O. V. Besov, Extension of functions with preservation of differential-difference properties in L_p, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1963, Volume 150, Number 5, 963–966

Доклады Академии наук СССР
1963. Том 150, № 5

МАТЕМАТИКА

О. В. БЕСОВ

ПРОДОЛЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ С СОХРАНЕНИЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ СВОЙСТВ В L_p

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 12 I 1963)

Пусть $[a, b] \subset (a_1, b_1)$, $f(x) \in L_p(a, b)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\omega_k(f, h)$ — модуль гладкости функции $f(x)$ с шагом h в метрике L_p. В настоящей заметке устанавливается возможность продолжения функции $f(x)$ на отрезок $[a_1, b_1]$ функцией $\varphi(x)$, для которой $\omega_k(\varphi, h) \leqslant C\omega_k(f, h)$, причем C не зависит от функции f. Этот результат справедлив и для функций многих переменных, а также в случае, когда вместо модулей гладкости функций берутся модули гладкости их производных.

Для $k = 1$ этот результат был получен В. К. Дзядыком ([1]). Для $k = 2$ были известны лишь отдельные частные случаи. Вопрос был решен для функций, удовлетворяющих условию $\omega_2(f, h) \leqslant Mh^r$, с сохранением этого свойства (при $p = \infty$, $r = 1$ А. Ф. Тиманом и В. К. Дзядыком ([2]); при $p = 1$, $r = 1$ В. К. Дзядыком ([1]); при $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $0 < r < 2$ О. В. Бесовым ([3])), а также для функций, удовлетворяющих условию

$$\int_0^\varepsilon h^{-1-r\theta}\omega_2^\theta(f, h)\, dh < \infty$$

(при $1 \leqslant p = \theta < \infty$ В. П. Ильиным и В. А. Солонниковым ([4]); при $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant \theta < \infty$ независимо О. В. Бесовым ([3])). В заметке К. К. Головкина и В. А. Солонникова ([7]) приведена теорема о продолжении функций с сохранением более общих условий, связанных с понятием функционального типа максимизации. Для произвольных модулей гладкости второго порядка при $p = \infty$ оценка $\omega_2(\varphi, h) \leqslant 5\omega_2(f, h)$ была получена В. К. Дзядыком ([8]) и Т. Фреем ([9]).

Метод рассмотрения уточняет способ, предложенный в ([3]), он близок к методу В. П. Ильина ([4]) интегрального представления функций.

Теорема 1. *Пусть $f(x) \in L_q(0, a)$ имеет обобщенную (в смысле Соболева) производную $f^{(k)}(x)$,*

$$\omega_m(f^{(k)}, h)_{L_p(0, a)} = \sup_{0<t\leqslant h} \left\| \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^{m-\nu} \binom{m}{\nu} f^{(k)}(x + \nu t) \right\|_{L_p(0, a-mt)},$$

$$1 \leqslant q \leqslant \infty, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty, \quad 0 < a \leqslant \infty.$$

Тогда существует функция $\varphi(x) \in L_q(-a, a)$, совпадающая с функцией $f(x)$ на $[0, a]$ и такая, что

$$\|\varphi\|_{L_q(-a, a)} \leqslant C\|f\|_{L_q(0, a)}, \tag{1}$$

$$\omega_m(\varphi^{(k)}, h)_{L_p(-a, a)} \leqslant C\omega_m(f^{(k)}, h)_{L_p(0, a)}, \tag{2}$$

где постоянная C не зависит от функции f.

Для доказательства рассмотрим функцию $F(x, y)$, являющуюся m-й средней Стеклова для функции $f(x)$:

$$F(x, y) = y^{-m} \int_0^y \ldots \int_0^y f(x + t_1 + \ldots + t_m)\, dt_1 \ldots dt_m. \tag{3}$$

Заметим, что

$$F_x^{(m+k)}(x, y) = y^{-m}\Delta^m [f^{(k)}(x), y], \tag{4}$$

$$\Delta_x^m [\Phi_x^{(k)}(x, y), h] = \int_0^h \ldots \int_0^h \Phi^{(m+k)}(x + t_1 + \ldots + t_m, y)\, dt_1 \ldots dt_m, \tag{5}$$

$$\Delta_y^m [F_x^{(k)}(x, 0), y] = \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^{m-\nu}\binom{m}{\nu} F_x^{(k)}(x, \nu y) =$$

$$= (-1)^m F_x^{(k)}(x, 0) +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{m} (-1)^{m-\nu}\binom{m}{\nu}(\nu y)^{-m}\int_0^{\nu y}\ldots\int_0^{\nu y} f^{(k)}(x + t_1 + \ldots + t_m)\, dt_1 \ldots dt_m =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^{m-\nu}\binom{m}{\nu} y^{-m}\int_0^{y}\ldots\int_0^{y} f^{(k)}(x + \nu(\xi_1 + \ldots + \xi_m))\, d\xi_1 \ldots d\xi_m,$$

откуда

$$\Delta_y^m [F_x^{(k)}(x, 0), y] = y^{-m}\int_0^{y}\ldots\int_0^{y} \Delta^m [f^{(k)}(x), \xi_1 + \ldots + \xi_m]\, d\xi_1 \ldots d\xi_m. \tag{6}$$

Из равенства

$$\Delta_y^m \Delta_x^m \Phi_x^{(k)}(x, 0) = \Delta_x^m \Delta_y^m \Phi_x^{(k)}(x, 0)$$

получаем, что

$$\Delta_x^m [\Phi_x^{(k)}(x, 0), y] = \sum_{\nu=1}^{m} \alpha_\nu \Delta_x^m [\Phi_x^{(k)}(x, \nu y), y] + \sum_{\nu=0}^{m} \beta_\nu \Delta_y^m [\Phi_x^{(k)}(x + \nu y, 0), y]. \tag{7}$$

Функция $F(x, y)$, построенная по формуле (3), определена для $0 \leqslant x \leqslant a - my$. Рассмотрим продолжение функции $F(x, y)$ через ось y по способу Уитнея и Хестенса

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} F(x, y), & 0 \leqslant x \leqslant a - my, \\ \sum\limits_{\nu=1}^{m+k} \lambda_\nu F\left(-\dfrac{x}{\nu}, y\right), & 0 \leqslant -x \leqslant a - my, \end{cases}$$

где $\sum\limits_{\nu=1}^{m+k} \left(-\dfrac{1}{\nu}\right)^s \lambda_\nu = 1$ для $s = 0, 1, \ldots, m + k - 1$.

Покажем, что функция $\varphi(x) = \Phi(x, 0)$, $|x| \leqslant a$, является искомым продолжением функции $f(x)$. В силу формул (7), (5), (6) для $0 < my < 2\delta = \dfrac{a}{m + 1/2}$ имеем

$$\|\Delta^m [\varphi^{(k)}(x), y]\|_{L_p(-\delta,\, \delta-my)} = \|\Delta_x^m [\Phi_x^{(k)}(x, 0), y]\|_{L_p(-\delta,\, \delta-my)} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \sum_{\nu=1}^{m} \left\| \int_0^y \ldots \int_0^y \Phi_x^{(m+k)}(x + t_1 + \ldots + t_m, \nu y)\, dt_1 \ldots dt_m \right\|_{L_p(-\delta,\, \delta-my)} +$$

$$+ c_2 \|\Delta_y^m [F_x^{(k)}(x, 0), y]\|_{L_p(0,\, \delta)} \leqslant c_3 \sum_{\nu=1}^{m} y^m \|\Phi_x^{(m+k)}(x, \nu y)\|_{L_p(-\delta,\, \delta)} +$$

$$+ c_4 \left\| y^{-m}\int_0^y \ldots \int_0^y \Delta^m [f^{(k)}(x), \xi_1 + \ldots + \xi_m]\, d\xi_1 \ldots d\xi_m \right\|_{L_p(0,\, \delta)} \leqslant$$

$$\leqslant c_5 \sum_{\nu=1}^{m} y^m \| F_x^{(m+k)}(x, \nu y) \|_{L_p(0,\delta)} + c_4 y^{-1} \left\| \int_0^{my} |\Delta^m [f^{(k)}(x), \xi]| \, d\xi \right\|_{L_p(0,\delta)} \leqslant$$

$$\leqslant c_5 \sum_{\nu=1}^{m} \nu^{-m} \| \Delta^m [f^{(k)}(x), \nu y] \|_{L_p(0,\delta)} + c_6 y^{-1} \int_0^{my} \| \Delta^m [f^{(k)}(x), \xi] \|_{L_p(0,\delta)} \, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant c_7 \omega_m (f^{(k)}, y)_{L_p(0, a)}.$$

Этим теорема доказана.

Следствие. *Пусть* $\varepsilon > 0$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f(x) \in L_p(a, b)$ *имеет обобщенную производную* $f^{(k)}(x)$. *Тогда существует финитная функция* $\varphi(x) \in L_p(-\infty, \infty)$, *совпадающая с функцией* $f(x)$ *на* $[a, b]$, *равная нулю вне отрезка* $[a-\varepsilon, b+\varepsilon]$ *и такая, что*

$$\| \varphi \|_{L_p(-\infty,\infty)} + h^{-m} \omega_m (\varphi^{(k)}, h)_{L_p(-\infty,\infty)} \leqslant$$
$$\leqslant C \{ \| f \|_{L_p(a,b)} + h^{-m} \omega_m (f^{(k)}, h)_{L_p(a,b)} \}, \tag{8}$$

где C *не зависит от функции* f.

Распространим функцию $f(x)$ на отрезок $[a-\varepsilon, b+\varepsilon]$ по теореме 1 и обозначим ее тем же символом. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x)\,\eta(x)$, где $\eta(x)$ бесконечно дифференцируема и $\eta(x) = 1$ для $a - \varepsilon/3 \leqslant x \leqslant b + \varepsilon/3$, $\eta(x) = 0$ вне отрезка $[a - 2\varepsilon/3, b + 2\varepsilon/3]$. Оценка первого слагаемого левой части формулы (8) очевидна.

В дальнейшем под нормой в L_p будем понимать норму в смысле $L_p(\alpha, \beta)$, где $[\alpha, \beta] \subset (a-\varepsilon, b+\varepsilon)$. В ходе получения неравенств в случае необходимости мы будем переходить к бóльшим отрезкам из $(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$, не оговаривая этого каждый раз. Это допустимо, так как оценку (8) достаточно доказать для всех $h \subset (0, h_0]$, где h_0 произвольно мало:

$$\| \Delta^m [\varphi^{(k)}, h] \|_{L_p} \leqslant c_1 \left\| \Delta^m \left[\sum_{s=0}^{k} \eta^{(k-s)} f^{(s)}, h \right] \right\|_{L_p} \leqslant$$
$$\leqslant c_2 \sum_{\nu=0}^{m} \sum_{s=0}^{k} h^{\nu} \| \Delta^{m-\nu} [f^{(s)}, h] \|_{L_p}. \tag{9}$$

Заметим, что

$$h^{-\nu} \omega_\nu (\psi, h)_{L_p} \leqslant C \{ \| \psi \|_{L_p} + h^{-m} \omega_m (\psi, h)_{L_p} \}, \qquad 1 \leqslant \nu \leqslant m.$$

Доказательство этого факта для $p = \infty$ имеется в ([5]), стр. 118, для $1 \leqslant p < \infty$ оно проводится аналогично.

Воспользуемся еще соотношением $\| \Delta [\psi, h] \|_{L_p} \leqslant h \| \psi' \|_{L_p}$. Из неравенства (9) будем иметь

$$h^{-m} \omega_m (\varphi^{(k)}, h)_{L_p(-\infty,\infty)} \leqslant c_3 \sum_{s=0}^{k} \{ \| f^{(s)} \|_{L_p} + h^{-m-k+s} \omega_{m+k-s} (f^{(s)}, h)_{L_p} \} \leqslant$$
$$\leqslant c_4 \left\{ \sum_{s=0}^{k} \| f^{(s)} \|_{L_p} + h^{-m} \omega_m (f^{(k)}, h)_{L_p} \right\}.$$

Для доказательства неравенства (8) осталось показать, что

$$\| f^{(s)} \|_{L_p} \leqslant c \{ \| f \|_{L_p} + h^{-m} \omega_m (f^{(k)}, h)_{L_p} \}, \qquad s = 1, 2, \ldots, k. \tag{10}$$

Воспользуемся идеей С. М. Никольского (([6]), стр. 269). Запишем разложение функции $f(x)$ по формуле Тейлора

$$f(x + \nu h) = \sum_{s=0}^{k-1} \frac{f^{(s)}(x)}{s!} (\nu h)^s + \frac{1}{(k-1)!} \int_0^{\nu h} (\nu h - \xi)^{k-1} f^{(k)}(x + \xi) \, d\xi =$$
$$= \sum_{s=0}^{k-1} \frac{f^{(s)}(x)}{s!} (\nu h)^s + \frac{\nu^k}{(k-1)!} \int_0^{h} (h - \xi)^{k-1} f^{(k)}(x + \nu \xi) \, d\xi.$$

Отсюда

$$\sum_{s=1}^{k} \frac{f^{(s)}(x)}{s!}(\nu h)^s = f(x+\nu h) - f(x) - \frac{\nu^k}{(k-1)!}\int_0^h (h-\xi)^{k-1}[f^{(k)}(x+\nu\xi) - f^{(k)}(x)]\,d\xi.$$

Домножая на $(-1)^{m-\nu}\binom{m}{\nu}\nu^{-k}$ и суммируя по ν, будем иметь

$$\sum_{s=1}^{k} h^s \sum_{\nu=1}^{m} (-1)^{m-\nu}\binom{m}{\nu}\nu^{s-k}\frac{f^{(s)}(x)}{s!} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{m} [f(x+\nu h) - f(x)](-1)^{m-\nu}\binom{m}{\nu}\nu^{-k} -$$

$$- \frac{1}{(k-1)!}\int_0^h (h-\xi)^{k-1}\Delta^m[f^{(k)}(x), \xi]\,d\xi. \qquad (11)$$

Выбирая в (11) последовательно $h = h_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, где h_i — достаточно малые положительные различные числа, получим систему алгебраических уравнений с определителем Вандермонда, из которой можно получить выражение $f^{(k)}(x)$ через правые части. Отсюда и

$$\|f^{(k)}\|_{L_p} \leqslant c_1\left\{\|f\|_{L_p} + \int_0^{h_0} \|\Delta^m[f^{(k)}(x), \xi]\|_{L_p} d\xi\right\} \leqslant$$

$$\leqslant c_2\{\|f\|_{L_p} + h_0^{-m}\omega_m(f^{(k)}, h_0)_{L_p}\} \leqslant 2^m c_2\{\|f\|_{L_p} + h^{-m}\omega_m(f^{(k)}, h)_{L_p}\},$$

где $0 < h \leqslant h_0$, h_0 достаточно мало (см. [5], стр. 116). Тем же приемом еще легче показать, что $\|f^{(s)}\|_{L_p} \leqslant c_3\{\|f\|_{L_p} + \|f^{(k)}\|_{L_p}\}$, $s = 1, 2, \ldots, k-1$.

Отсюда и из предыдущего неравенства получаем (10), а вместе с тем и доказательство следствия. Заметим еще, что в оценке для $h^{-m}\omega_m(\varphi^{(k)}, h)_{L_p(-\infty, \infty)}$ существенно и первое слагаемое правой части неравенства (8), что легко проверить на $f(x) = \text{const}$. Аналогично доказывается

Т е о р е м а 2. *Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ задана на параллелепипеде $\Delta \equiv \{a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ и имеет там обобщенную (по С. Л. Соболеву) производную $\partial^k f/\partial x_1^k$ с частным модулем гладкости в направлении оси x_1 $\omega_m(\partial^k f/\partial x_1^k, he_1)_{L_p(\Delta)}$. Тогда ее можно продолжить по способу Уитнея и Хестенса на больший параллелепипед $\Delta_1 \equiv \{a_1' \leqslant x_1 \leqslant b_1',\ a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 2, \ldots, n\}$ функцией $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, причем так, что*

$$\omega_m\left(\frac{\partial^k\varphi}{\partial x_1^k}, he_1\right)_{L_p(\Delta_1)} \leqslant c\,\omega_m\left(\frac{\partial^k f}{\partial x_1^k}, he_1\right)_{L_p(\Delta)}.$$

Для теоремы 2 справедливо также следствие, аналогичное следствию из теоремы 1. *Следствие из теоремы 1 допускает обобщение на случай n-мерной области, граница которой локально удовлетворяет условию Липшица.*

Поступило
2 I 1963

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. К. Дзядык, Матем. сборн., 40 (82), 239 (1956). [2] А. Ф. Тиман, В. К. Дзядык, ДАН, 75, № 4, 499 (1950). [3] О. В. Бесов, Матем. сборн., 58 (100), № 1, 87. (1962). [4] В. П. Ильин, В. А. Солонников, ДАН, 136, № 3, 538 (1961). [5] А. Ф. Тиман, Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960. [6] С. М. Никольский, Матем. сборн., 33 (75), 2, 261 (1953). [7] К. К. Головкин, В. А. Солонников, ДАН, 143, № 4, 767 (1962). [8] В. К. Дзядык, ДАН, 121, № 3, 403 (1958). [9] T. Frey, Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl., III, 8/1, 89 (1958).