Yu. D. Kaplunov, E. V. Nol'de, The Lamb problem for the case of a generalized plane stress state, *Dokl. Akad. Nauk*, 1992, Volume 322, Number 6, 1043–1047

Доклады Академии наук
1992. Том 322, № 6

УДК 539.3 МЕХАНИКА

© Ю.Д. КАПЛУНОВ, Е.В. НОЛЬДЕ

ЗАДАЧА ЛЭМБА ДЛЯ СЛУЧАЯ ОБОБЩЕННОГО ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

(Представлено академиком И.И. Воровичем 21 XI 1991)

Задаче Лэмба для случая плоского деформированного состояния (задаче о действии равномерно распределенной вдоль прямой мгновенной нагрузки на упругое полупространство) посвящено большое число работ. Соответствующую библиографию можно, например, найти в [1]. Для исследования нестационарной динамики тонкостенных конструкций существенный интерес представляет задача Лэмба для случая обобщенного плоского напряженного состояния (задача о действии мгновенной сосредоточенной силы на край полубесконечной пластины). Хотя классические уравнения обобщенного плоского напряженного состояния с точностью до значения упругих констант и совпадают с уравнениями плоского деформированного состояния, непосредственно перенести имеющиеся результаты на задачу о пластине не удается. Это связано с тем, что классическая двумерная теория обобщенного плоского напряженного состояния является приближенной и не позволяет описать некоторые важные особенности динамического поведения пластины. Так, эта теория искажает скорость волны расширения по сравнению с трехмерной теорией упругости. Имеющийся в ней фронт волны расширения на самом деле является квазифронтом: трехмерное решение не терпит на нем разрыва, а лишь испытывает подскок в его окрестности.

Цель настоящей работы – получить асимптотическое описание решения в окрестности квазифронта для случая действия мгновенной сосредоточенной силы на полубесконечную пластину (см. рис. 1). Считается, что сила направлена по нормали к краю пластины и равномерно распредена вдоль ее толщины. Ниже выясняется, что для достижения сформулированной цели нет необходимости использовать уравнения трехмерной теории упругости, а достаточно уточнить классические уравнения обобщенного плоского напряженного состояния в соответствии с [2]. Отметим, что ранее квазифронт изучался лишь в одномерных задачах для стержней и оболочек вращения [3–6 и др.].

Основные уравнения задачи возьмем в следующем виде:
уравнения движения ($\mathbf{v} = u(x, y, t)\mathbf{i} + v(x, y, t)\mathbf{j}$)

$$(1)\qquad Eh\left(\frac{1}{1+\nu}\Delta\mathbf{v} + \frac{1}{1-\nu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v}\right) - 2\rho h\left[\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial t^2} - \frac{\nu^2}{3(1-\nu)^2}h^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v}\right] = 0;$$

граничные условия

$$(2)\qquad T_{yy}(x, 0, t) = -P\delta(x)\delta(t), \qquad T_{xy}(x, 0, t) = 0;$$

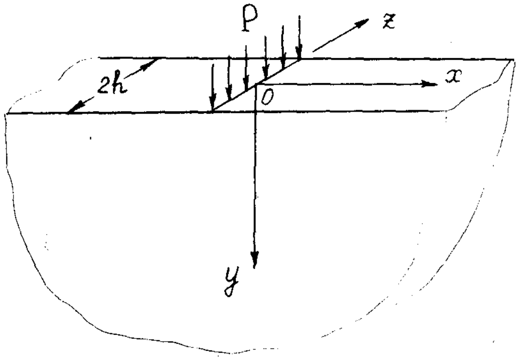

Рис. 1

формулы "напряжения–перемещения"

$$(3)\qquad T_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu\frac{\partial u}{\partial x}\right), \qquad T_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right);$$

здесь x, y – декартовы координаты на срединной плоскости пластины $z = 0$; $t \geqslant 0$ – время; $2h$ – толщина пластины; E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона; ρ – плотность материала пластины; $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ – перемещения срединной плоскости в направлении осей Ox и Oy соответственно; $T_{yy}(x, y, t)$, $T_{xy}(x, y, t)$ – напряжения в срединной плоскости; P – амплитуда силы; δ – дельта-функция; Δ и grad div – двумерные операторы на срединной плоскости $z = 0$. Начальные условия будем полагать нулевыми.

В качестве характерного линейного размера естественно выбрать величину c_3t, где $c_3 = [E/\rho(1-\nu^2)]^{1/2}$. Как будет видно из дальнейших рассуждений, c_3 – скорость квазифронта. Далее рассматриваются только такие значения времени, для которых расстояние, проходимое квазифронтом, значительно превосходит толщину пластины, а, следовательно, параметр $\eta = h/c_3t$ (относительная полутолщина пластины) является малым.

При выводе векторного уравнения (1) из трехмерных уравнений теории упругости в [2] были отброшены члены порядка $O(k^4\eta^4)$ по сравнению с единицей, где k – обезразмеренное умножением на характерный линейный размер волновое число. Уравнение (1) отличается от классического уравнения обобщенного плоского напряженного состояния наличием слагаемого с множителем h^2 в квадратных скобках. Асимптотический порядок этого "неклассического" слагаемого равен $O(k^2\eta^2)$ (при $\nu \sim O(1)$). Из результатов работ [2, 7, 8] непосредственно вытекает, что в рассматриваемом случае уравнения (1)–(3) можно использовать для описания колебаний с волновыми числами $k \ll \eta^{-4/5}$. Там также показано, что классическая теория обобщенного плоского напряженного состояния применима лишь при $k \ll \eta^{-2/3}$. Заметим, что обычно принято считать, что классическая теория справедлива при $k \ll \eta^{-1}$. Далее выясняется, что на квазифронте асимптотически главный вклад в решения вносят колебания с волновыми числами $k \lesssim \eta^{-2/3}$.

Для иллюстрации сказанного приведем один простой пример. Рассмотрим плоскую монохроматическую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси Oy ($\partial/\partial x = u = 0$, $v = \exp[i(ky_1 - \omega t)]$, где $y_1 = y/c_3t$). Имеем

$$(4)\qquad \omega t = k\left[1 - \frac{\nu^2}{6(1-\nu)^2}\eta^2k^2 + O(k^4\eta^4)\right].$$

Естественно потребовать, чтобы абсолютная погрешность определения показателя экспоненты была исчезающе малой при $\eta \to 0$. Отсюда следует, что пренебрегать O-членом в (4) можно при $k \ll \eta^{-4/5}$. Пренебрежение же вторым членом в квадратных скобках в (4) (т.е. переход к классической теории) возможен при $k \ll \eta^{-2/3}$.

Перейдем к построению решения задачи (1)–(3). Введем обычным образом скалярный и векторный потенциалы:

$$(5)\qquad u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Подставив (5) в уравнение (1), последнее можно преобразовать (в рамках той же погрешности $O(k^4\eta^4)$) к виду

$$(6)\qquad \Delta\varphi - \frac{1}{c_3^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\varphi - \frac{\nu^2}{3(1-\nu)^2}\frac{h^2}{c_3^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi\right] = 0,$$

$$\Delta\psi - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = 0;$$

здесь $c_2 = [E/2(1+\nu)\rho]^{1/2}$ – скорость волны сдвига.

Первое уранение (6), в отличие от классического уравнения для скалярного потенциала φ, не является гиперболическим, и линия $(x^2+y^2)^{1/2} = c_3 t$ не является фронтом. Поэтому есть все основания надеяться, что удержание в первом уравнении (6) асимптотически второстепенного члена позволит сгладить разрыв, даваемый классической теорией обобщенного плоского напряженного состояния.

Применим к решению задачи (2), (3), (5), (6) метод контурных интегралов [1, 9]. Выполняя преобразование Фурье по координате x_1 $(x_1 = x/c_3 t)$ и преобразование Лапласа по времени, после серии выкладок получим

$$(7)\qquad \varphi = -\frac{2(1+\nu)c_3 P}{\pi E}\int_0^\infty J_\varphi(y,t,\alpha)\frac{\cos\alpha x_1}{\alpha}\,d\alpha,$$

$$\psi = \frac{2(1+\nu)c_3 P}{\pi E}\int_0^\infty J_\psi(y,t,\alpha)\frac{\sin\alpha x_1}{\alpha}\,d\alpha;$$

$$(8)\qquad J_\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Phi(\xi)\exp\left[-\alpha y_1\sqrt{1+\xi^2 - \frac{\nu^2}{3(1-\nu)^2}\eta^2\alpha^2\xi^4} + \alpha\xi\right]d\xi,$$

$$J_\psi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Psi(\xi)\exp\left[-\alpha y_1\sqrt{1+\kappa^2\xi^2} + \alpha\xi\right]d\xi,$$

где

$$\Phi(\xi) = \frac{2+\kappa^2\xi^2}{(2+\kappa^2\xi^2)^2 - 4\sqrt{1+\xi^2}\sqrt{1+\kappa^2\xi^2}},$$

$$\Psi(\xi) = \frac{2\sqrt{1+\xi^2}}{(2+\kappa^2\xi^2)^2 - 4\sqrt{1+\xi^2}\sqrt{1+\kappa^2\xi^2}}, \qquad \kappa^2 = \frac{c_3^2}{c_2^2}.$$

Сосредоточим внимание на изучении асимптотически узкой окрестности квазифронта $|(x^2+y^2)^{1/2} - c_3 t| \ll c_3 t$ $(|(x_1^2+y_1^2)^{1/2} - 1| \ll 1)$. При этом ограничимся случаем $|x_1| \sim |y_1| \sim O(1)$ и, не теряя общности, будем считать, что $x_1 > 0$. Можно убедиться, что в окрестности квазифронта асимптотически главный вклад в решение

(5), (7), (8) вносит область больших значений параметра преобразования Фурье α в интеграле для потенциала φ. При этом интеграл, выражающий функцию J_φ, при $\eta = 0$ совпадает с досконально изученным в нестационарной динамике интегралом [1, 9] и при $\alpha \to \infty$ определяется методом перевала полностью аналогично интегралу [1, 9].

Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательные выражения для равномерного асимптотического представления ($\eta \to 0$) перемещений в окрестности квазифронта. Они имеют вид

$$(9)\quad u = -\frac{\sqrt{2}(1+\nu)Pc_3^2 t}{E\pi^{3/2}} \frac{y_1}{(1-y_1^2)^{3/4}} \Phi\left(\frac{i}{\sqrt{1-y_1^2}}\right) I,$$

$$v = -\frac{\sqrt{2}(1+\nu)Pc_3^2 t}{E\pi^{3/2}} \frac{y_1^2}{(1-y_1^2)^{5/4}} \Phi\left(\frac{i}{\sqrt{1-y_1^2}}\right) I;$$

$$(10)\quad I = \int_0^\infty \sin\left[\alpha\zeta - \eta^2 D(y_1)\alpha^3 + \frac{\pi}{4}\right]\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}};$$

здесь

$$\zeta = \sqrt{1-y_1^2} - x_1, \quad D(y_1) = \frac{\nu^2}{6(1-\nu)^2}\frac{1}{(1-y_1^2)^{3/2}}.$$

Формулы (9), (10) справедливы в малой окрестности квазифронта, определяемой неравенством $-1 \ll \zeta \ll \zeta_0$. Порядок величины ζ_0, $0 < \zeta_0 \ll 1$, будет определен чуть позже.

Интеграл (10) имеет асимптотики вида

$$(11)\quad I = \eta^{-1/3}[D(y_1)]^{-1/6}\Gamma\left(\frac{7}{6}\right), \quad |\zeta| \ll \eta^{2/3},$$

$$(12)\quad I = \sqrt{\frac{\pi}{\zeta}}\left\{1 + \sin\left(\frac{2\zeta^{3/2}}{3\sqrt{3D(y_1)}\eta}\right)\right\}, \quad \zeta \gg \eta^{2/3}.$$

Впереди квазифронта при $\zeta \ll -\eta^{-2/3}$ интеграл (10) становится асимптотически мал.

Очевидно, что параметр преобразования Фурье α в (10) соизмерим с волновым числом k в направлениях Ox и Oy. Нетрудно также заметить, что при $|\zeta| \lesssim \eta^{2/3}$ основной вклад в интеграл (10) вносят значения параметра α, для которых $\alpha \lesssim \eta^{-2/3}$. Первое слагаемое в фигурных скобках в (12) определяется вкладом интегрирования в (10) по участку $\alpha \ll \eta^{-2/3}$, а второе соответствует вкладу стационарной точки $\alpha \sim \eta^{-1}\zeta^{1/2}$. Вспоминая, что уравнение (1) применимо лишь при $k \ll \eta^{-4/5}$ ($\alpha \ll \eta^{-4/5}$), получаем, что это уравнение, а следовательно, интеграл (10) и асимптотика (12) работоспособны позади квазифронта лишь при $\zeta \ll \zeta_0 = \eta^{2/5}$. Для распространения области действия уравнения (1) на интервал $\eta^{2/5} \lesssim \zeta \ll 1$ в (1) должны быть учтены члены порядка $O(k^{2j}\eta^{2j})$, $j = 2, 3, \ldots$ [2]. При этом для ζ_0 будем иметь соответственно $\zeta_0 = \eta^{2/(2j+3)}$.

Эти рассуждения показывают, что в окрестности квазифронта $|\zeta| \ll 1$ оказывается существенным вклад в решение, вносимый колебаниями с волновыми числами $\eta^{-2/3} \lesssim k \ll \eta^{-1}$. Таким образом, как и ожидалось, классическая теория в окрестности квазифронта оказывается неприменимой. Вместе с этим вследствие неравенства $k \ll \eta^{-1}$ нет необходимости переходить к трехмерной теории упругости и существует принципиальная возможность использовать уточненные двумерные теории. В частности, при $k \ll \eta^{-4/5}$, $-1 \ll \zeta \ll \eta^{2/5}$, справедливо уравнение (1).

Заметим, что первое слагаемое в фигурных скобках в асимптотике (12) соответствует решению, даваемому классической теорией обобщенного плоского напряженного состояния. При удалении от квазифронта амплитуда осцилляции (второго слагаемого в фигурных скобках в (12)), накладываемой на классическое решение, не убывает, а ее изменяемость увеличивается.

В заключение отметим, что для случая "размазанной" по x δ-функции (в (2) $T_{yy}(x, 0, t) = -P(2\beta)^{-1}\exp(-|x|/\beta)\delta(t)$) при $\beta \gg \eta^{2/3}$ классическая теория будет применима в окрестности квазифронта. Аналогичный вывод имеет место и для δ-функции, размазанной по времени.

Институт проблем механики
Российской Академии наук, Москва

Поступило
3 XII 1991

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петрашень Г.И., Молотков Л.А., Крауклис П.В.* Волны в слоисто-однородных изотропных упругих средах. Л.: Наука, 1982. 288 с. 2. *Гольденвейзер А.Л., Каплунов Ю.Д., Нольде Е.В.* – Изв. АН СССР. МТТ, 1990, № 6, с. 124–138. 3. *Skalak R.* – J. Appl. Mech., 1957, vol. 24, № 1, p. 59–64. 4. *Новожилов В.В., Слепян Л.И.* – ПММ, 1965, т. 29, вып. 2, с. 261–281. 5. *Коссович Л.Ю.* Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1986. 176 с. 6. *Kaplunov J.D.* – C.R. Ser. II, 1991, vol. 313, p. 731–736. 7. *Гольденвейзер А.Л., Каплунов Ю.Д.* – Изв. АН СССР. МТТ, 1988, № 4, с. 152–162. 8. *Каплунов Ю.Д.* – Там же, 1990, № 1, с. 148–160. 9. *Петрашень Г.И., Марчук Г.И., Огурцов К.И.* – Уч. зап. ЛГУ. Сер. мат., 1950, вып. 21, № 135, с. 71–118.