, т. е. морфизм φ бирационален. По теореме об обращении в нуль [5] и лемме 1 имеем $h^0(\mathcal{O}_{\tilde{V}}(3H^*-4E))=1$, т. е. в линейной системе $|3H^*-4E|$ существует единственный дивизор D. Так как $D\cdot(H^*-E)^3=0$, то D стягивается морфизмом φ.

(ii). Поскольку V не содержит плоскостей, пересекающих P по прямой, то $\varphi:\tilde{V}\to\mathbf{P}^4$ не имеет слоев размерности $\geqslant 2$. Из результатов работы [6] следует тогда, что φ является раздутием с гладким центром F. В силу леммы 1, примененной к φ, $\deg F=9$, $K_F\cdot\mathcal{O}_F(1)=7$, $c_2(F)=46$. По формуле для поверхностей в $\mathbf{P}^4$ [7, добавление A] $K_F^2=2$, $\chi(\mathcal{O}_F)=4$. ■

Замечание. Согласно [8] поверхность F изоморфна минимальному разрешению особенностей двулистного накрытия $\mathbf{P}^2$ с ветвлением в кривой $C\subset\mathbf{P}^2$ степени 8.

3. Случай $g=6$. Каждое многообразие Фано $V=V_{10}\subset\mathbf{P}^8$ может быть реализовано одним из двух способов: как гладкое сечение грассманиана $G=\mathrm{Gr}(2,5)\subset\mathbf{P}^9$ гиперплоскостью $\mathbf{P}^8\subset\mathbf{P}^9$ и квадрикой $Q\subset\mathbf{P}^9$ или как двулистное накрытие многообразия Фано индекса 3 степени 5 [1]. Мы построим пример рационального многообразия $V=V_{10}\subset\mathbf{P}^8$ первого типа. Хорошо известно, что грассманиан $G=\mathrm{Gr}(2,5)$ содержит два типа плоскостей — многообразия Шуберта σ_{22} и σ_{31} [9].

Лемма 5. *Существует многообразие Фано $V=V_{10}\subset\mathbf{P}^8$, $V=G\cap Q\cap\mathbf{P}^8$, содержащее σ_{31}-плоскость P и не содержащее других плоскостей, пересекающих P по прямой.*

Доказательство. Несложные вычисления с циклами Шуберта в грассманиане $\mathrm{Gr}(3,10)$ показывают, что для любой квадрики Q многообразие $Q\cap G$ содержит σ_{31}-плоскость P. Существование гиперплоскости $\mathbf{P}^8\subset\mathbf{P}^9$, такой, что $V=G\cap Q\cap\mathbf{P}^8$ — гладкое многообразие, содержащее P, следует теперь из работы [10, лемма 8.4]. Вторая часть леммы доказывается аналогично лемме 4.

Предложение 2. *Пусть $V=V_{10}\subset\mathbf{P}^8$ — многообразие Фано, такое, что для V выполняется лемма* 5, *$\rho:\tilde{V}\to V$ — раздутие P, $H^*=$*

$=\rho^*H$ — *полный прообраз гиперплоского сечения* V, E — *исключительный дивизор. Тогда линейная система* $|H^*-E|$ *определяет морфизм* $\varphi: \tilde{V} \to W \subset \mathbf{P}^5$ *на гладкую четырехмерную квадрику* $W = W_2 \subset \mathbf{P}^5$. *Морфизм* φ *является раздутием с центром в поверхности* $F \subset W$ *и с исключительным дивизором* $D \sim 2H^*-3E$. *Поверхность* F *изоморфна раздутию точки на гладкой* $K3$-*поверхности,* $\deg F = 9$, $K_F \cdot \mathcal{O}_F(1) = 1$.

Доказательство. По формулам Гаусса—Бонне [9] имеем

$$c_1(G) = 5\sigma_{10},\ c_2(G) = 11\sigma_{20} + 12\sigma_{11},$$

$$c_3(G) = 15\sigma_{30} + 30\sigma_{21},\ c_4(G) = 35\sigma_{31} + 25\sigma_{22}.$$

Откуда $c_2(V) = (3\sigma_{22} + 4\sigma_{11})|_V$, $c_4(V) = 28$, $b_4(V) = 24$.

Аналогично предложению 1 доказывается теперь, что $|H^*-E|$ задает бирациональный морфизм на квадрику $W_2 \subset \mathbf{P}^5$ и стягивает дивизор $D \sim 2H^*-3E$ на поверхность F. Морфизм φ не имеет слоев размерности $\geqslant 2$ и стягивает экстремальный луч. Из результатов [11] следует, что F и W — гладкие и φ — раздутие с центром F. Как и в предложении 1, получаем $\deg F = 9$, $K_F \cdot \mathcal{O}_F(1) = 1$, $c_2(F) = 25$. Из точной последовательности для нормального пучка F на W получаем $F^2 = c_2(N_{F/W}) = c_2(W) \cdot F - c_2(F) + 4K_F \cdot \mathcal{O}_F(1) + K_F^2$. Откуда $K_F^2 = F^2 - 42$. Квадрика W может быть реализована как $\mathrm{Gr}(2, 4)$, поэтому $F \sim \alpha\sigma_{20} + \beta\sigma_{11}$. Так как $\deg F = 9$, то $\alpha + \beta = 9$. Следовательно, $F^2 = \alpha^2 + (9-\alpha)^2 \geqslant 41$ и $K_F^2 \leqslant 1$. Но $K_F^2 = 12p_g - 13$. Возможны два случая: $p_g = 0$, $K_F^2 = -13$ и $p_g = 1$, $K_F^2 = -1$. Уравнение $-13 = K_F^2 = 2\alpha^2 - 18\alpha + 39$ не имеет целочисленных решений. Откуда $p_g = 1$, $K_F^2 = -1$, $\varkappa(F) \geqslant 0$. Так как $K_F \cdot \mathcal{O}_F(1) = 1$, то $\varkappa(F) \leqslant 0$. Далее используется классификация поверхностей с $\varkappa(F) = 0$. ■

4. Случай $g = 8$. Согласно [1] каждое многообразие Фано $V = V_{14} \subset \mathbf{P}^{10}$ изоморфно сечению грассманиана $\mathrm{Gr}(2, 6) \subset \mathbf{P}^{14}$ подпространством коразмерности 4. Аналогично лемме 5 доказывается

Лемма 6. *Существует многообразие Фано* $V = V_{14} \subset \mathbf{P}^{10}$, *содержащее* σ_{42}-*плоскость* P *и не содержащее плоскостей, пересекающих* P *по прямой.*

Предложение 3. *Пусть* $V = V_{14} \subset \mathbf{P}^{10}$ — *многообразие Фано, удовлетворяющее условиям леммы* 6, $\rho: \tilde{V} \to V$ — *раздутие плоскости* P, $H^* = \rho^*H$ — *полный прообраз гиперплоского сечения* V, E — *исключительный дивизор, тогда линейная система* $|H^*-E|$ *определяет морфизм* $\varphi: \tilde{V} \to W \subset \mathbf{P}^7$ *на гладкое многообразие Фано индекса* 3 *степени* 5 $W = W_5 \subset \mathbf{P}^7$. *Морфизм* φ *является раздутием гладкой поверхности* F *на* W *с исключительным дивизором* $D \sim H^*-2E$. *Поверхность* F *изоморфна раздутию* 6 *точек на* $\mathbf{P}^2$, $\deg F = 7$, $K_F \cdot \mathcal{O}_F(1) = 5$.

Доказательство аналогично доказательству предложений 1, 2. ■

Следствие. *Многообразие* $V_{14} \subset \mathbf{P}^{10}$, *удовлетворяющее условиям леммы* 6, *рационально.*

Доказательство следует из того, что $W_5 \subset \mathbf{P}^7$ рационально [10]. ■

5. Случай $g = 7$. Предложение 4. *Пусть* $F = F_5 \subset \mathbf{P}^5$ — *антиканонически вложенная поверхность дель Пеццо степени* 5. *Зафиксируем некоторое вложение* $\mathbf{P}^5 \subset \mathbf{P}^6$. *Тогда в* $\mathbf{P}^6$ *существуют квадрики* Q_1, Q_2, *такие, что*

(i) $W = W_4 = Q_1 \cap Q_2 \subset \mathbf{P}^6$ — *гладкое четырехмерное многообразие, содержащее* F;

(ii) *если* $\varphi: \tilde{W} \to W$ — *раздутие* F, $L^* = \varphi^*L$ — *полный прообраз гиперплоского сечения* W *и* D — *исключительный дивизор, то линейная система*

$|2L^*-D|$ *определяет бирациональный морфизм* $\rho: \widetilde{W} \to V = V_{12} \subset \mathbf{P}^9$ *на гладкое многообразие Фано рода* 7;

(iii) *морфизм* ρ *стягивает дивизор* $E \sim L^*-D$ *на плоскость* $P \subset V$ *и является раздутием* P *на* V.

Доказательство. Поверхность $F \subset \mathbf{P}^5$ является пересечением квадрик. Выберем пару квадрик Q_1', $Q_2' \subset \mathbf{P}^5$, проходящих через F.

Лемма 7. *Если* Q_1', $Q_2' \subset \mathbf{P}_5$ *выбраны достаточно общими, то многообразие* $U = Q_1' \cap Q_2'$ *имеет лишь изолированные особенности.*

Доказательство. Пусть $C = F \cap \mathbf{P}^4$ — общее гиперплоское сечение, тогда C — эллиптическая кривая степени 5. Она содержится в гладкой поверхности дель Пеццо R степени 4 — пересечении двух квадрик Q_1'', Q_2''. Поскольку F — проективно нормальная поверхность, то квадрики Q_1'', Q_2'' могут быть продолжены до квадрик Q_1', $Q_2' \subset \mathbf{P}^5$, содержащих F. Пусть $U = Q_1' \cap Q_2'$, тогда $R = U \cap \mathbf{P}^4$ — неособое. Поэтому U может иметь лишь изолированные особенности. ∎

Аналогично доказательству леммы 4 (i) можно показать, что Q_1', Q_2' продолжаются до квадрик Q_1, $Q_2 \subset \mathbf{P}^6$, причем $W = Q_1 \cap Q_2$ — неособое. Отсюда следует, что для общих квадрик Q_1, Q_2, содержащих F, многообразие $W = Q_1 \cap Q_2$ удовлетворяет условию (i). Поскольку поверхность F является пересечением квадрик, то линейная система $|2L^*-D|$ свободна. По теореме Кодаиры об обращении в нуль $H^i(\mathcal{O}_{\widetilde{W}}(2L^*-D)) = 0$ при $i > 0$. В силу лемм 1—3 $\dim|2L^*-D| = 9$. Далее, из леммы 2 получаем $L^{*4} = 4$, $L^{*3} \cdot D = 0$, $L^{*2} \cdot D^2 = -5$, $L^* \cdot D^3 = -10$, $D^4 = -12$. Откуда $\deg\rho \cdot \deg\rho(\widetilde{W}) = (2L^*-D)^4 = 12$, $\dim\rho(\widetilde{W}) = 4$. Пусть E — собственный прообраз гиперплоского сечения, проходящего через F, тогда $E \sim L^*-D$ и $(2L^*-D)^3 \cdot E = 0$, т. е. дивизор E стягивается морфизмом ρ. Сказанное выше позволяет утверждать, что линейная система $|n(2L^*-D)|$ при $n \gg 0$ задает стягивание экстремального луча $\rho': \widetilde{W} \to V$ бирационального типа. Из [11] и леммы 8 следует тогда, что ρ' является раздутием с центром в гладкой поверхности P на гладком многообразии V. Отсюда получаем: V — многообразие Фано индекса 2, группа $\operatorname{Pic} V$ порождается дивизором $H = \rho'_*(2L^*-D)$ и $H^4 = 12$. Поэтому $V = V_{12} \subset \mathbf{P}^9$ имеет род 7, $\rho = \rho'$ и $V = \rho(\widetilde{W})$.

Лемма 8. *Морфизм* ρ (*а следовательно,* и ρ') *не имеет слоев размерности* ≥ 2.

Доказательство. Двумерными слоями ρ могут быть только собственные прообразы плоскостей $S \subset \mathbf{P}^5 \subset \mathbf{P}^6$, пересекающих F по конике. Такие плоскости заметают 5 многообразий Сегре $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^2$ в $\mathbf{P}^5$. Каждая из квадрик Q_1, Q_2 высекает на многообразии Сегре дивизор $F + S_i$. При общем выборе Q_1, Q_2 имеем $S_1 \neq S_2$, т. е. $W = Q_1 \cap Q_2$ не содержит плоскостей, пересекающих F по конике. ∎

Автор выражает благодарность С. Л. Трегубу за полезные обсуждения.

Работа частично поддержана фондом «Про—математика» (Франция).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mukai S. Biregular classification of Fano threefolds and Fano manifolds of coindex 3//Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1989. **86**. 3000—3002.
2. Wilson P. M. H. Fano fourfolds of index greater than one//J. reine und agnew. Math. 1987. **389**. 172—181.
3. Трегуб С. Л. Три конструкции рациональности четырехмерной кубики//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1984. № 3. 8—14.

4. Фултон У. Теория пересечений. М., 1989.
5. Kawamata Y. A generalization of Kodaira-Ramanujam's vanishing theorem//Math. Ann. 1982. **261**. 43—46.
6. Данилов В. И. Декомпозиция некоторых бирациональных морфизмов//Изв. АН СССР. Матем. 1980. **44**, № 2. 465—477.
7. Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия. М., 1981.
8. Horikawa E. Algebraic surfaces of general type with small c^2_1, I//Ann. Math. 1976. **104**. 357—387.
9. Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. М., 1982.
10. Fujita T. On the structure of polarized manifolds with total deficiency one, II// //J. Math. Soc. Japan. 1981. **33**. 415—434.
11. Ando J. On extremal rays of higher dimensional varieties//Inv. Math. 1985. **81**. 347—357.

Поступила в редакцию
15.05.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1993. № 2

УДК 517.52.75

С. А. Степанянц

ТЕОРЕМЫ ТАУБЕРОВА ТИПА ДЛЯ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ ЧЕЗАРО

Изучение тауберовых условий, появившихся в конце прошлого века в работах Таубера (см., например, [1]), занимает важное место в теории рядов. В данной работе будет рассмотрено некоторое обобщение тауберовых условий, а именно $T_Q(P)$-условие (где Q и P — некоторые методы суммирования рядов).

Пусть для последовательностей действительных чисел введено некоторое условие R. Будем говорить, что условие является $T_Q(P)$-условием, если любой ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$, суммируемый методом P и такой, что $\{a_n\}$ удовлетворяет условию R, будет суммируем и методом Q (здесь и в дальнейшем рассматриваются последовательности действительных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и соответствующие им ряды $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$).

Если Q — обычная сходимость, то $T_Q(P)$-условие есть просто тауберово условие для метода P. В качестве Q и P будем рассматривать методы суммирования Чезаро (C, α) с различными α; $\alpha \geqslant 0$. Определение и простейшие свойства методов Чезаро можно найти в [2, § 5.4, 5.5, 5.7] и [3, § 15].

Так как мы в основном ограничиваемся методами суммирования Чезаро целого порядка, то везде далее, если не оговорено противное, k — целое число, $k \geqslant 0$; α — действительное число, $\alpha \geqslant 0$.

Обозначения $a_n = O(c_n)$ и $a_n = o(c_n)$, где $\{c_n\}$ — последовательность неотрицательных чисел, будем понимать в обычном смысле, т. е. $a_n = O(c_n)$ тогда и только тогда, когда существует действительное положительное число M, такое, что $|a_n| \leqslant M c_n$ для всех n; $a_n = o(c_n)$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует N, такое, что для любого $n > N$ верно неравенство $|a_n| \leqslant \varepsilon c_n$.

Далее будем неоднократно пользоваться следующим определением.

Последовательность натуральных чисел $\{n_r\}_{r=1}^{\infty}$ называется лакунарной по Адамару, если существует действительное число λ, такое, что $\lambda > 1$ и $n_{r+1}/n_r \geqslant \lambda$ для $r = 1, 2, 3 \ldots$.