© 1990 г.

А.Л.Вольберг, В.В.Пеллер, Д.В.Якубович

НЕБОЛЬШАЯ ЭКСКУРСИЯ В ТЕОРИЮ ГИПОНОРМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Работа посвящена обзору теории операторов (ограниченных), в том или ином смысле близких к нормальным, и связям этой теории с теорией функций.

Оглавление

0. Введение 1
§ 1. Символы. Связь с классической теорией рассеяния. Сингулярная интегральная модель 4
§ 2. Двумерная функциональная модель 9
§ 3. Субскалярность гипонормального оператора 10
§ 4. Существование инвариантных подпространств. Техника С.Брауна 11
§ 5. Основные неравенства для самокоммутатора 15
§ 6. Почти нормальные операторы. Принципальная функция, мозаика 21
§ 7. Обобщения понятия гипонормальности 30
§ 8. Операторы с самокоммутатором ранга 1 31
§ 9. Приложения к двумерной проблеме моментов 32
§ 10. Краткий путеводитель по литературе 33

0. Введение

Как пишет Джон Конвей в предисловии к книге „Субнормальные операторы": „Для многих математика есть набор теорем. Для меня математика есть набор примеров, а теорема - это утверждение о наборе примеров".

Область анализа, в которой изучаются операторы, в том или ином смысле напоминающие нормальные, привлекает именно обилием примеров и связями с классической теорией функций и классической (одномерной) теорией возмущений.

Мы предполагаем, что читатель знаком с основами гильбертова пространства и наиболее известными классами операторов в нем - самосопряженными, унитарными, нормальными. Последние, определяемые требованием $T^*T-TT^*=0$, описываются, как

Ключевые слова: гипонормальные операторы, почти нормальные операторы, функция спектрального сдвига, принципальная функция, мозаика, функциональная модель, инвариантные подпространства, полиномиальная аппроксимация.

известно, и другими словами: они, и только они, приводятся к диагональному виду в подходящем ортогональном базисе или в его континуальном аналоге (ортогональном интеграле гильбертовых пространств). Обширная, изощренная техника классической теории самосопряженных операторов с большим трудом и далеко не в полном объеме переносится на нормальные или близкие к ним операторы, но зато там, где это удается, возникают интересные теории, оказывающиеся нередко на пересечении сразу нескольких дисциплин. Такова недавно возникшая теория гипонормальных операторов, краткому описанию которой посвящены настоящие заметки. Достойно сожаления, что эта содержательная, активно развивающаяся область практически не представлена в отечественной литературе. Этим объясняется и наша цель - представить легкое, ознакомительное описание предмета. Читатель, не удовлетворенный известной беглостью изложения, может восстановить детали по первоисточникам или монографиям, краткое описание которых помещено в конце обзора (п. 10).

Концепция гипонормальности была введена П. Халмошем в 1950 г. Оператор T в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ называется гипонормальным, если $[T^*, T] \geq 0$. Здесь $*$ - знак эрмитова сопряжения, а $[A, B] = AB - BA$ - *коммутатор* операторов A и B; выражение $[T^*, T]$ называется *самокоммутатором* оператора T. Условие гипонормальности равносильно условию

$$\|T^* x\| \leq \|Tx\|, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Первый этап развития теории - его условно можно назвать „локальная спектральная теория гипонормальных операторов" - был подытожен монографией Путнама [73].

Содержанием второго этапа, который продолжался примерно до середины 70-х годов, служит построение сингулярной интегральной модели (работы Д. Кся [82], Д. Пинкуса [68], Т. Като [61], П. Мули [65], [44]), и развитие Р. Кэри и Д. Пинкусом теории почти нормальных операторов (т. е. операторов с ядерным самокоммутатором). Важную роль при этом играло изучение принципальной функции[1] - унитарного инварианта почти нормального оператора, - служащей (как оказалось) обобщением понятия индекса Фредгольма. Принципальная функция есть двумерный аналог функции спектрального сдвига одномерной теории возмущений.

Каждый гипонормальный оператор с конечным циклическим набором векторов почти нормален в силу неравенства Бергера-Шо [24], обсуждаемого в п. 5. 2.

Третий этап стимулировался поисками инвариантных подпространств различных классов операторов. Техника С. Брауна [29], разработанная им для доказательства существования нетривиальных инвариантных подпространств субнормального оператора, оказалась пригодной к нахождению инвариантных подпространств многих классов операторов с густым спектром (см., например, [20, 30, 31, 32]). В это же время началось изучение мозаики - операторного аналога функции спектрального сдвига (см. Кэри [34], Кэри, Пинкус [36, 37, 38]). Кроме того, обнаружились интересные связи

[1] За неимением лучшего, мы выбрали фонетическую кальку с английского principal.

теории почти нормальных операторов с геометрической теорией меры (см. Кэри, Пинкус [38], Кэри [34]). В настоящее время все эти понятия продолжают изучаться. Исследуются, кроме того, связи теории гипонормальных операторов и теории сжатий [79], двумерная функциональная модель [63, 64], различные классы примеров.

Приведем вначале примеры гипонормальных операторов.

1) Любой оператор S в H, имеющий нормальное расширение, т.е. такой, что $S=N|H$, где N - нормальный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $\mathcal{H} \supset H$, $H \in \mathrm{Lat}\, N$,[2] является гипонормальным: $\|S^*x\| = \|P_H N^* x\| \le \|N^*x\| = \|Nx\| = \|Sx\|$, $x \in H$. Такие операторы называют субнормальными.

Если μ - конечная мера на плоскости, то можно рассмотреть субнормальный оператор S_μ, $S_\mu f(z)=zf(z)$, действующий в замыкании $P^2(\mu)$ полиномов в пространстве $L^2(\mu)$. Каждый циклический субнормальный оператор S унитарно эквивалентен оператору S_μ для некоторой меры μ. (Цикличность означает, что span $\{S^n f\colon n \ge 0\}=H$ для некоторого $f \in H$, здесь span - замкнутая линейная оболочка). Этим фактом объясняется особенно тесная взаимосвязь субнормальных операторов с теорией функций и теорией полиномиальных аппроксимаций. Примеры такой связи даны в п. 5.1, 9. Взаимодействие теории гипонормальных операторов и теории функций продемонстрировано в п. 8, 9.

2) Простые примеры гипонормальных операторов можно строить с помощью взвешенных операторов композиции. Пусть $(V, \mathfrak{A}, \mu)$ - пространство с мерой; $\tau\colon V \longrightarrow V$ - изоморфизм, сохраняющий меру. Пусть φ - ограниченная функция на V, „убывающая" относительно сдвига τ, т.е. $|\varphi \circ \tau| \le |\varphi|$ на V. Тогда оператор $Tf=\varphi(f \circ \tau)$ гипонормален в $L^2(\mu)$. Действительно, $T^*f=(\overline{\varphi} f)\circ\tau^{-1}$, $\|Tf\|^2 = \int |\varphi\circ\tau^{-1}|^2 |f|^2 d\mu \ge \int |\varphi|^2 |f|^2 d\mu = \|T^*f\|^2$. По поводу гипонормальности и субнормальности взвешенных операторов композиции см. [33, 62].

3) Важнейший класс примеров дается суммой оператора умножения и сингулярного интегрального оператора в прямом интеграле гильбертовых пространств $\mathcal{H}=\int_\sigma \oplus H(\lambda)d\lambda$:

$$(Tf)(x) = xf(x) + i\left[a(x)f(x) + \frac{1}{\pi i}\, v.p. \int_\sigma \frac{b^*(x)b(t)f(t)}{x-t}\, dt\right]. \qquad (1)$$

Здесь σ - ограниченное подмножество вещественной прямой $\mathbb{R}$, $a=a^*=\int \oplus a(x)dx$ - ограниченная операторнозначная функция, b - ограниченная функция со значениями в $B(E)$.[3] $b(t)|H(t)^\perp = 0$ (все $H(t)$ содержатся в гильбертовом пространстве E). В случае $H(\lambda)\equiv E$ пространство $\mathcal{H}$ совпадает с пространством $L^2(\sigma, d\lambda; E)$ вектор-функций на σ со значениями в E. В общем случае прямой интеграл $\int_\sigma \oplus H(\lambda)d\lambda$ можно определить как подпространство функций f из $L^2(\sigma, d\lambda; E)$, удовлетворяющих условию $f(\lambda) \in H(\lambda)$ для всех $\Lambda \in \sigma$.

---

[2] Lat T - набор инвариантных подпространств оператора T.

[3] Символ $B(E)$ обозначает, как обычно, набор всех ограниченных линейных операторов в пространстве E.

Нетрудно видеть, что

$$([T^*,T]f,f)_{\mathcal{H}} = \frac{2}{\pi}\,\|\int b(t)f(t)dt\|^2_{\mathcal{H}} \geq 0.$$

4) Известен критерий гипонормальности операторов Тёплица [49].

Оператор $\alpha T+\beta I$, очевидно, гипонормален для любого гипонормального оператора T и любых чисел $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$. Сумма и произведение гипонормальных операторов, напротив, необязательно гипонормальны. Выяснению условий, когда это так, посвящена работа [48].

Все пространства ниже сепарабельны, а операторы ограничены.

§ 1. Символы. Связь с классической теорией рассеяния. Сингулярная интегральная модель

Подпространство $K, K\subset H$ называется приводящим оператор $T\in B(H)$, если T разлагается в прямую сумму двух операторов относительно ортогонального разложения $H=K\oplus K^{\perp}$. Гипонормальный оператор $T\in B(H)$ называется *чистым*, если наименьшее его приводящее подпространство $H_p(T)$, содержащее $[T^*,T]H$ совпадает с H. Отметим формулу

$$H_p(T) = \operatorname{span}\,\{T^{*n}T^m[T^*,T]H\ :\ n,m\geq 0\}. \tag{2}$$

Любой гипонормальный оператор есть ортогональная сумма нормального и чистого гипонормального слагаемых; чистые гипонормальные операторы не содержат нормальных слагаемых.

Известно, что свойства произвольного оператора в гильбертовом пространстве слабо связаны со свойствами его вещественной и мнимой частей. Для гипонормальных операторов эти связи очень содержательны. Можно показать, например (см. начало п.5), что для чистого гипонормального оператора T операторы $\operatorname{Re} T=\frac{1}{2}(T+T^*)$, $\operatorname{Im}T=\frac{1}{2i}(T-T^*)$ имеют абсолютно непрерывный спектр.) Более того, запись чистого гипонормального оператора в спектральном представлении его вещественной части позволяет привести его к форме (1). Эта запись и составляет содержание одномерной сингулярной интегральной модели.

В случае самокоммутатора ранга 1 она была предложена Д.Кся [82]. Построение этой модели опирается на существование символа T относительно $\operatorname{Re}T$ и существование оператора Фридрихса $\Gamma_{\operatorname{Re}T}([T^*,T])$. Сингулярная интегральная модель позволяет вычислять спектр гипонормального оператора (п. 1.4); имеет интересные связи с мозаикой (п.6.3) и с другими унитарными инвариантами.

1.1. Символы. Сильная операторная топология - слабейшая из топологий в $B(H)$, в которой непрерывны полунормы $p_x(A) = \|Ax\|$, $x\in H$. Пусть X - самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H, тогда для оператора V в H можно рассмотреть сильные операторные пределы

$$S_X^{\pm}(V) = s - \lim_{t\to\pm\infty} e^{itX} V e^{-itX} \tag{3}$$

(они существуют не для всех V). Операторы $S_X^{\pm}(V)$ по аналогии с теорией сингулярных интегральных операторов, называют *символами оператора* V (относительно X). Символы $S_X^{\pm}(V)$ коммутируют с e^{isX} при $s\in\mathbb{R}$ и, следовательно, с X.

С оператором X также связывают Г-операторы Фридрихса

$$\Gamma_X^{\pm}(D) = \pm\, i \int_0^{\pm\infty} e^{itX} D e^{-itX} dt = s - \lim_{t\to\pm\infty} \pm\, i \int_0^{r} e^{itX} D e^{-itX} dt$$

для тех D, для которых эти пределы существуют. Так как

$$e^{irX} V e^{-irX} - V = \int_0^r \frac{d}{dt} e^{itX} V e^{-itX} = -i \int_0^r e^{itX} [V,X] e^{-itX} dt, \tag{4}$$

то символы $S_X^{\pm}(V)$ существуют тогда и только тогда, когда существуют Г-операторы $\Gamma_X^{\pm}([V,X])$, причем

$$V = S_X^{\pm}(V) \pm \Gamma_X^{\pm}([V,X]). \tag{5}$$

Пусть теперь $T=X+iY$ - гипонормальный оператор ($X=X^*, Y=Y^*$), $i[X,Y] = \frac{1}{2}[T^*,T]=C\geq 0$. Из (4) следует, что

$$e^{irX} Y e^{irX} - Y = \int_0^r e^{itX} C e^{-itX} dt. \tag{6}$$

Поэтому ограниченное семейство самосопряженных операторов $\{e^{irX} Y e^{-irX}\}_{r\geq 0}$ возрастает и имеет предел в сильной операторной топологии. Тем самым $S_X^{\pm}(Y)$, $\Gamma_X^{\pm}([X,Y])$ существуют и

$$T=X + i\,(S_X^{\pm}(Y) \pm \Gamma_X^{\pm}([Y,X]))=X + i(S_X^{\pm}(Y) \pm \Gamma_X^{\pm}(iC)). \tag{7}$$

Дифференцируя равенство

$$e^{i\lambda X}\Gamma_X^{\pm}(D) e^{-i\lambda X} = \pm\, i \int_{\lambda}^{\pm\infty} e^{itX} D e^{-itX} dt$$

по λ и полагая $\lambda=0$, получаем соотношение

$$[\Gamma_X^{\pm}(D),\ X] = \pm D. \tag{8}$$

1.2. Одномерная сингулярная интегральная модель гипонормального оператора - модель в спектральном представлении его вещественной части. Пусть $T=X+iY$ - чистый гипонормальный оператор; тогда оператор $X=\mathrm{Re}\, T$ имеет абсолютно непрерывный спектр. Пусть

$$\mathcal{H} = \int \oplus\, H(x)\, dx \tag{9}$$

- разложение пространства $\mathcal{H}$ в прямой интеграл, соответствующее спектральному

пространство. Положим $i[X,Y]=R^2$, $R>0$. Поясним, как из равенства (7) получается сингулярная интегральная модель оператора T. Изложим подход Мули [65]. Идея этого подхода состоит в факторизации

$$\Gamma_X^-(-iR^2) = J^*\chi_{(-\infty,0]}J, \tag{10}$$

где $J:\mathcal{H} \longrightarrow L^*(\mathbb{R}, \operatorname{clos} R\mathcal{H})$ - оператор, действующий по правилу

$$(Jf)\ (t) = Re^{-itX}f,\ \ t\in\mathbb{R}.$$

Здесь $L^2(\mathbb{R},\ \operatorname{clos} R\mathcal{H})$ - L^2-пространство вектор-функций из $\mathbb{R}$ в $\operatorname{clos} R\mathcal{H}$, а $\chi_{(-\infty,0]}$ - оператор умножения на характеристическую функцию полуоси. Так как $\|Jf\|^2=((\Gamma_X^-(R^2)+\Gamma_X^+(R^2))f,f)_{\mathcal{H}}$, то J - ограниченный оператор.

Пусть F - векторное преобразование Фурье по переменной x в прямом интеграле (9). Оператор J удовлетворяет тождеству

$$(Je^{isX}f)(t) = (Jf)\ (t-s),\ \ s\in\mathbb{R}.$$

Следовательно, оператор F^*J коммутирует с операторами e^{isX}, а поэтому и с X. Из (7), (10) получаем, что

$$T = X + i(S_X^-(Y) + J^*F(F^*\chi_{(-\infty,0]}F)F^*J. \tag{11}$$

Оператор $F^*\chi_{(-\infty,0]}F$ есть сингулярный интеграл:

$$F^*\chi_{(-\infty,0]}Ff = \tfrac{1}{2}\, f + \tfrac{1}{2\pi i}\ v.p. \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-x}\, dt.$$

Любой оператор в прямом интеграле (9), коммутирующий с X, имеет вид умножения на оператор-функцию. Пусть $S_X^-(Y)f = uf$, $(F^*J)f=\sqrt{2}\, bf$, где u,b - оператор-функции из E в E. Тогда (11) приобретает вид (1), если положить $a=u-b^*b$.

Так как, очевидно,

$$e^{itX}F^*\chi_{(-\infty,0]}Fe^{itX} = F^*\chi_{(-\infty,t]}F,$$

то из (11) и (3) вытекает, что абстрактные символы $S_X^{\pm}(T)$ связаны с символами a,b сингулярного интегрального оператора (1) равенствами

$$S_X^{\pm}(T)f(x) = (x + i(a(x) \pm b^*(x)b(x)))f(x).$$

В случае отказа от требования чистоты оператора T к модельному оператору (1) следует добавить нормальное прямое слагаемое, соответствующее сингулярной части оператора X.

1.3. Сингулярная интегральная модель для случая ядерного самокоммутатора. Напомним, что идеал Шэттена-фон Неймана $\mathfrak{S}_p$ состоит из тех компактных операторов A, $A\in B(\mathcal{H})$, для которых ряд из собственных чисел оператора $(A^*A)^{p/2}$

из $\mathfrak{S}_1$ называются ядерными. Предположим теперь, что $T=X+iY$ - необязательно гипонормален, X - абсолютно непрерывен и $C=\frac{1}{2}[T^*,T] = i[X,Y]\in\mathfrak{S}_1$. Теперь можно привлечь классическую теорию рассеяния при возмущениях ядерного типа (Розенблюм, Като, Бирман, Пирсон). Воспользуемся теоремой Пирсона [14], которая утверждает, что предел $s-\lim\limits_{t\to\pm\infty} e^{itX_1}Ye^{-itX}$ существует, если операторы X и X_1 самосопряженные, и $X_1Y-YX\in\mathfrak{S}_1$. Полагая здесь $X=X_1$, получаем, что символы $S_X^{\pm}(Y)$ существуют. Из (7) следует, что

$$T = X + i\left(\frac{S_X^+(Y) + S_X^-(Y)}{2} + \frac{1}{i}\,(\Gamma_X^-(C) - \Gamma_X^+(C)\right). \tag{12}$$

Операторы $A^{\pm}\overset{def}{=}S_X^{\pm}(Y)$ коммутируют с X и, следовательно, имеют вид

$$A^{\pm} = \int\oplus A^{\pm}(x)dx$$

относительно разложения (9).

Пусть $\gamma^+ = \Gamma_X^+(C)$, и

$$\Gamma_\varepsilon^{\pm}(C) = i\int_0^\infty e^{-\varepsilon t}e^{itX}Ce^{-itX}dt;$$

тогда $\gamma^+=s-\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\Gamma_\varepsilon^+(C)$. В самом деле, из определения символов $\Gamma_X^+(C)$ следует, что

$$s-\lim_{\varepsilon\to+\infty} e^{itX}\gamma^+e^{-itX} = 0. \tag{13}$$

Так как $[\gamma^*,X]=C$ (см. (8)), то

$$\Gamma_\varepsilon^+(C) = -\int_0^\infty e^{-\varepsilon t}\frac{d}{dt}\,(e^{itX}\gamma^+e^{-itX})dt = \gamma^+\varepsilon\int_0^\infty e^{-\varepsilon t}e^{itX}\gamma^+e^{-itX}dt.$$

Последний интеграл сильно стремится к нулю при стремлении к нулю ε ввиду (13).

Записать $\Gamma_\varepsilon^+(C)$ в виде интегрального оператора $\mathcal{H}=\int\oplus H(t)dt$ уже довольно просто. Пусть

$$C = \sum s_k\varphi_k\otimes\varphi_k,\quad \varphi_k = \int\oplus\,\varphi_k(t)dt.$$

В каждом $H(t)$ имеется ортонормированный базис $e_n(t)$, соответствующий измеримому семейству фон Неймана. Пусть L - множество точек Лебега всех функций $(e_n(t),\varphi_k(t))_{H(t)}$. Для $\lambda,\mu\in L$ рассмотрим операторы $C(\lambda,\mu) = \sum s_k(\cdot,\ \varphi_k(\mu))\varphi_k(\lambda)$.

$$\iint \|\,C(\lambda,\mu)\,\|_{\mathfrak{S}_2}d\lambda d\mu \le \sum|s_k|\,(\int\|\varphi_k(\lambda)\|_{H(\lambda)}\,d\lambda)^2 \le$$

$$\le \sum|s_k|\ m_1(\sigma(X))\ \cdot\ \|\,\varphi_k\|_{\mathcal{H}} < \infty.$$

Теперь легко проверить, что

$$(\Gamma_\varepsilon^+(C)f,g)_{\mathcal{H}} = i\int_0^\infty (e^{itX-\varepsilon t}Ce^{-itX}f,g)_{\mathcal{H}}dt =$$

$$=\sum s_k\int_c^\infty (e^{itX-\varepsilon t}\varphi_k,g)_{\mathcal{H}}(e^{-itX}f,\varphi_k)_{\mathcal{H}}dt =$$

$$=i\sum s_k \int_0^\infty \int (e^{it\lambda-\varepsilon t}\varphi_k(\lambda), g(\lambda))d\lambda \cdot \int (f(\mu), \varphi_k(\mu)e^{-it\mu})d\mu =$$

$$=\iint \frac{\sum s_k(f(\mu),\ \varphi_k(\mu)\cdot(\varphi_k(\lambda),\ g(\lambda))}{\lambda-\mu-i\varepsilon}\, d\lambda d\mu = (\int\oplus\int \frac{C(\lambda,\mu)f(\mu)}{\lambda-\mu-i\varepsilon}\, d\mu)d\lambda, g)_{\mathcal{H}}.$$

Аналогичное представление имеет место для $\Gamma_\varepsilon^-(C)$. „Формула скачка" дает

$$\tfrac{1}{i}(\Gamma_X^-(C) - \Gamma_X^+(C))f = \int \oplus\ v.p.\int \frac{C(\lambda,\mu)f(\mu)d\mu}{\lambda-\mu}\, d\lambda, \tag{14}$$

$$\tfrac{1}{i}(\Gamma_X^-(C) + \Gamma_X^+(C))f = 2\pi\int \oplus\ C(\lambda,\lambda)f(\lambda)d\lambda. \tag{15}$$

Теперь из (14) и (12) видно, что

$$(Tf)(x) = xf(x) + i\,\frac{A^+(x)+A^-(x)}{2}\, f(x) + iv.p.\int_{\sigma(X)} \frac{C(x,t)f(t)dt}{x-t}.$$

Использование теоремы Колмогорова ([64], гл. 1, § 5) позволяет при дополнительном предположении гипонормальности T записать $C(\lambda,\mu)=A^*(\lambda)A(\mu)$, где $A(\mu)$ - оператор из $H(\mu)$ в некоторое гильбертово пространство K. Так как

$$S_X^+(Y) - S_X^-(Y) = \int \oplus\ B(\lambda)d\lambda,$$

где $\operatorname{ess\,sup}_{\lambda\in\sigma(X)} \|B(\lambda)\| < \infty$, то $A^*(\lambda)A(\lambda) = C(\lambda,\lambda) = \frac{1}{2\pi}B(\lambda)$ и $\operatorname{ess\,sup} \|A(\lambda)\| < \infty$.

1.4. Спектр. Одномерная сингулярная интегральная модель помогает, в частности, при нахождении спектра гипонормального оператора. Отметим прежде всего, что в случае $\dim H(t) \equiv 1, t\in[c,d]$, и непрерывных функций $a,b\in C[c,d]$, спектр $\sigma(T)$ (см. (1)) совпадает с множеством

$$\{x + iy \in \mathbb{C}: x \in [c,d],\ a(x) - |b(x)|^2 \le y \le a(x) + |b(x)|^2\}. \tag{16}$$

При этом любая внутренняя точка λ этой криволинейной трапеции есть простое собственное число оператора T^*. Уравнение $(T^*-\bar\lambda)\psi_\lambda=0$ относительно $\psi_\lambda\in L^2(c,d)$ может быть решено явно [83] с использованием стандартных методов решения сингулярных интегральных уравнений.

Некоторое время задача нахождения спектра общего оператора (1) не поддавалась решению. Ответ содержится в книге Д. Кся [83] и неожиданно прост:

$$\sigma(T) = \bigcup_{-1\le k\le 1} \sigma(T_k),$$

где T_k - нормальные операторы умножения на оператор-функцию $x+i(a+kb^*b)(x)$. Доказательство довольно сложно и использует, в частности, редукцию к одномерному случаю с помощью прямоугольных вырезаний спектра и построения приближенных собственных векторов оператор-функции $b(x)$.

§ 2. Двумерная функциональная модель

Эта модель появилась в работе М. Мартина и М. Путинара [63].

Пусть T - чистый гипонормальный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $R^2 = [T^*,T]$, $T_z \overset{\text{def}}{=} T-zI$. Тогда $[T_z^*,T_z] = R^2$ и, следовательно,

$$T_z^*T_z \geq R^2.$$

Отсюда сразу вытекает, что существует сжимающая операторная функция $C(z)$, $z\in\mathbb{C}$, такая, что

$$T_z^*C(z) = R, \text{ Range } C(z) \subset \text{clos Range } T_z, \ z \in \mathbb{C}.$$

Следовательно, операторное распределение $\partial C(z)$ (здесь $\partial=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$) является „обобщенной операторнозначной собственной функцией" оператора T^*:

$$T_z^*\partial C = 0 \tag{17}$$

(см. [64]). Пусть $\mathcal{R}$=clos Range R и $\mathcal{D}(\mathbb{C},\mathcal{R})$ - пространство гладких $\mathcal{R}$-значных функций с компактным носителем. На функциях $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{C},\mathcal{R})$ определим оператор U формулой

$$U_\varphi = \int_{\mathbb{C}} (\partial C) \cdot \varphi dm_2(z) \overset{\text{def}}{=} -\int_{\mathbb{C}} C(z)(\partial\varphi)(z)dm_2(z), \tag{18}$$

где m_2 - двумерная мера Лебега. Из (17) следует, что $T^*U\varphi = U\bar{z}\varphi$. Определим модельное пространство $\mathcal{H}_T$ как пополнение пространства $\mathcal{D}(\mathbb{C},\mathbb{R})$ по норме

$$\|\varphi\|_T \overset{\text{def}}{=} \| U\varphi\|_{\mathcal{H}}. \tag{19}$$

Оказывается, $U:\mathcal{H}_T\to\mathcal{H}$ осуществляет унитарную эквивалентность пространств $\mathcal{H}_T$ и $\mathcal{H}$. Оператор $T^*=U^{-1}T^*U$, очевидно, действует по формуле

$$\tilde{T}^*f = \bar{z}f, \ f\in\mathcal{H}_T. \tag{20}$$

Оператор $\tilde{T}=U^{-1}TU$, как можно показать, определяется равенством

$$\tilde{T}\varphi = z\varphi - \frac{1}{\pi}(\Gamma_T\varphi) * \frac{1}{\bar{z}}, \tag{21}$$

где $\Gamma_T = -R\partial C$.

Очевидно, что U - изометрия. Проверим, что U действует „на". Если $x \perp$ Range U, то $C^*(z)x$ - целая оператор-функция. Поэтому достаточно показать, что имеет место импликация

$$C^*(z)x=0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow x=0, \tag{22}$$

или, что то же самое, что пространство $M \overset{\text{def}}{=} \vee\{C(z)x: x\in\mathcal{H}, z\in\mathbb{C}\}$ совпадает с $\mathcal{H}$.

Оказывается, и это и составляет существо двумерной модели чистого гипонормального оператора, что

$$\text{(i) } \mathcal{R}\subset M, \qquad \text{(ii) } TM\subset M, \qquad \text{(iii) } T^*M\subset M.$$

Из (i)-(iii) немедленно следует, что $M=\mathcal{H}$, так как наименьшее приводящее T подпространство, содержащее $\mathcal{R}$, совпадает с $\mathcal{H}$ для чистого гипонормального

Включения (i) и (iii) – очевидные следствия определения $C(z)$, точнее, равенств

$$T_z^* C(z) = R, \quad \lim_{|z|\to\infty} z(C) = -R. \tag{23}$$

Однако включение (ii) совершенно не очевидно. Оно вытекает из следующей малопривлекательной формулы [64], гл. II, которая, однако, лежит в существе дела:

$$T_z C(z) = R + \int_{\mathbb{C}} \frac{C(\zeta)}{z-\bar{\zeta}}\, dm_2(\zeta) - \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{C(\zeta)R(\zeta)\partial C(\zeta)}{z-\bar{\zeta}}\, dm_2(\zeta). \tag{24}$$

Равенство понимается в смысле операторнозначных распределений. Эта формула – просто другой способ выразить (21).

Те же рассуждения применимы в случае произвольного гипонормального оператора T (а не только в случае чистого T). Если $\mathcal{H}_p(T)$ – наибольшее приводящее подпространство, на котором T является чистым,[4] то U унитарно отображает $\mathcal{H}_T$ на $\mathcal{H}_p(T)$. Чтобы это обосновать, достаточно заметить, что

$$M \subset \mathcal{H}_p(T) \tag{25}$$

(противоположное включение следует из (2), (i)-(iii) как выше).

Если T – чистый гипонормальный оператор, то операторнозначная функция $C^*(\cdot)C(\cdot):\mathbb{C}^2 \longrightarrow B(\mathcal{R})$ – полный унитарный инвариант T.

Двумерная модель не получила пока широкого распространения, возможно, из-за сложности формулы для нормы модельного пространства $\mathcal{H}_T$. Более полезной оказывается модель, в которой оператору T соответствует умножение на z (а не T^* – умножение на $\bar{z}$). О ней пойдет речь в следующем пункте.

§ 3. Субскалярность гипонормального оператора

Замена слов „спектральная мера" на „спектральное распределение" в определении нормального оператора приводит к понятию скалярного оператора. Точнее, ограниченный оператор S в $\mathcal{H}$ называется [45] C^m-*скалярным*, если имеется непрерывное представление $U: C^m \longrightarrow B(\mathcal{H})$ (спектральное распределение) такое, что $U(1)=I$, $U(z)=S$. Здесь C^m – алгебра m раз непрерывно дифференцируемых функций на плоскости. Иными словами, скалярные операторы – это те, которые допускают достаточно богатое „вещественное" функциональное исчисление.

Субскалярным называется оператор, который с точностью до подобия является сужением скалярного на его инвариантное подпространство.

В работе [70] М. Путинар показал, что любой гипонормальный оператор является C^2-субскалярным. Очевидно, субнормальные операторы C-субскалярны. Таким образом, разница между гипонормальными и субнормальными операторами заключается в некотором

[4] Или, что то же самое, наименьшее приводящее T подпространство, содержащее $\mathcal{R}$.

сужении функционального исчисления.

Результат Путинара получен на следующем пути (начало ему положил, по-видимому, Бишоп [26]): для изучения оператора T рассматривается оператор $zI-T$ в подходящем пространстве $\mathcal{H}$-значных функций переменной z. Например, можно рассмотреть действие $zI-T$ в пространстве $\mathcal{O}(U,\mathcal{H})=\mathcal{O}(U)\otimes\mathcal{H}$ всех $\mathcal{H}$-значных голоморфных функций в открытом множестве U. Бишопом [26] был выделен класс операторов, обладающих свойством (β): $T\in(\beta)$ тогда и только тогда, когда оператор $zI-T$ инъективен на $\mathcal{O}(U,\mathcal{H})$ и имеет замкнутый образ при всех U, $U\subset\mathbb{C}$.

Для операторов со свойством (β) пучок $\mathcal{F}$ пространств Фреше

$$\mathcal{F}(U) = \mathcal{O}(U,\mathcal{H})/(zI-T)\mathcal{O}(U,\mathcal{H})$$

несет всю информацию о T. Например, пространство $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ глобальных сечений пучка $\mathcal{F}$ есть в точности $\mathcal{H}$. Изоморфизм осуществляет оператор

$$j:\mathcal{F}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}, \quad jf=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (uI - T)^{-1}f(u)du,$$

где γ - любой контур, охватывающий $\sigma(T)$. Оператор T превращается при этом изоморфизме в сужение на $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ оператора умножения на z в $\mathcal{F}$.

Гипонормальные операторы обладают свойством (β) ([64], гл. III, теорема 5.5) и, тем самым, имеют вышеприведенную модель. Таких моделей можно написать много - стоит задаться открытым множеством $U\supset\sigma(T)$ и гильбертовым пространством функций $A(U)$ и показать, что отображение

$$V:\mathcal{H} \longrightarrow A(U,\mathcal{H}) \ / \ \mathrm{clos}\ (zI-T)A(U,\mathcal{H}),$$

действующее по формуле $Vh=1\otimes h$, инъективно и имеет плотный образ. (Здесь $U\supset\sigma(T)$, $A(U,\mathcal{H}) = A(U)\otimes\mathcal{H}$, $1\otimes h$ - постоянная функция, всюду равная h). Если при этом в гильбертовом пространстве $A(U)$ действуют операторы умножения на φ, $\varphi\in C^m$, то оператор $\tilde{T} = z|A(U,\mathcal{H})/\mathrm{clos}(zI-T)A(U,\mathcal{H})$ будет C^m-скалярным, а $\tilde{T}|$ Range V будет субскалярным и унитарно эквивалентным T.

Для гипонормального оператора подходящим оказывается пространство $A(U)=\pi^2(U)$,

$$\pi^2(U) \overset{\mathrm{def}}{=} \left\{f\in L^2(U) \ : \ \|f\|_{\pi^2} \overset{\mathrm{def}}{=} \left(\sum_{i=0}^{2} \|\bar\partial^i f\|^2_{L^2(U)}\right)^{1/2} < \infty \right\}.$$

§ 4. Существование инвариантных подпространств. Техника С.Брауна

Интерес к субнормальным операторам и родственным классам в 70-е годы во многом стимулировался попытками доказать существование инвариантного подпространства у произвольного субнормального оператора. Попытки решить эту задачу привели к значительным продвижениям в теории полиномиальной аппроксимации.

субнормального оператора. И хотя позднее Дж. Томсон и Т. Трент предложили совсем простое доказательство результата С. Брауна, но техника работы [29] оказалась очень общей и позволила решить еще несколько задач. В том числе эта техника позволила доказать [32] существование инвариантного подпространства для любого сжатия T с «богатым спектром", т. е. такого, что

$$\|\varphi\|_\infty = \sup\{|\varphi(z)| : z\in\sigma(T)\},\ \forall\varphi\in H^\infty;$$

более общо, доказать [16, 78] существование инвариантного подпространства для оператора T, у которого спектр является K-спектральным множеством, т. е.

$$\|r(T)\| \le K \sup_{s\in\sigma(T)} |r(\zeta)| \quad \forall r\in\mathcal{R}(\sigma(T)).$$

Здесь $\mathcal{R}(F)$ - множество рациональных функций с полюсами вне F.

Укажем в этой связи еще на работы [20, 31, 19, 30]. В последней уже «почти" доказано, что любой гипонормальный оператор имеет инвариантное подпространство. Й. Эшмайер доказал [53], что субскалярный оператор с большим спектром имеет нетривиальное инвариантное подпространство. Принимая во внимание субскалярность гипонормального оператора, видим, что этот результат обобщает результат С. Брауна [30].

Подход С. Брауна к исследованию неприводимого субнормального оператора S опирается на построение изометрического функционального исчисления

$$\pi: H^\infty(G) \longrightarrow B(\mathcal{H}),\ \pi(1)=I,\ \pi(z)=S, \tag{26}$$

которое *-слабо непрерывно и тем самым является *-слабым гомеоморфизмом. (Если M - банахово пространство, то *-слабая топология на M^* - это слабейшая топология, относительно которой для всех $x\in M$ непрерывны функционалы $y\longmapsto(x,y)$, $y\in M^*$. Для пространств $H^\infty(G)$ и $B(\mathcal{H})$ естественно вычисляются их предсопряженные [46]). В дальнейшем будем писать $\pi(\varphi)=\varphi(S)$. Для читателей, знакомых с характеризацией Сарасона [75], *-слабого замыкания полиномов в $L^\infty(\mu)$, скажем, что G = int $\Sigma(\mu)$, где $\Sigma(\mu)$ - оболочка меры μ (см. [75, 46], с. 406-407), а μ - скалярная спектральная мера минимального нормального расширения оператора S. При этом Range $\pi=P^\infty(S)$ - наименьшая *-слабо замкнутая алгебра, содержащая S, I. Таким образом, функционал $e_\lambda(\varphi(S)) = \varphi(\lambda)$, $\lambda\in G$, $\varphi\in H^\infty(G)$, *-слабо непрерывен на $P^\infty(S)$. С. Браун показал, что при некоторых ограничениях на S множество $\sigma(S)\cap G$ велико, и при $\lambda\in\sigma(S)\cap G$ имеет место представление

$$e_\lambda = f\otimes g, \tag{27}$$

$f,g\in\mathcal{H}$. Тогда S обладает нетривиальным инвариантным подпространством E = span $\{S^n(S-\lambda)f : n\ge 0\}$. Ясно, что $g\perp E$, так как

$$(S^n(S-\lambda)f,g) = e_\lambda(S^n(S-\lambda)) = z^n(z-\lambda)|_{z=\lambda} = 0.$$

Обрисуем идею доказательства С. Брауна. Можно считать, что S - чистый циклический субнормальный оператор, в частности, $S=S_\mu$ для некоторой меры μ (см.

введение). Таким образом, S действует в пространстве функций $\mathcal{H}=P^2(\mu)$. Пусть $P^\infty(\mu)$ - $*$-слабое замыкание многочленов в пространстве $L^\infty(\mu)$, в интересующем нас случае $P^\infty(\mu)$ можно отождествить с алгеброй Харди $H^\infty(G)$. Важную роль в доказательстве играет предсопряженное пространство $P^\infty(\mu)_*$, сопряженным для которого является $P^\infty(\mu)$. Произведения $f\otimes g$, $f,g\in\mathcal{H}$, вкладываются в это пространство; их норма $\|f\otimes g\|_*$ совпадает с нормой функционала $\varphi\longmapsto(\varphi(S)f,g)$, $\varphi\in H^\infty(G)$. Элемент $e_\lambda\in P^\infty(\mu)_*$ определяется равенством

$$(e_\lambda,\ \varphi) = \varphi(\lambda).$$

Можно считать, что

$$\forall\lambda\in\sigma(S)\quad \exists\, f_n\in\mathcal{H}:\ \lim_{n\to\infty}\|(S-\lambda)f_n\| = 0$$

(в противном случае точечный спектр оператора S^* непуст, что влечет существование нетривиального инвариантного подпространства). Ядром доказательства служат следующие леммы.

1) *Если* $f_n\in\mathcal{H}$, $\|f_n\| = 1$, $\lambda\in G$, $\|(S-\lambda)f_n\|\longrightarrow 0$, *то*

$$\|e_\lambda - f_n\otimes f_n\|_*\longrightarrow 0.$$

2) *Если* α, $\beta\in G$, $\alpha\neq\beta$, $\|(S-\alpha)f_n\|\longrightarrow 0$, $\|(S-\beta)g_n\|\longrightarrow 0$, *то* $\|f_n\otimes h\|_*\longrightarrow 0$, $\|h\otimes f_n\|_*\longrightarrow 0$ *для всех* $h\in\mathcal{H}$, *и* $\|f_n\otimes g_n\|_*\longrightarrow 0$.

3) *Единичный шар пространства* $P^\infty(\mu)_*$ *есть замкнутая выпуклая оболочка множества*

$$\{\xi e_\lambda\ :\ \lambda\in G\cap\sigma(S),\ |\zeta| = 1\}.$$

4) *Если* $\lambda\in G\cap\sigma(S)$, $\|e_\lambda-f_0\otimes g_0\|_*< 2^{-2n}$, *то найдутся* f_1, $g_1\in\mathcal{H}$ *такие, что* $\|f_0-f_1\| < 2^{-n}$, $\|g-g_1\| <2^{-n}$,

$$\|e_\lambda-f_1\otimes g_1\|_*<2^{-2(n+1)}.$$

Доказательство утверждения 4) состоит в следующей явной процедуре. Согласно 3), существуют $\lambda_1,\dots,\lambda_m\in G\cap\sigma(S)$, $\zeta_1,\dots,\zeta_m\in\mathbb{C}$ такие, что

$$\|e_\lambda - f_0\otimes g_0 - \sum\zeta_i e_{\lambda_i}\|_* < 2^{-2(n+1)}.$$

Пусть $\{h_j^k\}_{k=1}^\infty$ - „аппроксимативные единицы", т.е. $\|h_j^k\| = 1$, $\|(S-\lambda_j)\,h_j^k\|\longrightarrow 0$ при $k\longrightarrow\infty$. Используя 1) и 2), легко показать, что векторы $g_1 = g_0 + \sum\sqrt{\zeta_i}\,h_i^{(k)}$ и $f_1 = f_0+\sum\sqrt{\zeta_i}\beta_i h_i^k$, $\beta_i=\zeta_i|\zeta_i|^{-1}$ обладают всеми необходимыми свойствами, если число k достаточно велико.

Последовательное применение леммы 4) дает сходящиеся последовательности $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ векторов из $\mathcal{H}$. Если f,g - их пределы, то, очевидно, выполнено (27).

Интересно отметить также, что некоторые более поздние приложения техники С.Брауна [30, 53] уже не используют существование изометрического представления (26). При этом в аналогах лемм 1)-4) вместо области G приходится рассматривать несколько вложенных друг в друга областей. Заключительное рассуждение использует подходящую расширяющуюся систему областей $\{G_n\}_{n\geq 0}$.

Р.Олин и Дж.Томсон [66] показали, что для любого субнормального оператора S и

любого функционала L *-слабо непрерывного на $P^\infty(S)$, найдутся $f,g\in\mathcal{H}$ такие, что $L=f\otimes g$. В частности, всегда

$$P^\infty(S) = W(S),$$

где $W(S)$ - наименьшая алгебра, содержащая S, замкнутая в слабой операторной топологии.

Более того, у любого субнормального оператора очень много инвариантных подпространств [66] в том смысле, что

$$T\in B(\mathcal{H}),\ \mathrm{Lat}\ S \subset \mathrm{Lat}\ T \Longrightarrow T \in W\ (S);$$

операторы S, для которых верна последняя импликация, называются рефлексивными. Доказана также рефлексивность сжатий, для которых функциональное исчисление Надя-Фойаша является изометрией [31] и рефлексивность операторов, спектр которых - 1-спектральное множество [47].

Как мы уже упоминали, одно инвариантное подпространство Томсон и Трент нашли без всякой сложной техники. Приведем их рассуждение. Можно считать, что S - циклический субнормальный оператор, т.е. что $S = S_\mu$ для некоторой меры μ. Можно считать также, что $P^2(\mu)\neq L^2(\mu)$. Пусть $g\in L^2(\mu)$, $g\neq 0$ и $g\perp P^2(\mu)$. Тогда множество

$$G = \{a\in\mathbb{C}:\ \hat{\bar{g}d\mu} \overset{\mathrm{def}}{=} \int\frac{\bar{g}d\mu(\zeta)}{\zeta - a} \neq 0\ \}$$

имеет положительную площадь, так как $\partial\ \hat{\mu} = -\pi\mu$ в смысле теории распределений. Фиксируем $a_0\in G$. Для $p\in\mathcal{P}_A$ $\dfrac{p(\cdot)-p(a_0)}{\cdot - a_0} \in \mathcal{P}_A$, и отсюда

$$|p(a_0)| \le |\hat{\bar{g}d\mu}(a_0)|^{-1} \int \frac{|p(\zeta)||g(\zeta)|}{|\zeta - a_0|}\ d\mu \le$$

$$\le |\bar{g}\ \hat{d}\mu(a_0)|^{-1} \left(\int |p(\zeta)|^2\ \frac{d\mu}{|\zeta-a_0|^{2/3}}\right)^{1/2}\left(\int \frac{|g(\zeta)|^2}{|\zeta-a_0|^{4/3}}\right)^{1/2}.$$

Пусть $A = \{a:\int \dfrac{|g|^2}{|\zeta-a|^{4/3}}\ d\mu < \infty\ \}$. Ясно, что m_2 - почти все точки $\mathbb{C}$ лежат в A. Поэтому можно считать, что $a_0\in A$. Для таких точек a_0 получили

$$|p(a_0)| \le C(a_0)\ \|\ p\ \|\ L^2(fd\mu), \tag{28}$$

где $f(\zeta)=|\zeta-a_0|^{-2/3}$. По теореме Хана-Банаха найдется такая функция $\varphi_{a_0}\in P^2(fd\mu)$, что

$$p(a_0) = \int p(\zeta)\varphi_{a_0}(\zeta)\ \frac{\overline{\varphi_{a_0}(\zeta)}}{\varphi_{a_0}(\zeta)}\ fd\mu,\ p\in\mathcal{P}_A. \tag{29}$$

Ясно, что $P^2(fd\mu)\subset P^2(\mu)$. Из (29) сразу следует, что пространство $E = \mathrm{span}_{L^2(\mu)}(\zeta^n(\zeta-a_0)\varphi_{a_0} : n\ge 0)$ нетривиально и инвариантно.

В заключение отметим, что техника С. Брауна совсем недавно нашла новое применение в характеризации замыкания $P^t(\mu)$ полиномов в $L^t(\mu)$ для произвольной меры μ, полученной Томсоном в 1989 г. Точка λ называется точкой ограниченных

значений полиномов[5] для $P^t(\mu)$, если

$$|p(\lambda)| \le C \| p \|_{L^t(\mu)} \tag{30}$$

для любого полинома p. Точка λ_0 называется аналитической точкой ограниченных значений полиномов, если (29) выполнено для всех λ в некоторой окрестности λ_0, с одной и той же константой.

Теорема Томсона. *Пусть μ - положительная мера и $t\in[1,\infty)$. Тогда существует борелевское разбиение $\{\Delta_j\}_{j=0}^{\infty}$ носителя меры μ такое, что*

$$P^t(\mu) = L^t(\mu|\Delta_0) \oplus \bigoplus_{j\ge1} P^t(\mu|\Delta_j),$$

причем $P^t(\mu|\Delta_j)$ не содержит нетривиальных характеристических функций при $j\ge1$. Более того, при $j\ge1$ множество W_j аналитических точек ограниченных значений полиномов для $P^t(\mu|\Delta_j)$ - односвязная область, и

$$\operatorname{supp}(\mu|\Delta_j) \subset \operatorname{clos} W_j.$$

Помимо рассуждений С. Брауна доказательство Томсона использует также аппроксимационную схему Витушкина [6,7]. До появления этого доказательства, была известна похожая характеризация Сарасона *-слабого замыкания $P^\infty(\mu)$ в $L^\infty(\mu)$. Первое утверждение теоремы при $t=2$ было доказано Конвейем [46] с помощью абстрактной теории операторов. Именно им использовался тот факт, что любая C^*-алгебра компактных операторов изоморфна прямой сумме алгебр $\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_n)$ для некоторых гильбертовых пространств $\mathcal{H}_n$. Отметим, что из последнего утверждения теоремы следует так называемая альтернатива Мергеляна - Бреннана [28]: либо $P^t(\mu)=L^t(\mu)$, либо пространство $P^t(\mu)$ обладает точкой ограниченных значений полиномов. Альтернатива Бреннана не поддавалась доказательству в течение долгого времени. Так, в приведенном выше рассуждении Томсона-Трента получается лишь (28), что значительно слабее (30) при $t = 2$.

§ 5. Основные неравенства для самокоммутатора

Если S - субнормальный оператор в $\mathcal{H}$, а $K=\sigma(S)$ - достаточно тонкое множество, скажем, $R(K) = C(K)$, то S - нормальный оператор. В самом деле, если $f\in\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_0=\operatorname{span}\{r(S)f: r\in\mathcal{R}(K)\}$, то $\mathcal{H}_0$ - инвариантное подпространство S, и $S_0=S|\mathcal{H}_0$ - $R(K)$-циклический субнормальный оператор, т.е. $S_0 \cong S_{\nu,K}$, где ν - мера на $\sigma(S_0)\subset K$, $S_{\nu,K}$ - оператор умножения на z в пространстве

$$R^2(\nu) = \operatorname{clos}_{L^2(\nu)} R(K_0),\ K_0 = \operatorname{supp} \nu \subset K.$$

В данном случае $R^2(\nu)=L^2(\nu)$, оператор S_0 нормален, и $\mathcal{H}_0$ приводит S. Легко теперь видеть, что оператор S нормален.

Это рассуждение - одно из многих в ряду тех, которые показывают, что чем дальше гипонормальный оператор от нормального, тем более „густой" спектр он должен

---

[5]По-английски: bounded evaluation point.

иметь.

Уже при возникновении теории гипонормальных операторов было замечено [73], что если оператор $T=X+iY(X=X^*,Y=Y^*)$ гипонормален, но ненормален, то множество $\mathcal{R}=\mathrm{Range}\ R(R^2 \overset{\mathrm{def}}{=} [T^*,T])$ содержится в $\mathcal{H}_a(X)$ - абсолютно непрерывном подпространстве самосопряженного оператора X. Увидеть это очень легко. Пусть

$$X = \int t dE(t),$$

тогда из равенства

$$-i\ E(\Delta)\ \frac{R^2}{2}\ E(\Delta) = \int_\Delta (t-\alpha)dE(t)E(\Delta)YE(\Delta)-E(\Delta)YE(\Delta)\int_\Delta (t-\alpha)dE(t)$$

следует, что

$$\| RE(\Delta)\ R \| = \| E(\Delta)\ R^2E(\Delta) \| \le \| Y \| \cdot | \Delta |. \tag{31}$$

Поэтому $E(e)R=0$ для множества e нулевой линейной меры Лебега, т.е. $\mathcal{R} \subset \mathcal{H}_a(X)$. На самом деле, даже приводящее T подпространство (2), натянутое на $\mathcal{R}$, содержится в $\mathcal{H}_a(X)$, откуда вытекает следующее утверждение.

T - чистый гипонормальный оператор $\Longrightarrow$
операторы X,Y абсолютно непрерывны.

Отсюда следует, и некоторая „густота" спектра T, если сопоставить это утверждение с тем, что

$$\mathrm{proj}_x\ \sigma\ (T) = \sigma(X),\ \mathrm{proj}_y\sigma(T) = \sigma(Y)$$

для любого гипонормального оператора T ([73], с.46-47).

Отметим, что имеется абсолютная оценка для „величины" самокоммутатора произвольного ограниченного гипонормального оператора. Именно не существует оператора $T\in B(\mathcal{H})$ такого, что $[T^*,T]\ge\varepsilon I>0$ (см. теорему 2.10.1 в [73]).

5.1. Неравенство Путнама. Яснее всего принцип „чем больше коммутатор гипонормального оператора T, тем массивнее спектр" проявляется в следующем *неравенстве*:

$$\| [T^*,T]\| \le \frac{m_2(\sigma(T))}{\pi}, \tag{32}$$

открытом Путнамом [72]. До сих пор у этого неравенства нет достаточно простого доказательства. Однако, как заметили Акслер и Шапиро [22], предположение субнормальности сильно упрощает доказательство неравенства Путнама. Во-первых, заметим, что (32) достаточно проверить для рационально циклического оператора - стоит рассмотреть

$$\mathcal{H}_f \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{span}\ \{r(T)f\ :\ r\in\mathcal{R}(\sigma(T)\}$$

и $T_0=T|\mathcal{H}_f$ для фиксированного элемента f из $\mathcal{H}$ и заметить, что $\sigma(T_0) \subset \subset\sigma(T), |((T^*T-TT^*)f,f)| \le \| T_0{}^*T_0-T_0T_0{}^*\|$. Субнормальный оператор S с рационально циклическим вектором унитарно эквивалентен оператору M_z умножения на z в

пространстве $R^2(\sigma(S),\mu)$, где $\operatorname{supp}\mu \subset \sigma(S)$ (см. [46], гл. III). При этом сразу видно, что

$$\| S^*S - S S^*\| = M_z^*M_z - M_zM_z^*\| = \| H_{\bar z} \|^2. \tag{33}$$

Здесь $H_{\bar z}$ – „оператор Ганкеля", действующий по формуле $H_{\bar z} f = (I-P)\ \bar z f$, $f\in R^2(\sigma(S),\mu)$, где P – ортогональный проектор $L^2(\mu)$ на $R^2(\sigma(S),\mu)$. Очевидно, что

$$\| H_{\bar z}\| \le \operatorname{dist}(\bar z,\ R(\sigma(S))). \tag{34}$$

Напомним, что по теореме Гартогса-Розенталя [7], $R(K)=C(K)$ для всякого компакта K нулевой плоской меры. Ее количественная версия – неравенство Александера [17] – утверждает, что

$$\operatorname{dist}(\bar z, R(K)) \le \sqrt{\frac{m_2(K)}{\pi}}\ . \tag{35}$$

(Если правая часть равна нулю, то $z^m\bar z^n\in R(K)$ при $n\ge 1$, так как $R(K)$ – алгебра, и тогда $R(K)=C(K)$ по теореме Стоуна-Вейерштрасса). Теперь неравенство Путнама для $S=M_z|R^2(\sigma(S))$ следует из комбинации (33)-(35).

Следующее изящное замечание принадлежит Гамелину: неравенство (35) следует из неравенства Путнама. В самом деле, пусть ν – мера на K, $\nu\perp R(K)$, $\|\nu\| =1$, такая, что

$$\int_K \bar z\ d\nu = \operatorname{dist}(\bar z, R(K)),$$

а H^∞ – *-слабое замыкание $R(K)$ в $L^\infty(|\nu|)$. Ясно, что найдется функция $h_0\in H^\infty$ такая, что

$$\int (\bar z-h_0)d\nu = \operatorname{dist}(\bar z,R(K)) = \operatorname{dist}(\bar z,H^\infty) = \| \bar z - h_0 \|_\infty.$$

Отсюда ясно, что $z-h_0=\operatorname{dist}(\bar z,R(K))\cdot\bar\chi$, где $|\chi|=1$ $|\nu|$ – п.в. и $\bar\chi d\nu = d|\nu|$. Положим $S_{|\nu|,k} \overset{\text{def}}{=} M_z|R^2(K,|\nu|)$. Тогда $\sigma(S) \subset K$ и

$$\| H_{\bar z} \| = \| S^*S - SS^*\|^{1/2}\le \sqrt{\frac{m_2(K)}{\pi}}\ . \tag{36}$$

В то же время

$$\| H_{\bar z} \| \ge |(H_{\bar z}\ 1,\ \bar\chi)| = |(H_{\bar z}\ 1,\bar\chi\ )| = |((\bar z - h_0,\bar\chi)| =$$

$$= \operatorname{dist}(\bar z,R(K))\ |\ (\bar\chi,\bar\chi\ )| = \operatorname{dist}(\bar z,R(K)). \tag{37}$$

Комбинация (36) и (37) дает (35).

Из сказанного следует, что имеет место равенство

$$\operatorname{dist}(\bar z,R(K)) = \sup_{\nu\in M_1^+(K)} \| S^*_{\nu,k}\ S_{\nu,k} - S_{\nu,k}S^*_{\nu,k} \|. \tag{38}$$

Отметим, что неравенство Александера (35) следует также из леммы Альфорса –

Бёрлинга:

$$\left| \int_K \frac{dm_2(z)}{z-\zeta} \right| \le \sqrt{\pi m_2(K)}, \quad \zeta \in \mathbb{C} \tag{39}$$

для любого компакта $K, K\subset\mathbb{C}$. (Достаточно взять открытую область $\Omega, \Omega \supset K$ и представить функцию $\bar{z}$ формулой Коши - Грина

$$\bar{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{\bar{\zeta}}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{\pi} \int \frac{dm_2(z)}{\zeta - z} .$$

Первый интеграл входит в $R(K)$, а плоский интеграл может быть сколь угодно близок к левой части (39)).

В п. 8 уже с помощью теории гипонормальных операторов будет получено обобщение неравенства (39).

Кроме количественной версии теоремы Гартогса-Розенталя - неравенства (35) - неравенство Путнама имеет несколько неожиданных и интересных следствий для теории функций, которым посвящена работа Ш. Акслера и Дж. Шапиро [22].

Пусть f - аналитическая функция в единичном диске $\mathbb{D}=\{z: |z|<1\}$. Сказать, что площадь образа $f(\mathbb{D})$ с учетом кратности конечна, это то же самое, что сказать, что функция f принадлежит классу Дирихле $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D} = \{g\in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}): \|g\|_{\mathcal{D}}^2 = \int_{\mathbb{D}} |g'|^2 dm_2 < \infty\}.$$

Очевидно, что полунорма $\|g\|_{\mathcal{D}}$ эквивалентна $\left(\sum |\hat{g}(n)|^2 n\right)^{1/2}$, в частности, $\mathcal{D}\subset H^2 \overset{\text{def}}{=} \{g\in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}): g=\sum \hat{g}(n)z^n, \sum |\hat{g}(n)|^2<\infty\}$. Так как при всех $a, |a|<1$, $\|g\|_{\mathcal{D}}=\|g\circ\varphi_a\|_{\mathcal{D}}$, где $\varphi_a \overset{\text{def}}{=} \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$ - дробно-линейное отображение диска $\mathbb{D}$ на себя, то

$$\mathcal{D} \subset \{f\in \mathrm{Hol}\ (\mathbb{D}) : \sup_{a\in\mathbb{D}} \|\varphi \circ \varphi_a - f \circ \varphi_a(0)\|_{H^2} < \infty\}.$$

Последнее множество есть в точности пространство BMOA, которое играет столь важную роль в современной теории функций. Речь будет идти также о пространстве

$$\mathrm{VMOA} = \{f \in \mathrm{BMOA} : \lim_{|a|\to 1} \|f\circ\varphi_a - f\circ\varphi_a(0)\|_{H^2} = 0\},$$

которое является замкнутым подпространством BMOA. Подробнее о BMOA, VMOA, $\mathrm{BMO} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{BMOA} + \overline{\mathrm{BMOA}}$, $\mathrm{VMO} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{VMOA} + \overline{\mathrm{VMOA}}$ см., например, [8, 81]. Пусть теперь просто $m_2(f(\mathbb{D}))<\infty$ (кратность не учитывается). Александер, Тэйлор и Ульман [18] показали, что тогда $f\in H^2$, а несколько позже Стегенгой было доказано, что $f\in\mathrm{BMOA}$. Теорема Стегенги сразу следует из неравенства Путнама [22]. В самом деле, применим неравенство Путнама к оператору умножения $T_{f_r}: H^2 \longrightarrow H^2$, $T_{f_r} h = f_r h$, где $h\in H^2$, $f_2(z)=f(rz)$. Тогда

$$\| T^*_{f_r} T_{f_r} - T_{f_r} T^*_{f_r} \| \le \frac{m_2(\sigma(T_{f_r}))}{\pi}. \tag{40}$$

Очевидно, что $\sigma(T_{f_r}) \subset f_r(\overline{\mathbb{D}}) = (f(r\overline{\mathbb{D}}))$ (на самом деле верно равенство: см. [51], теорема 7.21)). Далее, $\| T^*_{f_r} T_{f_r} - T_{f_r} T^*_{f_r} \| = \| H_{\overline{f}_r} \|^2$, где $H_{\overline{\varphi}}$ - оператор Ганкеля [12], действующий по формуле $H_{\overline{\varphi}} f = (I-P)\overline{\varphi} f$, $f \in H^2$, P - ортопроектор L^2 на H^2. По теореме Нехари [12]

$$\| H_{\overline{f}_r} \| = \inf_{h \in H^\infty} \| \overline{f}_r + h \| = \| \overline{f}_r \|_{BMO} = \| f_r \|_{BMO}. \tag{41}$$

Устремляя r к единице и сравнивая (40) и (41), получаем

$$\| f \|_{BMO} \le \sqrt{\frac{m_2(f(\mathbb{D}))}{\pi}}.$$

Теорема о представлении любой C^*-алгебры как C^*-подалгебры алгебры операторов в гильбертовом пространстве (см., например, [9], п. 2.6) дает возможность сформулировать C^*-версию неравенства Путнама:

Пусть B - C^*-алгебра. Если $T \in B$ и $T^*T - TT^*$ - неотрицательный элемент B, то

$$\| [T^*, T] \| \le \frac{m_2(\sigma(T))}{\pi}.$$

Пусть $f \in H^\infty$. Следуя работе Акслера-Шапиро [22], применим этот вариант неравенства Путнама к следующей ситуации. Пусть $\mathcal{J}$ - C^*-алгебра, порожденная $\{T_f : f \in L^\infty\}$. Пусть J_λ - двусторонний идеал $\mathcal{J}$, порожденный $\{T_f : f \in C,\ f(\lambda) = 0\}$. Каноническое отображение $\mathcal{J}$ в $\mathcal{J}/J_\lambda$ обозначается символом q_λ. Для $f \in L^\infty$, $q_\lambda(T_f)$ называют локализацией оператора Теплица (подробнее о свойствах q_λ см. [51, 52]). Пусть $\mathfrak{S}_\infty$ - множество компактных операторов в пространстве H^2. Дуглас ([51], теорема 7.49) показал, что отображение $\mathcal{J}/\mathfrak{S}_\infty$ в $\oplus\{\mathcal{J}/J_\lambda : \lambda \in \partial\mathbb{D}\}$, сопоставляющее элементу $T + \mathfrak{S}_\infty$ прямую сумму $\oplus\{q_\lambda(T) : \lambda \in \partial\mathbb{D}\}$, инъективно. Так как каждый инъективный гомоморфизм C^*-алгебр является изометрией (см. [9], п. 1.8), то

$$\| T_f^* T_f - T_f T_f^* \|_e = \sup \{ \| q_\lambda(T_f)^* q_\lambda(T_f) - q_\lambda(T_f)\ q_\lambda(T_f^*) \| : \lambda \in \partial\mathbb{D} \}, \tag{42}$$

здесь $\|T\|_e = \mathrm{dist}\ (T, \mathfrak{S}_\infty)$ - существенная норма оператора T. Пусть теперь $f \in H^\infty$ и $\mathrm{cl}\ (f;\lambda)$ обозначает предельное множество функции f в точке $\lambda, \lambda \in \partial\mathbb{D}$. Легко видеть, что

$$\sigma(q_\lambda(T_f)) \subset \mathrm{cl}(f;\lambda). \tag{43}$$

В то же время $\| T_f^* T_f - T_f T_f^* \|_e^{1/2} = \| H_f \|_e = \mathrm{dist}_{BMO}(\overline{f}, VMO) = \mathrm{dist}_{L^\infty}(\overline{f}, H^\infty + C)$. Последние два равенства хорошо известны - см., например, [8, 77]. Применяя к C^*-алгебре $\mathcal{J}/J_\lambda$ и элементу $q_\lambda(T_f)$ неравенство Путнама и учитывая (42), (43), получаем $f \in H^\infty \Rightarrow$

$$\mathrm{dist}_{L^\infty}(\overline{f}, H^\infty + C) = \mathrm{dist}_{BMO}(\overline{f}, VMO) \le \sup_{\lambda \in \partial\mathbb{D}} \sqrt{\frac{m_2(\mathrm{cl}(f;\lambda))}{\pi}}. \tag{44}$$

В частности, имеет место

С л е д с т в и е [22]. *Если* $f\in H^\infty$ *и множество* $\mathrm{cl}(f;\lambda)$ *имеет нулевую площадь для всех* $\lambda\in\partial\mathbb{D}$, *то* $f\in\mathrm{VMO}$ (*и, значит,* $f\in QC_A$ *– см. определение в* [8], *гл.* IX).

Сделаем несколько замечаний, чтобы завершить обсуждение неравенства (44) и следствия.

1) Из работы Сарасона [76] можно извлечь такую слабую версию следствия:

$f\in H^\infty$ и $\mathrm{cl}(f;\lambda)$ лежит на прямой (зависящей от λ),

$\Rightarrow f\in\mathrm{VMO}$.

В самом деле, фиксируем $\lambda\in\partial\mathbb{D}$ и считаем, что $\mathrm{cl}\ (f;\lambda)$ лежит на $\mathbb{R}$. Пусть M – пространство максимальных идеалов H^∞, M_λ – слой M над λ, $t\in M_\lambda$, а μ_t – представляющая мера гомоморфизма t с носителем в границе Шилова. Тогда $\int(\hat f(s)-f(t))^2d\mu_t=0$ и, значит, $\hat f(s)=\hat f(t)$ для μ_t-п.в. s. Отсюда следует, что $\hat f=\mathrm{const}$ на каждом множестве – носителе (см. [77]). Тем самым $f\in QC$ ([8], гл. IX).

2) Неравенство (44) может быть усилено до

$$f\in H^\infty \Rightarrow \mathrm{dist}_{L^\infty}(\bar f, H^\infty+C)\le \sup_{\lambda\in\partial\mathbb{D}}\mathrm{dist}\ (\bar z, R(\mathrm{cl}\ (f;\lambda))), \tag{45}$$

если воспользоваться результатом Сарасона ([77], § 5)

$$\mathrm{dist}\ (\bar f, H^\infty+C) = \sup_{\lambda\in\partial\mathbb{D}}\mathrm{dist}\ (\hat f|M_\lambda, H^\infty|M_\lambda)$$

и тем, что $\hat f(M_\lambda)=\mathrm{cl}\ (f;\lambda)$ для $f\in H^\infty$.

Неравенство (45) получено Кармона и Куфи [42]. То, что оно усиливает (44), видно из количественной версии теоремы Гартогса-Розенталя (35).

5.2. Неравенство Бергера-Шо [24] **– второе важнейшее неравенство теории гипонормальных операторов.** Его формулировка: *если* $[T^*,T]\ge 0$, *то*

$$\|[T^*,T]\|_{\mathfrak{S}_1}\le\frac{\mu_r(T)}{\pi}\,m_2(\sigma(T)). \tag{46}$$

Здесь $\mu_r(T)$ – *рациональная кратность спектра* оператора T, т.е. наименьшая мощность множества $U\subset\mathcal{H}$ такого, что

$$\mathcal{H}=\mathrm{span}\ \{r(T)U = r\in R\ (\sigma(T))\}.$$

Тем самым любой конечнократный гипонормальный оператор (т.е. такой, для которого $\mu_r(T)<\infty$) почти нормален.

Войкулеску [81] показал, что неравенство (46) справедливо не только для гипонормальных операторов, но и для всех T таких, что $[T^*,T]\in\mathfrak{S}_1$. Его рассуждения опираются на существование „почти треугольных" разложений оператора с конечной рациональной кратностью спектра.

§ 6. Почти нормальные операторы. Принципальная функция, мозаика

6.1. Принципальная функция. Напомним формулу следов М. Г. Крейна, относящуюся к одномерной теории возмущений. Пусть A, K - самосопряженные операторы, $K\in\mathfrak{S}_1$. Тогда существует единственная функция $\varphi=\varphi_{A\to A+K}\in L^1(\mathbb{R})$ такая, что

$$\operatorname{tr}\,(p(A+K) - p(A)) = \int_{\mathbb{R}} p'(y)\varphi(y)dy \tag{47}$$

для всех $p\in C^2$. При этом $\operatorname{supp}\varphi\subset[-M,M]$, $M \overset{\text{def}}{=} \|A\|+\|K\|$ $\|\varphi\|_1\le\|K\|_1$ (см. [10]). Функция $\varphi_{A\to A+K}$ называется *функцией спектрального сдвига, отвечающей возмущению* $A\to A+K$.

Аналог этой формулы имеет место для пары почти коммутирующих операторов. Пара X, Y самосопряженных операторов называется *почти коммутирующей,* если $[X,Y]\in\mathfrak{S}_1$. В формуле, выражающей $\operatorname{tr}[p(X,Y),q(X,Y)]$, где p и q - полиномы двух переменных, участвует двумерный аналог функции спектрального сдвига - *принципальная функция* $g(\cdot,\cdot)\in L^1(\mathbb{R}^2)$ *пары* X, Y. Поясним связь (одну из возможных) функции спектрального сдвига с принципальной функцией. Здесь мы будем пользоваться обозначениями п. 1.3.

Для почти коммутирующих операторов X, Y существуют символы $S_X^{\pm}(Y)$. Будем считать, что оператор X абсолютно непрерывен, хотя принципальная функция может быть определена и в общем случае. Итак, считаем, что

$$X = \int\oplus\, t dE_t,\quad \mathcal{H} = \int\oplus\, \mathcal{H}(t)dt;$$

это так, в частности, для почти нормального чистого гипонормального оператора $T=X+iY$. Пусть $C \overset{\text{def}}{=} i[X,Y]=\sum s_k\varphi_k\otimes\varphi_k$, $\varphi_k=\int\oplus\varphi_k(t)dt$. Положим $C(\lambda,\mu) = \sum s_k(\cdot,\varphi_k(\mu))\varphi_k(\lambda)$, так что $C=\iint\oplus\, C(\lambda,\mu)d\mu d\lambda$. Формулы (7), (15) дают

$$S_X^+(Y) - S_X^-(Y) = 2\pi\int\oplus\, C(\lambda,\lambda)d\lambda.$$

В каждом $\mathcal{H}(t)$ имеется ортонормированный базис $e_n(t)$, $e_n(t)\in\mathcal{H}$. Для почти всех λ $S_X^+(Y^n)(\lambda)-S_X^-(Y^n)(\lambda)$ - ядерный оператор (см. п. 1.3), и

$$\int \operatorname{tr}\,(S_X^+(Y)-S_X^-(Y))(\lambda)d\lambda = 2\pi\int\sum_n (C(\lambda,\lambda)e_n(\lambda),e_n(\lambda))_\lambda d\lambda =$$

$$= 2\pi\int\sum_n\sum_k s_k|(\varphi_k(\lambda),e_n(\lambda))_\lambda|^2 d\lambda = 2\pi\int\sum_k s_k\|\varphi_k(\lambda)\|_\lambda^2 =$$

$$= 2\pi\sum_k s_k\|\varphi_k\|^2 = 2\pi\sum_k s_k = 2\pi\operatorname{tr} C.$$

Заменим теперь Y на X^mY^n. Пара X, X^mY^n опять почти коммутирует. Предыдущее равенство записывается так:

$$\operatorname{tr}\, i\,[X,X^mY^n] = \frac{1}{2\pi}\int \operatorname{tr}\,(S_X^+(X^mY^n)-S_X^-(X^mY^n))(\lambda)d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int \lambda^m \operatorname{tr} ((S_X^+(Y))^n - (S_X^-(Y))^n)(\lambda) d\lambda. \tag{48}$$

Рассмотрим задачу теории возмущений

$$S_X^-(Y)(x) \longrightarrow S_X^+(Y)(x) \tag{49}$$

с ядерным возмущением (при п. в. x). Пусть $g(x,\cdot)$ - функция спектрального сдвига этой задачи. Тогда

$$\operatorname{tr}(S_X^+(Y)^n(x) - S_X^-(Y)^n(x)) = \int ny^{n-1} g(x,y) dy. \tag{50}$$

Сопоставляя (48) и (50), получаем, что

$$\operatorname{tr} i[X, q(X,Y)] = \int \frac{\partial q(x,y)}{\partial y} g(x,y) dx dy \tag{51}$$

(мы не проверяем измеримость функции g; см. [44]). Так как X и Y не коммутируют, выражение $q(X,Y)$ определено неоднозначно. Однако легко показать, что след в левой части (51) не зависит от расстановки сомножителей в многочлене q.

Определим на многочленах двух переменных билинейную форму

$$(p,q) = \operatorname{tr} i\ [p(X,Y),\ q(X,Y)].$$

Она, очевидно, обладает свойством

$$(r \circ p,\ s \circ p) = 0,$$

если r, s - произвольные полиномы одной переменной. Такие формы называют *исчезающими*.

Валлах показал, что исчезающие билинейные формы имеют вид

$$(p,q) = l(J(p,q)), \quad J(p,q) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y},$$

где l - линейная форма. Этот чисто алгебраический результат можно найти в [44], с. 93-94. Из него следует, что исчезающая форма определена значениями на парах x, q. Значит, из (51) следует, что

$$\operatorname{tr} i[p(X,Y),\ q(X,Y)] = \frac{1}{2\pi} \iint \left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial x} \right) g dm_2. \tag{52}$$

Хелтон и Хоу [56] доказали (52) в ослабленном виде с заменой $g dm_2$ на некоторую меру на плоскости. Сразу после Хелтона и Хоу Пинкус обнаружил формулу (52).

В [57] Хелтон и Хоу обобщили формулу (52) на более общую ситуацию операторов из так называемых *криптоинтегральных алгебр*. Пусть $\mathfrak{A}$ - алгебра операторов, $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{A}_1$ - идеал в $\mathfrak{A}$, порожденный коммутаторами $[X,Y]$, где $X, Y \in \mathfrak{A}$; $\mathfrak{A}_m$ - идеал, порожденный коммутаторами $[X,Y]$, $X \in \mathfrak{A}_k$, $Y \in \mathfrak{A}_{m-k-1}$. Определим антисимметрическую сумму $[A_1, \ldots, A_m]$ операторов из $\mathfrak{A}$ равенством

$$[A_1,\dots,A_m] = \sum_{\tau\in S_m} \varepsilon(\tau)\ A_{\tau(1)}\dots A_{\tau(m)},$$

здесь S_m - группа перестановок и $\varepsilon(\tau)=\pm1$ - четность перестановки $\tau\in S_m$. Алгебра $\mathfrak{A}$ называется криптоинтегральной размерности n, если $\mathfrak{A}_n\subset\mathfrak{S}_1$ и $[A_1,\dots,A_{2n}]\in\mathfrak{S}_1$ для любых $A_1,\dots,A_{2n}\in\mathfrak{A}$. Для таких алгебр Хелтон и Хоу получили следующую формулу следов:

$$\operatorname{tr}\ [p_1(X_1\dots,X_k),\dots,p_m(X_1,\dots,X_k)] = \mathfrak{I}(p_1,\dots,p_m). \tag{53}$$

Здесь $X_1,\dots,X_k\in\mathfrak{A}$, $p_1,\dots,p_m$ - полиномы, $m=2n$ и $\mathfrak{I}$ - определяемый единственным образом непрерывный m-полилинейный функционал на $C^\infty(\mathbb{R}^k)$, носитель которого содержится в совместном существенном спектре операторов $X_1,\dots,X_k$. Более того, функционал $\mathfrak{I}$ имеет вид

$$\mathfrak{I}(p_1,\dots,p_m) = l(dp_1\wedge dp_2\wedge\dots\wedge dp_m),$$

где l - линейный функционал на внешних дифференциальных формах (для $n=1$ и $n=2$ это доказано в [57]; общий случай содержится в [41]). При $m>2n$ след в левой части (53) тождественно равен нулю.

Примерами криптоинтегральных алгебр служат алгебра псевдодифференциальных операторов порядка ≤0 на римановом многообразии размерности n и операторы Теплица на сфере S^{2n-1}. Для этих алгебр функционал $\mathfrak{I}$ может быть выписан явно. Другие примеры имеются в [59]. Развитию этого направления посвящены работы [38, 59, 41] и др.

Вернемся к обсуждению формулы (52). *Принципальной функцией гипонормального оператора* $T=X+iY$ называется принципальная функция пары X,Y. В этом случае возмущение (49) положительно при п.в. x, и поэтому функция g неотрицательна. Для чистого гипонормального оператора T носитель принципальной функции совпадает со спектром $\sigma(T)$. Перечислим некоторые свойства принципальной функции, которые можно найти в [44], гл. II; [83], гл. 7; [64], гл. X. Ниже $T=X+iY$ - почти нормальный оператор, т.е. $[X,Y]\in\mathfrak{S}_1$.

1) $|g(\lambda,\mu)| \le m_X(\lambda) \overset{\text{def}}{=} \dim\mathcal{H}(\lambda)$.

2) Если функция m_X п.в. конечна, то g принимает только целые значения.

3) $|g(\lambda,\mu)| \le \operatorname{Rank}\ [X,Y]$.

4) $\sigma(T) \supset \operatorname{supp}\ (g\,dm_2)$.

5) $\dfrac{1}{2\pi\sqrt{\lambda}} \displaystyle\int_{|\zeta-z|=\sqrt{\lambda}} g(\zeta)|d\zeta| = \Delta_z(\lambda)$,

где $\Delta_z(\lambda)$ - функция спектрального сдвига задачи $(T^*-\bar z)(T-z)\longrightarrow(T-z)(T^*-\bar z)$.

6) Если $\zeta\notin\sigma_{ess}(T)$, то $-g(\zeta)$ совпадает с индексом Фредгольма $\operatorname{ind}\ (T-\zeta)$.

7) Для полинома $f=f(z,\bar z)$

$$g_{f(T)}(z) = \sum_{\zeta:f(\zeta)=z} \operatorname{sgn}\ (J(\operatorname{Re} f,\operatorname{Im} f))(\zeta)g_T(\zeta),$$

в частности, если $f=f(z)$, то

$$g_{f(T)}(z) = \sum_{\zeta: f(\zeta)=z} g_T(\zeta). \tag{54}$$

8) Если T - чистый гипонормальный, Rank $[T^*,T]=1$, то $\sigma_{ess}(T)=\{z\in\mathbb{C}$: в окрестности z функция g не равна 1 и 0 на множествах положительной меры $\}$.

9) Если T - чистый гипонормальный оператор, Rank $[T^*,T]=1$, то число z - собственное число оператора T^* тогда и только тогда, когда

$$\int \frac{1-g(\zeta)}{|\zeta-z|^2}\, dm_2(\zeta) < \infty .$$

10) $g(\zeta)=-\partial \operatorname{tr}(RC(\zeta))$ (обозначения см. в п. 2).

11) Если T - субнормальный, то функция g принимает только целые значения.

12) Если T - гипонормальный, то

$$g(\zeta) \le \mu_r(T),$$

где $\mu_2(T)$ - рациональная кратность.

Последняя оценка называется оценкой Бергера [23, 64]. Из нее (точнее, ее аналога) следует существование нетривиальных инвариантных подпространств у оператора T^n при достаточно большом n. Действительно, из (54) легко видеть, что $g \not\equiv 0 \Longrightarrow \sup \operatorname{ess} g_{T^n}>1$ при некотором n и, значит, оператор T^n не имеет циклического вектора (формально это не следует из свойства 12), так как оператор T^n не обязательно гипонормален, однако обоснование имеется в [64], гл. X, § 4).

Доказать 11) очень не просто - некоторое время это утверждение было гипотезой. Оно доказано Кэри и Пинкусом в [40] (см. также [35], с. 138-143; [64], гл. IX). Заметим, что целозначность функции g не характеризует субнормальные операторы - см. свойство 2).

Имеется полностью алгебраический - с привлечением понятия циклических гомологий - путь для определения принципальной функции g почти нормального оператора [35]. При этом g определяется как поток - линейный функционал на гладких 1-формах на плоскости.

Свойство 6) наталкивает на мысль о том, что $g(\zeta)$ обобщает понятие индекса, несмотря на то что индекс Фредгольма всегда целочислен. Для гипонормального оператора с самокоммутатором конечного ранга оказывается возможным ([35], с. 145-148) дать такое определение индекса, что

$$g(\zeta) = -\operatorname{ind}(\operatorname{Range}(T^*-\bar{\zeta}), \operatorname{Range}(T-\zeta)),$$

при этом последнее выражение есть мера плотности Range $(T-\zeta)$ в Range $(T^*-\zeta)$ (Range $(T-\zeta) \subset$ Range $(T^*-\bar{\zeta})$).

Ясно, что принципальная функция почти нормального оператора T инвариантна относительно $\mathfrak{S}_1$-возмущений. Можно попытаться узнать (исходя из того, что $-g(\zeta)$ есть «индекс" T), что происходит при возмущении T компактным оператором K при том условии, что T и $T+K$ почти нормальны. В случае $m_2(\sigma_{ess}(T))>0$ можно найти $K\in\mathfrak{S}_{2+\varepsilon}$ так, что $g_T \ne g_{T+K}$. Что касается $\mathfrak{S}_2$-возмущений, то Войкулеску [80] показал, что

$g_T = g_{T+K}$, если $\mu_r(T)<\infty$, и что для субнормального оператора $g_T=g_{T+K}$ всегда. Войкулеску при этом использовал свой результат, что любой нормальный оператор может быть диагонализован с точностью до оператора класса $\mathfrak{S}_2$. В [35] есть более простое доказательство.

Если задано модельное представление (1) чистого гипонормального оператора с одномерным самокоммутатором, в котором a,b - ограниченные функции на прямой с компактными носителями, $b^*=\bar{b}$, то принципальная функция оператора T - это характеристическая функция его спектра, определяемого из (16). Вычисление g по модели T в более сложных случаях см. [44], гл. V, § 4.

Проще всего было бы определить принципальную функцию (или меру Хелтона-Хоу) из соображений двойственности. Имеется в виду следующее. Если бы для всех полиномов p имела место оценка

$$\| [p(X,Y),Y] \|_{\mathfrak{S}_1} \le C \left\| \frac{\partial p}{\partial x} \right\| \tag{55}$$

с $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$, то функционал L, сопоставляющий полиному q число $\operatorname{tr}[p(X,Y),Y]$ (здесь полином выбран так, чтобы $\frac{\partial p}{\partial x} = q$; определение L, очевидно, корректно) будет представляться мерой

$$\operatorname{tr}[p(X,Y),Y] = L(q) = \int \frac{\partial p}{\partial x}\, d\mu.$$

Отсюда (используя свойство исчезновения формы) получили бы формулу следов (52).

К сожалению, неравенство (55) с $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$ неверно. Это легко увидеть, если в пространстве $L^2(I)$, $I \subset \mathbb{R}$, рассмотреть операторы

$$X\varphi(t) = t\varphi(t),\ \varphi\in L^2(I),$$

$$Y\varphi(t) = v.p. \int_I \frac{\varphi(t)}{x-t}\, dt,\ \varphi\in L^2(I).$$

Из оценки (55) с $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$ следовало бы, что ядерным является любой оператор $[f(X),Y]$ с $f\in C^1(T)$. Однако „ганкелев" оператор

$$[f(X),Y] = v.p. \int \frac{f(\lambda)-f(\mu)}{\lambda-\mu} \cdot d\mu$$

является ядерным [13] тогда и только тогда, когда $f\in B_1^1(I)$. Напомним, что класс Бесова $B_1^1(I)$ состоит из функций f, удовлетворяющих условию

$$\iint_{I\,I} \left| f(x+t)+f(x-t)-2f(x) \right|\, dx\, \frac{dt}{t^2} < \infty\ ,$$

и что $C^1(I) \not\subseteq B_1^1$.

Ситуация вполне аналогична той, которая имеет место в случае классической теории возмущений. Ю. Б. Фарфоровская [15] показала, что оценка $\|p(A+K)-p(A)\|_{\mathfrak{S}_1} \le C\left\|\frac{\partial p}{\partial x}\right\|_\infty$ неверна, вообще говоря, для самосопряженных $A,K,K\in\mathfrak{S}_1$. Это означает, что

функцию спектрального сдвига задачи $A \longrightarrow A+K$ просто по двойственности не определить.

Возникает естественный вопрос: для какой нормы в (55) эта оценка имеет место? Чтобы сформулировать ответ, привлечем еще один класс Бесова - $B^1_{\infty 1}(I)$ - который состоит из функций f, удовлетворяющих условию

$$\int_I \sup_{x\in I} \; | f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|dx \; \frac{dt}{t^2} < \infty .$$

Если оператор $I=X+iY, \sigma(X)\subset I, \sigma(Y)\subset J$, гипонормален, то подходящим оказывается, например, такое пространство

$$\mathcal{F} = L^\infty(J) \otimes_\pi B^1_{\infty 1}(I),$$

т. е. замыкание множества функций вида

$$f(y,x) = \sum_{j\le N} \varphi_j(y)\, \varphi_j(x), \qquad \varphi_j\in L^\infty(J), \; \psi_j\in B^1_{\infty 1}(I)$$

по норме

$$\| f \| = \inf \left\{ \sum_{j\le N} \| \varphi_j \|_\infty \| \psi_j \|_{B^1_{\infty 1}} : f = \sum_{j\le N} \varphi_j\psi_j \right\} .$$

Это можно доказать, используя формулу М. Ш. Бирмана, М. З. Соломяка [4]

$$\varphi(X)Y - Y\varphi(X) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(s)-\varphi(t)}{s-t} \; dE_X(s)(XY-YX)dE_X(t), \tag{56}$$

которая справедлива для тех функций φ, для которых преобразование

$$T \longrightarrow \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(s)-\varphi(t)}{s-t} \; dE_X(s)\; TdE_X(t)$$

непрерывно в $\mathfrak{S}_1$.

Заметим, что из оценки (55) с $\|\cdot\|=\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ следует, что частный случай формулы следов (51)

$$\mathrm{tr}\; [p(X,Y),\; Y] = \frac{1}{2\pi} \int J\; (p,y)\; g\; dm_2$$

справедлив для $p\in\mathcal{F}$; здесь оператор $p(X,Y)$ определен естественным образом.

Общую формулу следов (52) также можно распространить на более широкий класс функций. Прежде всего здесь надо определить функцию от двух некоммутирующих операторов. Пусть Φ - некоторый класс функций двух вещественных переменных. Мы хотим построить такое функциональное исчисление

$$\varphi \longmapsto \varphi\; (X,Y), \qquad \varphi\in\Phi,$$

которое удовлетворяло бы следующим условиям:

1) если $\varphi(s,t)=f(s)$, то $\varphi(X,Y)=f(X)$,
если $\varphi(s,t)=g(t)$, то $\varphi(X,Y)=g(Y)$;

2) исчисление линейно и мультипликативно по модулю $\mathfrak{S}_1$;

3) $(\varphi(X,Y))^* - \bar{\varphi}(X,Y) \in \mathfrak{S}_1$, $\varphi \in \Phi$;

4) при $\varphi,\psi\in\Phi$ имеет место формула следов (52):

$$\operatorname{tr}\,[\varphi(X,Y),\ \varphi(X,Y)] = \int J\ (\varphi,\psi)\ g dm_2.$$

Оказывается, что для этого подходит класс функций Φ, допускающих следующее представление:

$$\varphi(s,t) = \sum_{n\geq 0} f_n(t) g_n(s),$$

где

$$\sum_n \left(\| f_n\|_{L^\infty} \| g_n\|_{B^1_{\infty 1}} + \| f_n\|_{B^1_{\infty 1}} \| g_n\|_{L^\infty}\right) < \infty .$$

6.2. Мозаика. Если принципальная функция возникает из семейства функций спектрального сдвига, то мозаика возникает из их операторного аналога, так называемых *фазовых операторов.* Она является полным унитарным инвариантом чистого гипонормального оператора.

Как известно [10], [64], функцию спектрального сдвига можно определять из следующей формулы для детерминантов:

$$\det\,(I + K(A-z)^{-1}) = \exp \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi_{A\longrightarrow A+K}(t)}{t - z}\ dt. \tag{57}$$

Р. Кэри [34] для случая неотрицательного ядерного возмущения

$$A \longrightarrow A + KK^*, \quad A\in B(H),\ K\in B(\mathfrak{X},H),$$

рассмотрел операторнозначную функцию

$$\Phi(z) = \log\,(I+K^*(A-z)^{-1}K), \quad z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}.$$

Нетрудно видеть, что оператор под знаком логарифма обратим и его спектр содержится в замкнутой верхней полуплоскости. По теореме Като [60] $0\leq \operatorname{Im}\ \Phi(z)\leq \pi I$ и (это доказывается рассмотрением функций $\varphi_\xi(z)=\langle\Phi(z)\xi,\xi\rangle$), тем самым,

$$I + K^*(A-z)^{-1}K = \exp \int \frac{B(t)}{t-z}\ dt, \tag{58}$$

где $B\in L^\infty(\mathbb{R},B(\mathfrak{X}))$, $0\leq B\leq I$. Операторнозначная функция B называется фазовым оператором.

Верно и обратное: *для любой оператор-функции* $B\in L^\infty(\mathbb{R},B(\mathfrak{X}))$ *с компактным носителем существуют операторы* K *и* A *такие, что выполнено* (58) (при этом A действует во вспомогательном гильбертовом пространстве H, K - оператор из $\mathfrak{X}$ в H).

Пусть $T=X+iY$ $(X=X^*, Y=Y^*)$ - чистый гипонормальный оператор, $R^2=[T^*,T]=2i[X,Y]$,

$\mathfrak{X}$=clos Range R. Операторнозначная функция

$$E(z,w) = I + \frac{1}{2i} R(X-z)^{-1}(Y-w)^{-1}R, \quad z,w\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R},$$

со значениями в $L(\mathfrak{X})$ называется определяющей функцией. Она является полным унитарным инвариантом чистого гипонормального оператора. Простое вычисление дает

$$E(z,\bar{w})^{-1}\, E(z,w) = I + K(w)^*(X-z)^{-1}K(w),$$

где $K(w) \overset{\text{def}}{=} (\operatorname{Im} w)^{1/2}(Y-w)^{-1}R$. Используя (58), получаем операторнозначную функцию B_w такую, что

$$E(z,\bar{w})^{-1}E(z,w) = \exp\int \frac{B_w(t)}{t-z}\, dt.$$

Введем обозначение $B_\varepsilon(t,\lambda)=B_{\lambda+i\varepsilon}(t)$, где $t,\lambda \in \mathbb{R}$, $\varepsilon>0$. Можно заметить, что при всяком положительном ε $B_\varepsilon\in L^\infty(\mathbb{R}^2,B(\mathfrak{X}))=(L^1(\mathbb{R}^2,\mathfrak{S}_1))^*$(надо проверять *-слабую измеримость). Семейство $\{B_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ относительно компактно.

Мозаикой $B(\cdot,\cdot)$ оператора T называется любой *-слабый предел семейства $\{B_\varepsilon\}$. Для оператора T с самокоммутатором конечного ранга мозаику можно отождествить с измеримой матрицей-функцией.

Если T - чистый гипонормальный оператор и $[T^*,T]\in\mathfrak{S}_1$, то имеет место формула

$$\log\det E(z,w) = \operatorname{tr}\log E(z,w) = \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\operatorname{tr}B(t,\lambda)}{(t-z)(\lambda-w)}\, dt d\lambda. \tag{59}$$

Так как очевидно, что $\det E(z,w) = \det (X-z)(Y-z)(X-z)^{-1}(Y-w)^{-1}$, то естественна попытка сосчитать в терминах следов $\operatorname{tr}B(t,\lambda)$ определитель $\det e^p e^q e^{-p} e^{-q}$, где p и q - полиномы от X,Y. Получаем

$$\det e^p e^q e^{-p} e^{-q} = \exp\frac{1}{2\pi i}\int J(p,q)\ \operatorname{tr} B(t,\lambda)dtd\lambda. \tag{60}$$

Хорошо известно, что если A,B - операторы с ядерным коммутатором, то $e^A e^B e^{-A} e^{-B} - I\in\mathfrak{S}_1$ и

$$\det e^A e^B e^{-A} e^{-B} = \exp\operatorname{tr}[A,B].$$

Отсюда и из (60) получаем

$$\operatorname{tr}[p(X,Y),\ q(X,Y)] = \frac{1}{2\pi i}\int J(p,q)\ \operatorname{tr} B(t,\lambda)dtd\lambda.$$

Сравнение этой формулы с (52) показывает, что *след мозаики есть принципальная функция*:

$$\operatorname{tr} B(t,\lambda) = g(t,\lambda). \tag{61}$$

Отметим также свойство

$$\int_{\mathbb{R}^2} B(t,\lambda)dtd\lambda = \pi\ [T^*,T].$$

Наиболее прямая связь мозаики с гипонормальным оператором может быть прослежена с помощью сингулярной интегральной модели. Оказывается (Кэри, Пинкус [36,37]), для чистого гипонормального оператора существуют пределы $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}$ $E(z,\lambda-i\varepsilon)^{-1}E(z,\lambda+i\varepsilon)$ в норме $\mathfrak{S}_2$ для п.в. $\lambda\in\mathbb{R}$ и всех $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. При этом

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} E(z,\lambda-i\varepsilon)^{-1}E(z,\lambda+i\varepsilon) = I + \pi\frac{d}{d\lambda} RF_\lambda S_Y^+(X-z)^{-1}R, \tag{62}$$

где dF - спектральная мера Y. Основным техническим моментом является следующее утверждение из работы [5] М.Ш.Бирмана-С.Б.Энтиной:

если $\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2\in\mathfrak{S}_2$, то пределы

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \mathcal{D}_1(Y-\lambda\pm i\varepsilon)^{-1}\mathcal{D}_2$$

существуют для п.в. $\lambda\in\mathbb{R}$ в норме $\mathfrak{S}_2$ и их разность равна $2\pi i\frac{d}{d\lambda}\mathcal{D}_1F_\lambda\mathcal{D}_2$. Итак,

$$E(z,\lambda-i0)^{-1}E(z,\lambda+i0) = \exp\int\frac{B(t,\lambda)}{t-z}\,dt. \tag{63}$$

Отсюда следует, что для почти нормального гипонормального оператора мозаика единственна.

Трудная теорема Кэри и Пинкуса [39] показывает, что мозаика любого субнормального оператора проекторнозначна. Для произвольных гипонормальных операторов ситуация резко меняется: *любая измеримая оператор-функция* $B:\mathbb{C}\to\mathfrak{S}_1$ *с компактным носителем является мозаикой некоторого гипонормального оператора с с ядерным самокоммутатором.* Построение оператора по его мозаике будет намечено в следующем пункте.

6.3. Связь мозаики с сингулярной интегральной моделью. Пусть гипонормальный оператор $T=X+iY$ задан своей моделью, получаемой из диагонализации оператора Y:

$$H = \int_{\sigma(Y)} \oplus\mathcal{H}(\lambda)d\lambda,\ \ Y\xi(\lambda) = \lambda\xi(\lambda),$$

$$(X\xi)(\lambda) = \alpha(\lambda)\xi(\lambda) + \frac{1}{\pi i}\beta^*(\lambda)\ v.p.\int\beta(s)\xi(s)/(s-\lambda)ds. \tag{64}$$

При подходящем отождествлении пространства clos $(T^*T-TT^*)H$ с пространством E (содержащим пространства $\mathcal{H}(\lambda)$; см. п.0) вычисление правой части (62) приводит к формуле

$$E(z,\lambda-i0)^{-1}E(z,\lambda+i0) = I+2\beta(\lambda)(\alpha(\lambda)-\beta^*(\lambda)\beta(\lambda)-z)^{-1}\beta^*(\lambda) \tag{65}$$

(см. [64], гл.9, § 4). Имеет место

Т е о р е м а (Кэри, Пинкус). *Пусть* $\mathcal{X}$ *- гильбертово пространство,* $B:\mathbb{C}\to\mathfrak{S}_1(\mathcal{X})$ *- измеримая функция с компактным носителем такая, что* $0\le B\le I$. *Тогда существуют гильбертово пространство* H, *чистый гипонормальный оператор* $T\in B(H)$

такой, что $[T^*,T]\in\mathfrak{S}_1$, *и унитарный оператор*

$$U = \operatorname{clos}\,[T^*,T]H \longrightarrow \operatorname{clos}\operatorname{Range}\int B(t,\lambda)dtd\lambda$$

такой, что $B_T = U^*BU$.

Для доказательства воспользуемся результатом Кэри и получим представление

$$\exp\int \frac{B(t,\lambda)}{t-z}\,dt = I + K(\lambda)^*(A(\lambda)-z)^{-1}K(\lambda) \tag{66}$$

для каждого $\lambda\in\mathbb{R}$; здесь $K(\lambda)\in B(\mathfrak{X},\mathcal{H}(\lambda))$, $A(\lambda)\in B(\mathcal{H}(\lambda))$, $A(\lambda)=A(\lambda)^*$; $\mathcal{H}(\lambda)$ – вспомогательные гильбертовы пространства. Сравнение формул (66), (65) и (63) показывает, что достаточно взять оператор в виде (64), где

$$\alpha(\lambda) = A(\lambda) + \beta^*(\lambda)\beta(\lambda),\quad \beta(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,K^*(\lambda)|\mathcal{H}(\lambda)$$

(см. [64], гл. IX, § 4).

§ 7. Обобщения понятия гипонормальности

Некоторые операторы, хотя не являются гипонормальными, обладают многими их свойствами. Так, параллельно теории гипонормальных операторов развивается теория семигипонормальных операторов, определяемых неравенством $|T|\ge|T^*|$, где $|T|$ – неотрицательный квадратный корень из оператора T^*T. В силу теоремы Хайнца [3] из неравенства $A\le B$ для положительных операторов A и B следует неравенство $A^\alpha\le B^\alpha$ при $\alpha\in(0,1)$. Поэтому класс гипонормальных операторов содержится в классе семигипонормальных операторов.

В [83] Д. Кся вводит подкласс *SHU* класса семигипонормальных операторов. Этот подкласс определяется тем, что в полярном разложении $T=U|T|$ оператор U может быть выбран унитарным (равносильное условие: размерности ядер операторов $|T|$ и $|T^*|$ совпадают). Очевидно, обратимые семигипонормальные операторы входят в *SHU*. Теория операторов класса *SHU* во многом аналогична теории гипонормальных операторов. Для них также вводятся сингулярная интегральная модель, мозаика, принципальная функция; роль декартова разложения $T=X+iY$ играет теперь полярное разложение. Сингулярная интегральная модель оператора из *SHU* строится в спектральном представлении $Uf(\zeta)=\zeta f(\zeta)$, $|\zeta|=1$, оператора U и имеет вид

$$Tf(\zeta) = \zeta\left[\beta(\zeta)f(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\,v.p.\int\limits_{|\xi|=1}\frac{\alpha(\zeta)^*\alpha(\xi)f(\xi)}{\zeta-\xi}\,d\xi\right].$$

Сингулярная интегральная модели общего семигипонормального оператора более сложна. Для ее построения используется разложение Вольда изометрии U (см. [83], гл. 3).

Имеются и другие обобщения понятия гипонормальности; см., например, [50, 54, 55, 58, 74].

§ 8. Операторы с самокоммутатором ранга 1

Чистые гипонормальные операторы T такие, что $[T^*,T]=\xi\otimes\xi$ - предмет этого пункта. Для таких операторов двумерная функциональная модель (см. п. 2) допускает конкретизацию. Действительно, в этом случае

$$C(z) = T_z^{*-1}\xi\otimes\xi/\|\xi\|,$$

где $T_z^{*-1}\xi$ - единственное решение x уравнения $(T^*-\bar{z}I)x=\xi$, ортогональное пространству $\operatorname{Ker}(T^*-\bar{z}I)$.

Введем ядро

$$K(z,w) = (T_w^{*-1}\xi,\ T_z^{*-1}\xi),\quad z,w\in\mathbb{C}. \tag{67}$$

Норма, определяемая (18) и (19), приобретает вид

$$\|\varphi\|_T^2 = \int K(z,w)\bar{\partial}\varphi(z)\bar{\partial}\varphi(w)dm_2(z)dm_2(w), \tag{68}$$

$\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{C})$. Оператор T^* в пополнении пространства $\mathcal{D}(\mathbb{C})$ по этой норме действует как умножение на $\bar{z}$ (см. (20)), а оператор T^* - по формуле (21), в которой надо положить $\Gamma_T=g_T$.

Мозаика $B(\cdot,\cdot)$ действует в одномерном пространстве $[T^*,T]H$. Так как $g=\operatorname{tr}B$, то по теореме Кэри-Пинкуса (п. 6.3) *множество чистых гипонормальных операторов ранга* 1 *находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством измеримых функций* $g\in L^\infty(\mathbb{C})$ *с компактным носителем таких, что* $0\le g\le 1$. К. Клэнси [43] получил следующее явное выражение ядра $K(z,w)$ через принципиальную функцию $g=g_T$ оператора T:

$$K(z,w) = 1 - \exp\left(\frac{1}{\pi}\int g(\zeta)/((\zeta-z)(\bar{\zeta}-\bar{w}))dm_2(\zeta);\quad z,\zeta\in\mathbb{C}.\right. \tag{69}$$

Тем самым формулы (67)-(69) доставляют явную модель произвольного оператора с одномерным самокоммутатором с заданной принципиальной функцией g.

С помощью этой модели М. Путинар [71] получил следующее обобщение неравенства Альфорса-Берлинга (39): если $g\in L^\infty(\mathbb{C})\cap L^1(\mathbb{C})$, $g\ge 0$, то

$$\sup_{z\in\mathbb{C}}\left|\int\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\,dm_2(\zeta)\right| \le \sqrt{\pi\|g\|_\infty\|g\|_1}.$$

Воспроизведем его рассуждение. Пусть сначала функция g имеет компактный носитель и $\|g\|_\infty\le 1$, тогда $g=g_T$ для некоторого оператора T из рассматриваемого класса. Возьмем вычет в (69) при $w=\infty$. Учитывая (67), получим формулу

$$\langle\xi,\ T_z^{*-1}\xi\rangle = \pi^{-1}\int\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\,dm_2(\zeta).$$

Заметим, что $\|T_z^{*-1}\xi\|\le 1$. Кроме того,

$$\|\xi\|^2 = \operatorname{tr}\,[T^*,T] = \pi^{-1}\|g\|_1$$

по формуле следов (52). Следовательно,

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \left| \int \frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\, dm_2(\zeta) \right| \le \pi \, \|\xi\| \, \|T_z^{*-1}\xi\| \le \sqrt{\pi \, \|g\|_1} \, .$$

Общий случай получается заменой $g \longrightarrow Cg$ и аппроксимацией.

Отметим, что в серии статей Д. Кся [84, 85], Д. Кся, Дж. Кся и Дж. Пинкуса [69] предложена другая (более естественная) модель, в которой оператор T приобретает вид умножения на z. Ими показано, что если g - характеристическая функция многосвязной области G с аналитическими границами, то оператор T подобен умножению на z в пространстве Харди $H^2(G)$.

§ 9. Приложение к двумерной проблеме моментов

Двумерная проблема моментов - еще один пример применения теории гипонормальных операторов к теории функций. Классическая задача нахождения меры μ на прямой по ее „моментной последовательности" $a_k=\int x^k d\mu(x)$, $k=0,1,..$, хорошо известна своими многочисленными связями с разнообразными областями математики (см. [1, 11]). Если μ - мера на плоскости, то естественным обобщением ее моментов являются числа

$$a_{mn}= \int z^m \bar{z}^n \, d\mu(z). \tag{70}$$

Встает вопрос, для каких наборов $\{a_{mn}\}_{m,n=0}^{\infty}$ существует мера μ, удовлетворяющая (70).

В книге [2] имеются достаточные условия однозначной разрешимости этой проблемы (и ее многомерного аналога). В несколько другой постановке для мер с компактным носителем проблема решена в [1]. Как показал Атсмон [21], эта задача для случая меры с компактным носителем тесно связана с теорией субнормальных операторов. Именно, если $S=S_\mu$ - циклический субнормальный оператор, N - его минимальное нормальное расширение (т.е. N - умножение на z в $L^2(\mu)$) и $\eta\equiv1$, то из (70) следует, что

$$a_{mn}= \langle S^m\eta,\ S^n\eta\rangle = \langle S^{*n}S^m\eta, \eta\rangle.$$

Положим $f_k=S^k\eta=z^k$, тогда скалярные произведения $\langle f_k, f_l\rangle$ и $\langle Sf_k, f_l\rangle$ полностью определены последовательностью $\{a_{mn}\}$. Так как span $\{f_k\}=P^2(\mu)$, то последовательность $\{a_{mn}\}$ определяет оператор S_μ. Используя критерий Халмоша-Брама субнормальности оператора, отсюда можно вывести необходимое и достаточное условие разрешимости проблемы (70) (см. [21]; [64], гл. I).

М. Путинар (см. [64], гл. XII, § 3) получил полное решение двумерной проблемы моментов при дополнительном условии $d\mu=g\cdot dm_2$, $g\in L^\infty(\mathbb{C})$. Как оказалось, эта проблема сводится к рассмотрению гипонормальных операторов с самокоммутатором ранга 1. Можно считать, что $\|g\|_\infty\le1$; для ядра $K(z,w)$, определяемого функцией g по формуле (69), получаем представление

$$K(z,w) = 1 - \exp\left(\frac{1}{\pi} \sum_{m,n\in\mathbb{Z}_+} a_{mn} z^{-m-1} \bar{w}^{-n-1}\right) \overset{\text{def}}{=}$$

$$\overset{\text{def}}{=} \sum_{m,n\in\mathbb{Z}_+} b_{mn} z^{-m-1} \bar{w}^{-n-1}.$$

Если T - гипонормальный оператор с принципиальной функцией g и $[T^*T]=\xi\otimes\xi$, то $b_{mn}=\langle T^m T^{*n}\xi,\xi\rangle$ ввиду (67). Числа b_{mn} позволяют явно определить оператор T, что в конечном счете приводит к необходимому и достаточному условию разрешимости задачи (70) в указанном классе мер.

Ответ формулируется в терминах положительной определенности некоторых явно выписываемых ядер.

§ 10. Краткий путеводитель по литературе

Теория гипонормальных операторов систематически изложена в книгах Путнама [73], Клэнси [44], Д.Кся [83], Мартина-Путинара [64]. Книга Конвея [46] посвящена в основном субнормальным операторам. Эти книги отражают этапы формирования теории; ознакомление с ними дает возможность проследить за ее развитием. Несмотря на пересечения в материале, все эти книги отличаются подходами - в каждой из них предложены свои методы доказательств основных результатов теории. Поэтому с появлением в 1989 г. книги Мартина и Путинара остальные книги не утратили своего значения. По-прежнему монографию Клэнси можно порекомендовать как изящное и краткое изложение основ теории гипонормальных операторов.

Книга Путнама относится к периоду формирования теории и несколько отличается по направленности от остальных книг. Приведенные там теоремы носят более качественный характер. Вместо неравенств Путнама и Бергера-Шо там содержатся более слабые утверждения, которые, однако, послужили этапом в открытии этих основных для теории гипонормальных операторов соотношений.

Книга Путнама содержит также интересную главу, посвященную коммутационным соотношениям квантовой механики. Этот материал относительно независим и поэтому здесь не обсуждался.

Такие темы, как вычисление спектра одномерной сингулярной интегральной модели, семигипонормальные операторы, поведение спектра и аппроксимативного точечного спектра при функциональных преобразованиях, отражены достаточно полно только у Д.Кся. В работе Сайто [74] обсуждаются метрические свойства гипонормальных операторов и их обобщений.

Наконец, такие достижения теории, как субскалярность гипонормального оператора, теоремы о существовании инвариантных подпространств, двумерная функциональная модель, появились совсем недавно и вошли только в книгу Мартина и Путинара. Эти направления, по-видимому, находятся только к начале своего развития.

Список литературы

[1] Ахиезер Н.И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. М.: Физматгиз, 1961. 310с.

[2] Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965. 798 с.

[3] Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. 264 с.

[4] Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Оценки разности дробных степеней самосопряженных операторов при неограниченных возмущениях // Исследования по линейным операторам и теории функций. XYIII. Зап.науч.семинаров ЛОМИ. Т.178. Л.: Наука, 1989. С.120-145.

[5] Бирман М.Ш., Энтина С.Б. Стационарный метод в абстрактной теории рассеяния // Изв. АН СССР. Сер.мат. 1967. Т.31. С.401-430.

[6] Витушкин А.Г. Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений // Успехи мат.наук. 1967. Т.22, N 6. С.139-200.

[7] Гамелин Т. Равномерные алгебры. М.: Мир, 1973. 334 с.

[8] Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984. 469 с.

[9] Дикмье Ж. C^*-алгебры и их представления. М.: Наука, 1974. 399 с.

[10] Крейн М.Г. О формуле следов в теории возмущений // Мат.сб. 1953. Т.33(75), N 3. С.597-626.

[11] Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973. 551 с.

[12] Никольский Н.К. Лекции об операторе сдвига. М.: Наука, 1980. 384 с.

[13] Пеллер В.В. Операторы Ганкеля класса $\mathfrak{S}_p$ и их приложения (рациональная аппроксимация, гауссовские процессы, проблема мажорации операторов) // Мат.сб. 1980. Т.113(155), N 4 (12). С.538-581.

[14] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.III. Теория рассеяния. М.: Мир, 1982. 443 с.

[15] Фарфоровская Ю.Б. Оценка нормы $|f(B)-f(A)|$ для самосопряженных операторов A и B // Исследования по линейным операторам и теории функций. VI // Зап.науч.семинаров ЛОМИ. 1976. Т.56. С.143-162, 197.

[16] Agler J. An invariant subspace theorem // Bull.Amer.Math.Soc. 1979. Vol.1, N 2. P.425-427.

[17] Alexander H. Projections of polynomial hulls // J.Funct.Anal. 1973. Vol.13. P.13-19.

[18] Alexander H., Taylor B.A., Ullman J.L. Areas of projections of analytic sets // Invent.Math. 1972. Vol.16. P.335-341.

[19] A p o s t o l C. The spectral flavour of Scott Brown's techniques // J.Oper.Theory. 1 9 8 1. Vol.6. P.3-12.

[20] A p o s t o l C., B e r c o v i c i H., F o i a s C., P e a r c y C. Invariant subspaces, dilation theory and the structure of predual of a dual algebra // J.Funct.Anal. 1 9 8 5. Vol.63. P.369-404.

[21] A t z m o n A. A moment problem for positive measures on the unit disc // Pacific J.Math. 1 9 7 5. Vol.59, N 2. P.317-325.

[22] A x l e r S., S h a p i r o J.H. Putnam's theorem. Alexander's spectral area estimate, and VMO // Math.Ann. 1 9 8 5. Vol.271. P.161-183.

[23] B e r g e r C.A. Sufficiently high powers of hyponormal operators have rationally invariant subspaces // Integral Eq.Oper.Theory. 1 9 7 8. Vol.1. P.444-447.

[24] B e r g e r C.A., S h a w B.L. Self-commutators of multicyclic hyponormal operators are always trace class // Bull. Amer.Math.Soc. 1 9 7 3. Vol.79. P.1193-1199.

[25] B e r c o v i c i H., F o i a s C., P e a r c y C. Dual algebras with applications to invariant subspaces and dilation theory // Regional Conf.Series Math.AMS. 1 9 8 5. Vol.56.

[26] B i s h o p E. A duality theorem for an arbitrary operator // Pacific J.Math. 1 9 5 9. Vol.9. P.379-397.

[27] B r a m J. Subnormal operators // Duke Math. J. 1 9 5 5. Vol.22. P.75-94.

[28] B r e n n a n J.E. Point evaluations and invariant subspaces // Indiana Univ.Math.J. 1 9 7 1. Vol.20, N 10. P.879-882.

[29] B r o w n S.W. Some invariant subspaces for subnormal operators // Integral Eqs.Oper.Theory. 1 9 7 8. Vol.1, N 3. P.310-333.

[30] B r o w n S.W. Hyponormal operators with thick spectrum have invariant subspaces // Ann. of Math. 1 9 8 7. Vol.125. P.93-103.

[31] B r o w n S., C h e v r e a u B. Every contraction with isometric functional calculus is reflexive // C.R.Acad.Sciences. Sér.I. Math. 1 9 8 8. Vol.307, N 5. P.185-188.

[32] B r o w n S.W., C h e v r e a u B., P e a r c y C. Contractions with rich spectrum have invariant subspaces // J.Oper.Th. 1 9 8 9. Vol.1. P.123-136.

[33] C a m p b e l l J.T., D i b r e l l Ph. Hyponormal powers of composition operators // Proc.Amer.Math.Soc. 1 9 8 8. Vol.102, N 4. P.914-918.

[34] C a r e y R.W. A unitary invariant for pairs of self-adjoint operators // J.Reine Angew.Math. 1 9 7 6. Vol.283. P.294-312.

[35] C a r e y R.W. Some remarks on principal curnents and index theory for single and several commuting operators, in: Surveys of some recent results in operator theory // Pitman Research Notes Math.Series. 1 9 8 8. Vol.171. P.133-155.

[36] C a r e y R.W., P i n c u s J.D. Construction of seminormal operators with prescribed mosaic // Indiana Univ.Math.J. 1 9 7 4. Vol.23. P.1155-1165.

[37] C a r e y R.W., P i n c u s J.D. Commutators, symbols and determining functions // J.Funct.Anal. 1 9 7 5. Vol.19. P.50-80.

[38] C a r e y R.W., P i n c u s J.D. Principal functions, index, theory, geometric measure theory, and functional algebras // Integral Equations Oper.Theory. 1 9 7 9. Vol.2. P.441-483.

[39] C a r e y R.W., P i n c u s J.D. Mean motion, principal functions and the zeros of Dirichlet series // Ibid. P.484-502.

[40] C a r e y R.W., P i n c u s J.D. An integrality theorem for subnormal operators // Int.Eq.Oper.Theory. 1 9 8 1. Vol.4. P.10-44.

[41] C a r e y R.W., P i n c u s J.D. On local index and the cocycle property for Lefschetz numbers // Oper.Theory: Adv.Appl.Basel, Boston, Stuttgart: Birkhäuser, 1 9 8 7. Vol.29. P.45-86.

[42] C a r m o n a A.J., C u f i J. On the distance of an analytic functions to VMO // J.Lond.Math.Soc. 1 9 8 6. Vol.34, N 1. P.52-67.

[43] C l a n c e y K.F. A kernel for operators with one-dimensional self-commutators // Integral Eq.Oper.Theory. 1 9 8 4. Vol.7. P.441-458.

[44] C l a n c e y K.F. Seminormal operators // Lecture Notes Math. Vol.742. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1 9 7 9.

[45] C o l o j a r a I., F o i a s C. Theory of generalized spectral operators. New York: Gordon and Breach, 1 9 6 8. 232 p.

[46] C o n w a y J.B. Subnormal operators. Boston: Pitman, 1 9 8 1. 476 p.

[47] C o n w a y J.B., D u d z i a k J.J. Von Neumann operators are reflexive. Preprint. Bloomington, 1 9 8 9.

[48] C o n w a y J.B., S z y m a n s k y W. Linear combinations of hyponormal operators // Rocky Mountain J. Math. 1 9 8 8. Vol.18, N 3. P.695-707.

[49] C o w e n C.C. Hyponormality of Toeplitz operators // J.Reine Angew.Math. 1 9 8 4. Vol.351. P.216-220.

[50] C u r t o R.E., M u h l y P.S., X i a D. A trace estimate for p-hyponormal operators // Integral Eq.Oper.Theory. 1 9 8 3. Vol.6. P.507-514.

[51] D o u g l a s R.G. Banach algebra techniques in the theory of Toeplitz operators // CBMS Reg.Conf.Ser.Math. Vol.15. AMS, 1 9 7 3.

[52] D o u g l a s R.G. Local Toeplitz operators // Proc.Lond.Math.Soc. 1 9 7 8. Vol.36. P.243-272.

[53] E s c h m e i e r J. Operators with rich invariant subspace lattices // J.reine angew.Math. 1 9 8 9. Bd 69. S.41-69.

[54] F o n g C.K. On M-hyponormal operators // Studia Math. 1 9 7 9. Vol.65. P.1-5.

[55] G u p t a B.C. Anextension of the Fuglede-Putman theorem and normality of

operators // Indian J.Pure Appl.Math. 1 9 8 3. Vol.14, N 11. P.1343-1347.

[56] H e l t o n J.W., H o w e R. Integral operators, commutator trace, index and homology. Proceedings of a conference on operator theory // Lecture Notes in Math. Vol. 345. Springer, 1 9 7 3.

[57] H e l t o n J.W., H o w e R. Traces of commutators of integral operators // Acta Math. 1 9 7 5. Vol.135. P.271-305.

[58] I s t r a t e s c u Y. Some results on M-hyponormal operators // Math.Seminar Notes. 1 9 7 8. Vol.6. P.77-87.

[59] J a n a s J. Examples of cryptointegral algebras // Bull.Acad.Pol.Sci. 1979. Vol.27, N 9. P.695-704.

[60] K a t o T. Some mapping theorems for numerical ranges // Proc.Japan.Acad. 1 9 6 5. Vol.41. P.652-655.

[61] K a t o T. Smooth operators and commutators // Studia Math. 1 9 6 8. Vol.31. P.535-546.

[62] L a m b e r t A. Subnormal composition operators // Proc.Amer.Math.Soc. 1 9 8 8. Vol.103, N 3. P.750-754.

[63] M a r t i n M., P u t n a r M. A unitary invariant for hyponormal operators // J.Funct.Anal. 1 9 8 7. Vol.72. P.297-323.

[64] M a r t i n M., P u t i n a r M. Lectures on hyponormal operators. Operator theory: advances and applications. Vol.39. Basel; Boston: Stuttgart: Birkhäuser, 1 9 8 9. 298 p.

[65] M u h l y P.S. A note on commutators and singular integrals // Proc.Amer.Math.Soc. 1 9 7 6. Vol.54. P.117-121.

[66] O l i n R.F., T h o m s o n J.E. Algebras of subnormal operators // J.Funct.Anal. 1 9 8 0. Vol.37. P.271-301.

[67] P e a r s o n D.B. A generalization of Birman's trace theorem // J.Funct.Anal. 1 9 7 8. Vol.28. P.182-186.

[68] P i n c u s J.D. Commutators and systems of singular integral equations.I // Acta Math. 1 9 6 8. Vol.121. P.219-249.

[69] P i n c u s J.D., X i a D., X i a J. The analytic model of a hyponormal operator with rank one self-commutator // Integral Eq.Oper.Theory. 1 9 8 4. Vol.7, N 4. P.516-535.

[70] P u t i n a r M. Hyponormal operators are subscalar // J.Operator Theory. 1 9 8 4. Vol.12. P.385-395.

[71] P u t i n a r M. Extreme hyponormal operators // Operator theory: advances and applications. 1 9 8 8. Vol.28. P.249-265.

[72] P u t n a m C.R. An inequality for the area of hyponormal spectra // Math.Zeitsch. 1 9 7 0. Vol.116. P.323-330.

[73] P u t n a m C.R. Commutation properties of Hilbert space operators and related topics. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1 9 6 7. 167 p.

[74] S a i t o T. Hyponormal operators and related topics. Lect.Notes Math. Vol.247. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1 9 7 2.

[75] S a r a s o n D. Weak-star density of polynomials // J.Reine Angew.Math. 1 9 7 2. Vol.252. P.1-15.

[76] S a r a s o n D. On products of Toeplitz operators // Acta Sci.Math. 1 9 7 3. Vol.35. P.7-12.

[77] S a r a s o n D. Function theory on the unit circle // Virg.Polyt.Inst. and State Univ. 1 9 7 8.

[78] S t a m p f l i J.G. An extension of Scott Brown's invariant subspace theorem : K-spectral sets // J.Oper.Theory. 1 9 8 0. Vol.3. P.3-20.

[79] S z-N a g y B., F o i a s C. An application of dilation theory to hyponormal operators // Acta Sci.Math. 1 9 7 5. Vol.37. P.155-159.

[80] V o i c u l e s c u D. Remarks on Hilbert-Schmidt perturbations of almost normal operators // Operator Theory: Adv. and Appl. Vol.2. Basel; Boston; Stuttgart: Birkhäuser-Verlag, 1 9 8 1. P.311-319.

[81] V o i c u l e s c u D. Some results on norm-ideal perturbations of Hilbert space operators // J.Oper.Theory. 1 9 7 9. Vol.2. P.3-37.

[82] X a D a o-X e n g (X i a D a o c i n g). On non-normal operators // Chinese Math. 1 9 6 3. Vol.3. P.232-246.

[83] X i a D a o c i n g. Spectral theory of hyponormal operators. Operator Theory: Advances and Applications. Vol.10. Basel; Boston; Stuttgart: Birkhäuer-Verlag, 1 9 8 3. 242 p.

[84] X i a D. On the analytic model of a class of hyponormal operators // Integral Eq.Oper.Theory. 1 9 8 3. Vol.6, N 1. P.134-157.

[85] X i a D. On the kernels associated with a class of hyponormal operators // Ibid. 1 9 8 3. Vol.6, N 3. P.444-452.

[86] X i a D. On the semi-hyponormal n-tuple of operators // Integr.eq.Oper. Theory. Vol.6, N 4. P.879-898.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР
191011, Ленинград, наб. р. Фонтанки, 27

Поступило 20 ноября 1989 г.