

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

H. Sánchez-Morgado, A. L. Fel'shtyn, Reidemeister torsion
and integrable Hamiltonian systems,
Algebra i Analiz, 2000, Volume 12, Issue 6, 194–216

<https://www.mathnet.ru/eng/aa1134>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read
and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.91

April 29, 2025, 11:38:28



Посвящается памяти В. А. Рохлина

КРУЧЕНИЕ РАЙДЕМАЙСТЕРА И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ

© Г. Санчес-Моргадо, А. Л. Фельштын

Пусть N — четырехмерное симплектическое многообразие и $H: N \rightarrow \mathbb{R}$ — функция Гамильтона и пусть имеется функция Ботта $f: N \rightarrow \mathbb{R}$, независимая с H и такая, что $\{H, f\} = 0$. Мы изучаем связь между кручением Райдемайстера компактных поверхностей уровня $M = \{H = \text{const}\}$, с одной стороны, и критическими окружностями и градиентными линиями функции f , соединяющими критические подмногообразия функции f на M , — с другой.

§0. Введение

Кручение Райдемайстера — важный топологический инвариант, имеющий полезные приложения в теории узлов, квантовой теории поля и теории динамических систем. Оно было введено в 1935 г. Райдемайстером [9], который с его помощью с точностью до PL -эквивалентности расклассифицировал линзовые пространства S^3/Γ , где Γ — конечная циклическая группа ортогональных преобразований сферы S^3 без неподвижных точек. Результаты Райдемайстера были вскоре перенесены Францем на обобщенные линзовые пространства S^{2n+1}/Γ .

Пусть X — компактное гладкое многообразие. Всякое представление его фундаментальной группы $\rho: \pi_1(X) \rightarrow U(m)$ определяет над X плоское C^m -расслоение E . Если скрученные когомологии $H^*(X; E)$ — нулевые, то представление ρ и плоское расслоение E называются *ациклическими*. Кручение Райдемайстера или R -кручение — это положительное число, которое является отношением определителей, построенных по коцепному комплексу $C^*(X, E)$. Позднее Милнор отождествил его с многочленом Александра, играющим фундаментальную роль в теории узлов и зацеплений.

Ключевые слова: симплектическое многообразие, функция Гамильтона, интеграл Ботта.

В 1971 г. Рей и Зингер [10] определили аналитическое кручение, ассоциированное с комплексом де Рама скрученных форм с коэффициентами в плоском расслоении над компактным римановым многообразием, и высказали гипотезу, что оно совпадает с кручением Райдемайстера. Впоследствии эту гипотезу независимо доказали Чигер и Мюллер.

Недавно кручение Райдемайстера нашло интересные приложения в теории динамических систем, когда Д. Фрид [6] установил связь между динамическими дзета-функциями типа Лефшеца и кручением Райдемайстера. Первым указанием на существование такой связи была работа Милнора [7].

В настоящей работе мы изучаем R -кручение изоэнергетических поверхностей интегрируемой гамильтоновой системы. Рассмотрим четырехмерное гладкое симплектическое многообразие N и гамильтонову систему с гладким гамильтонианом H , которая в координатах Дарбу имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial q_i}. \end{aligned} \tag{0.1}$$

Трехмерная поверхность уровня $M = \{H = \text{const}\}$ инвариантна относительно потока, определяемого системой (0.1). Многообразие M называется *изоэнергетической поверхностью* или *энергетическим уровнем*.

Топологическая структура изоэнергетических поверхностей интегрируемых гамильтоновых систем и структура их фундаментальных групп были описаны в [4, 3]. Изоэнергетические поверхности интегрируемой гамильтоновой системы обладают специальными свойствами, которые выделяют их среди всех гладких трехмерных многообразий. А именно, они принадлежат к классу граф-многообразий, введенному Вальдхаузенем [12]. Поскольку многообразие N ориентируемо (как симплектическое многообразие), то M автоматически ориентируемо во всех случаях.

Предположим, что система (0.1) вполне интегрируема на M (в смысле Лиувилля). Это означает, что имеется гладкая функция f (второй интеграл), независимая с H и такая, что скобка Пуассона $\{H, f\}$ обращается в нуль в окрестности многообразия M .

Определение. Функция $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ называется *функцией* (или *интегралом*) *Ботта*, если ее критические точки образуют в M невырожденные критические гладкие подмногообразия. Это означает, что ее гессиан d^2f невырожден на плоскостях, нормальных к ее критическим подмногообразиям.

А. Т. Фоменко [4] показал, что интеграл Ботта на компактной неособой изоэнергетической поверхности M может иметь только три типа критических подмногообразий: окружности, торы и бутылки Кляйна. Исследование

конкретных механических и физических систем показывает, что типична ситуация, когда интеграл на M является интегралом Ботта [4]. В классических интегрируемых случаях движения твердого тела (Ковалевской, Горячева-Чаплыгина, Клебша, Манакова) интегралы Ботта являются круглыми функциями Морса. (Круглая функция Морса — это функция, у которой все критические многообразия являются окружностями и при этом невырождены). Заметим, что критические окружности функции f являются периодическими решениями системы (0.1), причем число этих окружностей конечно.

Предположим теперь, что интеграл Ботта f является круглой функцией Морса на замкнутой изоэнергетической поверхности M . Напомним понятие *сепаратрисной диаграммы критической окружности* γ . Пусть $x \in \gamma$ и пусть $N_x(\gamma)$ — диск маленького радиуса, нормальный к γ в точке x . Ограничение функции f на $N_x(\gamma)$ есть нормальная функция Морса с критической точкой x определенного индекса $u(\gamma) = 0, 1, 2$. Сепаратриса критической точки x — это интегральная траектория поля $-\text{grad } f$, называемая *градиентной линией*, которая входит в x или покидает x . Объединение всех сепаратрис, покидающих точку x , образует диск размерности $u(\gamma)$, который называется *выходящим сепаратрисным диском*. Объединение всех входящих сепаратрис образует диск размерности $u(\gamma)$, который называется *входящим сепаратрисным диском*. Строя входящий и выходящий сепаратрисные диски для каждой точки x , мы получим *входящую и выходящую сепаратрисные диаграммы окружности* γ . Пусть $\Delta(\gamma)$ равно $+1$, если выходящая сепаратриса ориентируема, и -1 в противном случае. Положим $\epsilon(\gamma) = (-1)^{u(\gamma)}$.

Пусть $\rho_E: \pi_1(M, p) \rightarrow U(E_p)$ — представление голономии эрмитова расслоения E над M ; E_p — слой в точке p . Для градиентного потока функции f на M можно построить *индексную фильтрацию* для семейства критических окружностей $\{\gamma_i\}$, т.е. семейство компактных трехмерных подмногообразий M_i таких, что $M_0 = \emptyset$, $M_i \subset \text{int } M_{i+1}$, $M_i = M$ для больших i , поток трансверсально входит на ∂M_i и $M_{i+1} \setminus M_i$ является изолирующей окрестностью для критической окружности γ_i . Если сужение $E|_{(M_{i+1}, M_i)}$ ациклично для каждого i , то, следуя идеям Фрида [6], мы можем вычислить кручение Райдемайстера [1]:

$$\tau(M; E) = \prod_i \tau(M_{i+1}, M_i; E) = \prod_{\gamma_i} |\det(I - \Delta(\gamma_i)\rho_E(\gamma_i))|^{\epsilon(\gamma_i)}. \quad (0.2)$$

Эта формула означает, что для интегрируемой гамильтоновой системы на четырехмерном симплектическом многообразии кручение Райдемайстера изоэнергетической поверхности M „пересчитывает“ критические окружности второго независимого интеграла Ботта на M .

Заметим, что если сужение $E|_{(M_{i+1}, M_i)}$ ациклично, то $\det(I - \Delta(\gamma_i)\rho_E(\gamma_i)) \neq 0$ для каждого i . Интересно изучить ситуацию, когда не все сужения $E|_{(M_{i+1}, M_i)}$ ацикличны, поскольку во многих классических интегрируемых

случаях имеются стягиваемые критические окружности. В настоящей работе мы как раз и проводим такое исследование и фактически рассматриваем самую общую ситуацию, когда интеграл Ботта имеет также критические торы и критические бутылки Кляйна. Мы используем спектральную последовательность, определяемую фильтрацией, и, следуя идеям Уиттена и Флэра, вводим в рассмотрение градиентные линии функции f , соединяющие ее критические подмногообразия. Аналогичный подход был развит в [11] для потоков Морса-Смейла.

Эта работа была частично написана во время визита первого автора в Институт математики, UNAM, Мехико, и в Институт математической физики им. Эрвина Шрёдингера в Вене и во время визита второго автора в CIMAT в Гуанахуато, Мексика. Авторы благодарны этим учреждениям за поддержку и гостеприимство.

§1. R-кручение и спектральные последовательности

Пусть W — конечномерное векторное пространство с базисом $w = \{w_1, \dots, w_n\}$. Тогда $\wedge w = w_1 \wedge \dots \wedge w_n$ — образующая в $\det W = \wedge^n W$. Если $\dim W = 0$, положим $\det W = \mathbb{C}$.

1.1. Элемент кручения. Рассмотрим коцепной комплекс конечномерных векторных пространств

$$V: 0 \rightarrow V^0 \xrightarrow{d} V^1 \rightarrow \dots \rightarrow V^m \xrightarrow{d} 0. \tag{1.1}$$

Пусть $V^+ = \bigoplus_i V^{2i}$, $V^- = \bigoplus_i V^{2i+1}$ и

$$\det V = \det(V^-) \otimes (\det V^+)^{-1}.$$

Пусть

$$Z^\pm = V^\pm \cap \ker d, \quad B^\mp = d(V^\pm), \quad H^\pm = Z^\pm / B^\pm.$$

Определим элемент кручения $\tau_d \in \det V \otimes (\det H)^{-1}$. Выберем упорядоченные относительные базисы h_\pm и t_\pm для (Z^\pm, B^\pm) и (V_\pm, Z_\pm) соответственно. Тогда dt_\mp является базисом для B_\pm . Обозначим через $[h_\pm]$ соответствующий базис для H^\pm . Положим

$$\tau_d = \wedge(t_-, h_-, dt_+) \otimes \wedge(dt_-, h_+, t_+)^{-1} \otimes \wedge[h_+] \otimes \wedge[h_-]^{-1}. \tag{1.2}$$

Замечание. Рассмотрим коцепной комплекс

$$0 \rightarrow V \xrightarrow{A} W \rightarrow 0.$$

Тогда $H^0 = \ker A$ и $H^1 = \operatorname{coker} A$. Положим $\tau(A) := \tau_d$. Если A — изоморфизм, то $\tau(A)$ является бескоординатным вариантом определителя $\det A$.

Предложение 1 [5]. Пусть $0 = F_{N+1}^i \subset F_N^i \subset \dots \subset F_0^i = V^i$ — такая фильтрация коцепного комплекса (1.1), что $d^i(F_n^i) \subset F_n^{i+1}$, и пусть $\{E_r, d_r\}$ — соответствующая спектральная последовательность. Тогда

$$\tau_d = \tau_{d_0} \otimes \dots \otimes \tau_{d_N}.$$

Следствие 2 [5]. Пусть

$$0 \rightarrow (C', d') \xrightarrow{i} (C, d) \xrightarrow{j} (C'', d'') \rightarrow 0 \quad (1.3)$$

— короткая точная последовательность цепных комплексов и пусть

$$H: 0 \rightarrow H^0(C') \xrightarrow{i^*} H^0(C) \rightarrow H^0(C'') \xrightarrow{\partial} H^1(C') \rightarrow \dots \quad (1.4)$$

— соответствующая длинная когомологическая последовательность. Для каждого k выберем подходящие элементы объема в $\det C'_k$, $\det C_k$ и $\det C''_k$, т.е. такие, что кручение для (1.3) равно 1. Тогда

$$\tau_d = \tau_{d'} \tau_{d''} \tau_H. \quad (1.5)$$

1.2. Первые члены спектральной последовательности $\{E_r, d_r\}$. Указанная фильтрация определяет ассоциированный градуированный комплекс $G^i = \bigoplus_n G_n^i$, где $G_n^i = F_n^i / F_{n+1}^i$. Кограничный гомоморфизм d индуцирует отображение $d_0^n: G_n^i \rightarrow G_n^{i+1}$, когомологии которого определяют член E_1 по формуле

$$E_1^{n,q} := H^{n+q}(F_n / F_{n+1}), \quad (1.6)$$

и индуцирует первый дифференциал $d_1^n: E_1^{n,q} \rightarrow E_1^{n+1,q}$ как кограничный гомоморфизм для короткой точной последовательности

$$0 \rightarrow F_{n+1} / F_{n+2} \rightarrow F_n / F_{n+2} \rightarrow F_n / F_{n+1} \rightarrow 0,$$

т.е. гомоморфизм d_1 в длинной точной последовательности

$$\rightarrow H^{n+q}(F_n / F_{n+2}) \xrightarrow{k_{n,q}} H^{n+q}(F_n / F_{n+1}) \xrightarrow{d_1} H^{n+q+1}(F_{n+1} / F_{n+2}) \xrightarrow{j_{n+1,q}} \dots \quad (1.7)$$

Член $E_2^{n,q}$ определяется так:

$$E_2^{n,q} := \frac{\ker(d_1: E_1^{n,q} \rightarrow E_1^{n+1,q})}{\text{im}(d_1: E_1^{n-1,q} \rightarrow E_1^{n,q})}. \quad (1.8)$$

Из (1.7) следует, что $E_2^{n,q} = \text{im}(k_{n,q}) / \ker(j_{n,q})$.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 & & H^{n+q}(F_n/F_{n+2}) \\
 & & \downarrow k_{n,q} \\
 H^{n+q-1}(F_{n-2}/F_n) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+q}(F_n/F_{n+1}) \\
 k_{n-2,q+1} \downarrow & & \downarrow j_{n,q} \\
 H^{n+q-1}(F_{n-2}/F_{n-1}) & \xrightarrow{\delta_{q+1}} & H^{n+q}(F_{n-1}/F_{n+1}) \\
 j_{n-2,q+1} \downarrow & & \\
 H^{n+q-1}(F_{n-3}/F_{n-1}) & &
 \end{array}$$

Второй дифференциал $d_2^{n-2}: E_2^{n-2,q+1} \rightarrow E_2^{n,q}$ задается как композиция

$$\text{im}(k_{n-2,q+1}) / \ker(j_{n-2,q+1}) \xrightarrow{\delta_{q+1}} \text{im}(j_{n,q}) \xrightarrow{j_{n,q}^{-1}} \text{im}(k_{n,q}) / \ker(j_{n,q}). \quad (1.9)$$

Дальнейшие члены спектральной последовательности $E_r^{n,q}$ получаются как когомологии предыдущих членов, а дифференциалы $d_r^n: E_r^{n,q} \rightarrow E_r^{n+q+1-r}$ индуцируются первоначальным d .

1.3. Клеточный случай. Пусть K — конечное клеточное пространство (CW-комплекс), $p: \tilde{K} \rightarrow K$ — универсальное накрытие и $\rho: \Gamma \rightarrow U(m)$ — представление фундаментальной группы Γ комплекса K , которым определяется плоское векторное расслоение $E := \tilde{K} \times_{\Gamma} \mathbb{C}^m$. Поднимая клетки из K в \tilde{K} , мы получим Γ -инвариантную клеточную структуру на \tilde{K} . Пространство ρ -эквивариантных коцепей

$$C^*(K; E) = \{ \xi \in C^*(\tilde{K}; \mathbb{C}^m) : \xi \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ \xi, \gamma \in \Gamma \}$$

сохраняется гомоморфизмом $d^j: C^j(\tilde{K}; \mathbb{C}^m) \rightarrow C^{j+1}(\tilde{K}; \mathbb{C}^m)$ и, таким образом, образует подкомплекс. Его когомологии $H^*(K; E)$ называются ρ -скрученными когомологиями комплекса K . Как обычно, $H^*(K; E)$ — инвариант подразделения, и мы имеем элемент кручения

$$\tau_{d(K;E)} \in \det C^*(K; E) \otimes (\det H^*(K; E))^{-1}.$$

Упорядочим j -клетки σ и выберем для каждой из них ориентированное поднятие $\tilde{\sigma}$. Это дает нам изоморфизм $C^j(K; E) \cong \bigoplus_{\sigma} \mathbb{C}^m$ и определяет предпочтительную образующую w_K^j для $\det(C^*(K; E))$ с точностью до умножения на элементы подгруппы

$$U_{\rho} = \{ (\pm 1)^m \det \rho(\gamma) : \gamma \in \Gamma \} \subset S^1.$$

Орбита $U_\rho w_K^\rho \subset \det C^*(K; E)$ инвариантна при подразделении, и, таким образом, R -кручение комплекса K в ρ можно определить как U_ρ -орбиту

$$\tau(K; E) = (U_\rho w_K^\rho)^{-1} \otimes \tau_{d(K; E)} \subset (\det H^*(K; E))^{-1}, \quad (1.10)$$

которая инвариантна при подразделениях. Если ρ ациклично, т.е. $H^*(K; E) = 0$, то $\det H^*(K; E) = \mathbb{C}$, и мы можем отождествить $\tau(K; E)$ с элементом из C^*/U_ρ . Поскольку $U_\rho \subset S^1$, все элементы в $\tau(K; E)$ имеют одно и то же абсолютное значение, которое мы также будем обозначать $\tau(K; E)$.

Предыдущие определения можно распространить на относительный случай. Пусть L — клеточное подпространство в K . Для каждого j имеем пространство относительных коцепей

$$C^j(K, L; \mathbb{C}) = \bigoplus_{\sigma \in K \setminus L} H^j(\sigma, \partial\sigma; \mathbb{C}).$$

Пусть \tilde{K} и ρ — такие же, как прежде, и пусть $\tilde{L} = \rho^{-1}(L)$. Рассматривая пространство относительных ρ -эквивариантных коцепей $C^*(K, L; E) \subset C^*(\tilde{K}, \tilde{L}; \mathbb{C}^m)$ с кограницей $d(K, L; E)$, получим элемент кручения

$$\tau_{d(K, L; E)} \in \det C^*(K, L; E) \otimes (\det H^*(K, L; E))^{-1}.$$

Выбирая, как и прежде, предпочтительный базис, получим U_ρ -орбиту

$$\tau(K, L; E) \subset \det H^*(K, L; E)^{-1},$$

которая инвариантна при подразделении.

Замечание. Другое название скрученных когомологий — *когомологии с локальными коэффициентами*. Выберем по точке в каждой клетке из K и путь из фиксированной точки в каждую выбранную точку. При этом любой путь c между выбранными точками определяет замкнутый путь γ_c и, следовательно, матрицу $\rho(c) := \rho(\gamma_c)$, которая задает связь между коэффициентами на концах пути c .

§2. R -кручение и критические подмногообразия

Слоение изознергетической поверхности M на торы Лиувилля задается поверхностями уровня $f^{-1}(c)$ интеграла Ботта для регулярных значений c . Бифуркации торов Лиувилля проходят на множествах $F_c = f^{-1}(c) \cap \text{Crit}(f)$ при критических значениях c . Мы сделаем следующее предположение, которое выполняется в типичном случае.

Предположение. Будем предполагать, что у интеграла Ботта f нет градиентных линий, связывающих седловые окружности, т.е. окружности индекса 1.

Мы заменим интеграл Ботта другой функцией Ботта, которую по-прежнему обозначим через f , но которая уже не обязательно интеграл. Новая функция f задает то же самое слоение на торы Лиувилля, причем ее критические значения $c_1 < \dots < c_l$ упорядочены следующим образом:

- (a) $i \leq k_1 \iff F_{c_i}$ — минимальная окружность;
- (b) $k_1 < i \leq k_2 \iff F_{c_i}$ — минимальный тор или бутылка Кляйна;
- (c) $k_3 < i \leq k_4 \iff F_{c_i}$ — максимальный тор или бутылка Кляйна;
- (d) $k_4 < i \iff F_{c_i}$ — максимальная окружность.

Выбирая числа A_0, A_1, \dots, A_l так, что $A_0 < c_1 < A_1 < \dots < c_l < A_l$, и полагая $N_j = f^{-1}(-\infty, A_j)$, получаем индексную фильтрацию

$$\emptyset = N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_l = M$$

для критических множеств функции f . Это значит, что градиентный поток ϕ функции f трансверсально входит на ∂N_n и

$$\bigcap_{t \in \mathbb{R}} \phi_t(N_j \setminus N_{j-1}) = F_{c_j}.$$

Зафиксируем представление $\rho: \pi_1(M) \rightarrow U(m)$. Всюду в дальнейшем коцепные комплексы и когомологические группы будут иметь коэффициенты в плоском расслоении, определяемом представлением ρ .

Пусть $l_0 = 0, l_1 = k_2, l_2 = k_3, l_3 = l$ и $M_n = N_{l_n}$. Определим фильтрацию

$$F_3 \subset F_2 \subset F_1 \subset F_0$$

для $C^*(M)$ так: $F_n = \ker(C^*(M) \rightarrow C^*(M_n))$. Отметим, что для соответствующей спектральной последовательности $E_r^{n,q} \neq 0$ только при $n = 0, 1, 2$ и, следовательно, $d_r = 0$ при $r \geq 3$. Ассоциированный градуированный комплекс задается следующим образом:

$$G_n = F_n/F_{n+1} \cong C^*(M_{n+1}, M_n),$$

где 0-дифференциал имеет вид $d_0 = \bigoplus_n (d_0^n: G_n \rightarrow G_n)$, и элемент кручения имеет вид $\tau_{d_0} = \bigotimes_n \tau_{d_0^n}$, где

$$\tau_{d_0^n} \in \det C^*(M_{n+1}, M_n) \otimes (\det H^*(M_{n+1}, M_n))^{-1}.$$

Так как отсутствуют градиентные линии, соединяющие два минимальных (максимальных) критических подмногообразия, и (по предположению)

отсутствуют градиентные линии, соединяющие две седловые окружности, то [11]

$$H^*(M_{n+1}, M_n) = \bigoplus_{M_n \subset N_j \subset M_{n+1}} H^*(N_j, N_{j-1}), \quad (2.1)$$

$$\tau_{d_0^n} = \bigotimes_{M_n \subset N_j \subset M_{n+1}} \tau_{d_0^{n,j}}. \quad (2.2)$$

Используя (2.1), мы сведем вычисление отображения

$$d_1^n: H^*(M_n, M_{n-1}) \rightarrow H^{*+1}(M_{n+1}, M_n)$$

к вычислению его компонент $F_{ij}^*: H^*(N_i, N_{i-1}) \rightarrow H^{*+1}(N_j, N_{j-1})$ для каждой пары i, j с $l_{n-1} < i \leq l_n < j \leq l_{n+1}$. Для этого мы используем траектории градиентного потока функции f , но при этом модифицируем f в окрестности каждого критического множества уровня, чтобы использовать нижеприведенную лемму 1, задающую такое отображение в случае функции Морса. Эта модификация является только техническим средством, позволяющим выбрать некоторые из орбит, соединяющих критические подмногообразия, и описать отображения F_{ij}^* . Наше доказательство следующего предложения (см. конец данного параграфа) использует лемму 1.

Предложение 3. Если $k_{2n} < j \leq k_{2n+1}$, то пусть $\gamma_j = F_{c_j}$ и $\mathcal{D}_j = I - \Delta(\gamma_j)\rho(\gamma_j)$. Тогда

$$H^k(N_j, N_{j-1}) = \begin{cases} \ker \mathcal{D}_j, & \text{если } k = n, n+1, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases} \quad (2.3a)$$

$$\tau_{d_0^{n,j}} = \tau(\mathcal{D}_j)^{(-1)^n}. \quad (2.3b)$$

Если $k_{2n-1} < j \leq k_{2n}$ и α_j, β_j — образующие фундаментальной группы F_{c_j} , то пусть

$$\mathcal{D}_j = \begin{pmatrix} I - \rho(\alpha_j) \\ I \pm \rho(\beta_j) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}_j^* = (I \pm \rho(\beta_j), \rho(\alpha_j) - I),$$

где знак $+$ появляется в точности в том случае, когда F_{c_j} — бутылка Кляйна. Тогда

$$H^k(N_j, N_{j-1}) = \begin{cases} \ker \mathcal{D}_j = \text{coker } \mathcal{D}_j^*, & \text{если } |k - n| = 1, \\ \ker \mathcal{D}_j \oplus \ker \mathcal{D}_j^*, & \text{если } k = n, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases} \quad (2.4a)$$

$$\tau_{d_0^{n-1,j}} = 1. \quad (2.4b)$$

Следствие 4.

$$\begin{aligned}
 E_1^{0,q} &= H^q(M_1) = 0 && \text{для } q \neq 0, 1, 2; \\
 E_1^{1,q} &= H^{q+1}(M_2, M_1) = 0 && \text{для } q \neq 0, 1; \\
 E_1^{2,q} &= H^{q+2}(M, M_2) = 0 && \text{для } q \neq -1, 0, 1. \bullet
 \end{aligned}$$

Пусть $G: M \rightarrow \mathbb{R}$ — функция Морса-Смейла и $c_1 < \dots < c_N$ — ее критические значения. Для $A_0 < c_1 < \dots < c_N < A_N$ и $K_i = G^{-1}(\infty, A_i]$ мы получаем фильтрацию $K_0 \subset \dots \subset K_N$. Ориентация многообразия M и $\text{grad } G$ определяют ориентацию на $L_a = G^{-1}(a)$ для каждого регулярного значения a . Задавая ориентацию неустойчивого пространства $E^u(x)$ для каждой критической точки x функции G и используя ориентацию на M , мы также получаем ориентацию устойчивого пространства $E^s(x)$. Тогда мы получаем ориентации для $W^u(x)$ и $W^s(x)$. Пусть x и y — критические точки функции G индексов n и $n + 1$ соответственно и пусть a — регулярное значение такое, что $G(x) < a < G(y)$. Тогда $S^u(y) = W^u(y) \cap L_a$ и $S^s(x) = W^s(x) \cap L_a$ — ориентированные трансверсальные подмногообразия в L_a размерности n и $2n$ соответственно. Следовательно, $S^s(x) \cap S^u(y)$ — конечное множество. Для каждой точки $q \in S^s(x) \cap S^u(y)$ обозначим через I_q соответствующий индекс пересечения.

Доказательство, данное Флёром [2] для нескрученного варианта следующей леммы 1, без труда переносится на скрученный случай. Единственный новый ингредиент — это матрицы $\rho(\alpha)$ для незамкнутых путей α , используемые при определении когомологий с локальными коэффициентами.

Лемма 1. Пусть c_i и c_{i+2} — критические точки функции G с индексами n и $n + 1$. Для каждого $q \in S(i, j) = S^s(c_i) \cap S^u(c_j)$ пусть $\alpha_q(t) = \phi_{\text{ctg}(\pi t)}(q)$, $t \in [0, 1]$. Тогда кограничное отображение $d: H^n(K_i, K_{i-1}) \rightarrow H^{n+1}(K_{i+1}, K_i)$ задается следующим образом:

$$d = \sum_{q \in S(i,j)} I_q \rho(\alpha_q). \bullet \tag{2.5}$$

Чтобы изменить интеграл Ботта в окрестности каждого критического множества уровня, воспользуемся следующим предложением.

Предложение 5. Пусть $F: M \rightarrow \mathbb{R}$ — функция Ботта и пусть γ — критическая окружность индекса n . Тогда в заданной малой окрестности U окружности γ имеется другая функция Ботта G , которая совпадает с F вне U , имеет невырожденные критические точки $w, z \in \gamma$ индексов $n, n + 1$ и не имеет в U никаких других критических точек.

Доказательство. Пусть $F(\gamma) = c$. Если $\Delta(\gamma) = 1$, то у окружности γ имеется трубчатая окрестность U с координатами $(x, y) \in B_\epsilon(0)$, $\theta \in S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ такая,

что

$$F(x, y, \theta) = c \pm x^2 \pm y^2.$$

Пусть $\rho: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ — гладкая функция такая, что $\rho(t) = 0$, если $t > \varepsilon^2$, и $\rho(t) = 1$ для $t < \varepsilon^2/4$. Положим

$$G = \begin{cases} f + \delta\rho(x^2 + y^2) \cos \theta & \text{на } U, \\ f & \text{вне } U. \end{cases}$$

На U имеем

$$\begin{aligned} dG(x, y, \theta) &= 2(\pm 1 + \delta\rho'(x^2 + y^2) \cos \theta) x dx \\ &+ 2(\pm 1 + \delta\rho'(x^2 + y^2) \cos \theta) y dy - \delta\rho(x^2 + y^2) \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Таким образом, если δ достаточно мало, то единственными критическими точками функции G в U являются $w = (0, 0, \pi)$ и $z = (0, 0, 0)$ с индексами p и $p + 1$ соответственно. •

Предложение 6. Пусть $F: M \rightarrow \mathbb{R}$ — функция Ботта и T — минимальный (максимальный) тор. Тогда в заданной маленькой окрестности U тора T имеется другая функция Ботта G , которая

- 1) совпадает с F вне U ;
- 2) имеет невырожденные критические точки $p, q, r, s \in \mathbb{T}$ индексов 0, 1, 1, 2 (или 1, 2, 2, 3) и не имеет других критических точек в U ;
- 3) не имеет градиентных линий, идущих из критической точки индекса 1 в точки q, r, s или из критической точки индекса 2 — в s (соответственно из p — в критическую точку индекса 1 или из p, q, r, s — в критическую точку индекса 2).

Доказательство. Рассмотрим случай минимального тора. (Доказательство в случае максимального тора аналогично).

Пусть $F(\mathbb{T}) = c$. У тора \mathbb{T} имеется трубчатая окрестность U с координатами $(x, \theta, \varphi) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times S^1 \times S^1$ такая, что $F(x, \theta, \varphi) = c + x^2$.

Для каждой критической точки z индекса 2 функции F множество $W^u(z) \cap \{x\} \times S^1 \times S^1$ есть кривая. Для каждой критической точки w индекса 1 функции F множество $W^u(w) \cap \{x\} \times S^1 \times S^1$ есть точка. Следовательно, мы можем выбрать координаты θ, φ так, что

- (а) $(x, 0, 0) \notin \bigcup_{u(z)=2} W^u(z)$,
- (б) $\{x\} \times S^1 \times \{0\} \cap \bigcup_{u(w)=1} W^u(w) = \emptyset$,
- (в) $\{x\} \times \{0\} \times S^1 \cap \bigcup_{u(w)=1} W^u(w) = \emptyset$.

Пусть ρ — такое же, как в доказательстве предложения 5. Положим

$$G = \begin{cases} F + \rho(x^2)(\delta_1 \cos \theta + \delta_2 \cos \varphi) & \text{на } U, \\ F & \text{вне } U. \end{cases}$$

На U имеем

$$\begin{aligned} dG(x, \theta, \varphi) &= 2(1 + \rho'(x^2)(\delta_1 \cos \theta + \delta_2 \cos \varphi)) x dx \\ &\quad - \rho(x^2)(\delta_1 \sin \theta d\theta + \delta_2 \sin \varphi d\varphi). \end{aligned}$$

Если δ_1 и δ_2 достаточно малы, то единственными критическими точками функции G в U являются $p = (0, \pi, \pi)$, $q = (0, \pi, 0)$, $r = (0, 0, \pi)$ и $s = (0, 0, 0)$, которые имеют требуемые индексы, причем

- (a) $W^s(s) \cap U = (-\varepsilon, \varepsilon) \times \{(0, 0)\}$,
- (b) $W^s(q) \cap U = (-\varepsilon, \varepsilon) \times (S^1 - \{\pi\}) \times \{0\}$,
- (c) $W^s(r) \cap U = (-\varepsilon, \varepsilon) \times \{0\} \times (S^1 - \{\pi\})$. •

Применяя предложение 5 к функции f , получим функцию Ботта без критических окружностей, а затем, используя предложение 6, получим функцию Ботта без критических окружностей и минимального тора (бутылки Кляйна) и без градиентных линий, ведущих из критических точек индекса i в критические точки индекса $j \geq i$. Снова используя предложение 6, в конце концов получим функцию Морса–Смейла g , совпадающую с f вне окрестностей критического множества. Обозначим через $C_j(g)$ множество критических точек g с индексом j . Тогда

$$\begin{aligned} C_0(g) &= \{w_1, \dots, w_{k_1}, p_{k_1+1}, \dots, p_{k_2}\}, \\ C_1(g) &= \{z_1, \dots, z_{k_1}, q_{k_1+1}, r_{k_1+1}, \dots, q_{k_2}, r_{k_2}, w_{k_2+1}, \dots, w_{k_3}, p_{k_3+1}, \dots, p_{k_4}\}, \\ C_2(g) &= \{s_{k_1+1}, \dots, s_{k_2}, z_{k_2+1}, \dots, z_{k_3}, q_{k_3+1}, r_{k_3+1}, \dots, q_{k_4}, r_{k_4}, w_{k_4+1}, \dots, w_l\}, \\ C_3(g) &= \{s_{k_3+1}, \dots, s_{k_4}, z_{k_4+1}, \dots, z_l\}. \end{aligned}$$

Доказательство предложения 3. Для $k_{2n} < i \leq k_{2n+1}$ пусть $g(w_i) < d_i < g(z_i)$ и $N_i^* = g^{-1}(\infty, d_i]$. Тогда $H^n(N_i^*, N_{i-1}) = \mathbb{C}^m w_i$, $H^{n+1}(N_i, N_i^*) = \mathbb{C}^m z_i$ и, согласно Милнору [8, лемма 9.4],

$$\tau_d(N_i^*, N_{i-1}) = 1, \quad \tau_d(N_i, N_i^*) = 1.$$

Используя лемму 1, получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow H^n(N_i, N_{i-1}) \xrightarrow{A_i} \mathbb{C}^m \xrightarrow{D_i} \mathbb{C}^m \xrightarrow{B_i} H^{n+1}(N_i, N_{i-1}) \rightarrow 0, \quad (2.6)$$

где \mathcal{D}_i определено в предложении 3. Следовательно,

$$H^n(N_i, N_{i-1}) = \ker \mathcal{D}_i, \quad H^{n+1}(N_i, N_{i-1}) = \text{coker } \mathcal{D}_i.$$

Так как последовательность (2.6) имеет кручение $\tau(\mathcal{D}_i)^{(-1)^n}$, по следствию 2 получаем

$$\tau_0^{n,i} = \tau_{d(N_i, N_i^*)} \tau_{d(N_i^*, N_{i-1})} \tau(\mathcal{D}_i)^{(-1)^n} = \tau(\mathcal{D}_i)^{(-1)^n}.$$

Для $k_{2n_1} < i \leq k_{2n}$ пусть $g(p_i) < c'_i < g(q_i)$ и $g(r_i) < c''_i < g(s_i)$ и пусть $N'_i = g^{-1}(\infty, c'_i]$ и $N''_i = g^{-1}(\infty, c''_i]$. Тогда

$$H^{n-1}(N'_i, N_{i-1}) = \mathbb{C}^m p_i, \quad H^{n-1}(N''_i, N'_i) = \mathbb{C}^m q_i \oplus \mathbb{C}^m r_i, \quad H^{n+1}(N_i, N''_i) = \mathbb{C}^m s_i.$$

Снова, согласно [8, лемма 9.4],

$$\tau_{d(N'_i, N_{i-1})} = 1, \quad \tau_{d(N''_i, N'_i)} = 1, \quad \tau_{d(N_i, N''_i)} = 1.$$

По лемме 1 имеем последовательности триад (N''_i, N'_i, N_{i-1}) и (N_i, N''_i, N'_i) :

$$0 \rightarrow H^{n-1}(N''_i, N_{i-1}) \xrightarrow{\mathcal{A}_i} \mathbb{C}^m \xrightarrow{\mathcal{D}_i} \mathbb{C}^m \oplus \mathbb{C}^m \xrightarrow{\mathcal{B}_i} H^n(N''_i, N_{i-1}) \rightarrow 0, \quad (2.7)$$

$$0 \rightarrow H^1(N_i, N'_i) \xrightarrow{\mathcal{A}_i} \mathbb{C}^m \oplus \mathbb{C}^m \xrightarrow{\mathcal{D}_i^*} \mathbb{C}^m \xrightarrow{\mathcal{B}_i} H^2(N_i, N'_i) \rightarrow 0, \quad (2.8)$$

где \mathcal{D}_i и \mathcal{D}_i^* определены в предложении 3. Первая часть последовательности триады (N_i, N''_i, N_{i-1})

$$0 \rightarrow H^{n-1}(N_i, N_{i-1}) \rightarrow H^{n-1}(N''_i, N_{i-1}) \rightarrow 0,$$

и последовательность (2.7) дают

$$H^{n-1}(N_i, N_{i-1}) = H^{n-1}(N''_i, N_{i-1}) = \ker \mathcal{D}_i, \quad (2.9a)$$

$$H^n(N''_i, N_{i-1}) = \text{coker } \mathcal{D}_i. \quad (2.9b)$$

Используя (2.7) и (2.8), получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \mathcal{D}_i \downarrow & & & \\ & & & \mathbb{C}^m \oplus \mathbb{C}^m & & & \\ & & & \swarrow \mathcal{B}_i & & \searrow \mathcal{D}_i^* & \\ 0 \rightarrow & H^n(N_i, N_{i-1}) & \rightarrow & H^n(N''_i, N_{i-1}) & \xrightarrow{\Delta_i} & \mathbb{C}^m & \rightarrow H^{n+1}(N_i, N_{i-1}) \rightarrow 0, \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & & 0 & & H^{n+1}(N_i, N'_i) & \end{array}$$

откуда

$$H^n(N_i, N_{i-1}) = \ker \Delta_i = B_i(\operatorname{coker} \mathcal{D}_i \cap \ker \mathcal{D}_i^*), \quad (2.10a)$$

$$H^{n+1}(N_i, N_{i-1}) = \operatorname{coker} \Delta_i = \operatorname{coker} \mathcal{D}_i^* = H^{n+1}(N_i, N_i'). \quad (2.10b)$$

Последовательность (2.7) имеет кручение $\tau(\mathcal{D}_i)^{(-1)^{n-1}}$, а последовательность (2.8) — кручение $\tau(\Delta_i)^{(-1)^{n-1}}$. В силу следствия 2

$$\tau_d(N_i'', N_{i-1}) = \tau_d(N_i'', N_i') \tau_d(N_i', N_{i-1}) \tau(\mathcal{D}_i)^{(-1)^n} = \tau(\mathcal{D}_i)^{(-1)^n}, \quad (2.11a)$$

$$\tau_{d_0}^{n-1, i} = \tau_d(N_i, N_i'') \tau_d(N_i'', N_{i-1}) \tau(\Delta_i)^{(-1)^n} = \tau(\mathcal{D}_i)^{(-1)^n} \tau(\Delta_i)^{(-1)^{n-1}}. \quad (2.11b)$$

Вычислим $\tau(\mathcal{D}_i)$. Напомним, что $\mathcal{D}_i = \begin{pmatrix} I - \rho(\alpha_i) \\ I \pm \rho(\beta_i) \end{pmatrix}$. Поскольку $\rho(\alpha_i), \rho(\beta_i) \in U(m)$ и $\rho(\alpha_i)\rho(\beta_i) = \rho(\beta_i)^{\pm 1}\rho(\alpha_i)$, то имеет место расщепление

$$\mathbb{C}^m = V_{\alpha_i} + V_{\beta_i} + \ker \mathcal{D}_i,$$

которое инвариантно относительно $\rho(\alpha_i)$ и $\rho(\beta_i)$ и таково, что отображения $I - \rho(\alpha_i): V_{\alpha_i} \rightarrow V_{\alpha_i}$ и $I \pm \rho(\beta_i): V_{\beta_i} \rightarrow V_{\beta_i}$ неособы. Пусть $\mathbf{k}_i, \mathbf{v}_{\alpha_i}$ и \mathbf{v}_{β_i} — базисы в $H^{n-1}(N_i, N_{i-1}) = \ker \mathcal{D}_i, V_{\alpha_i}$ и V_{β_i} соответственно. Пусть

$$W_i = (V_{\beta_i} + \ker \mathcal{D}_i) \oplus (V_{\alpha_i} + \ker \mathcal{D}_i).$$

Тогда $j: W_i \rightarrow H^n(N_i'', N_{i-1})$ — изоморфизм и, таким образом,

$$j[(\mathbf{v}_{\beta_i} \cup \mathbf{k}_i) \times \{0\}] \cup j[\{0\} \times (\mathbf{v}_{\alpha_i} \cup \mathbf{k}_i)]$$

— базис в $H^n(N_i'', N_{i-1})$. Отсюда

$$\begin{aligned} \tau(\mathcal{D}_i) &= \frac{\wedge(\mathcal{D}_i \mathbf{v}_{\alpha_i}, \mathcal{D}_i \mathbf{v}_{\beta_i}, (\mathbf{v}_{\beta_i} \cup \mathbf{k}_i) \times \{0\}, \{0\} \times (\mathbf{v}_{\alpha_i} \cup \mathbf{k}_i)) \otimes \wedge \mathbf{k}_i}{\wedge(\mathbf{v}_{\alpha_i}, \mathbf{v}_{\beta_i}, \mathbf{k}_i) \otimes \wedge(B_i[(\mathbf{v}_{\beta_i} \cup \mathbf{k}_i) \times \{0\}], B_i[\{0\} \times (\mathbf{v}_{\alpha_i} \cup \mathbf{k}_i)])} \\ &= \frac{\wedge((I - \rho(\alpha_i))\mathbf{v}_{\alpha_i}, \mathbf{v}_{\beta_i}, \mathbf{k}_i) \otimes \wedge(\mathbf{v}_{\alpha_i}, (I \pm \rho(\beta_i))\mathbf{v}_{\beta_i}, \mathbf{k}_i) \otimes \wedge \mathbf{k}_i}{\wedge(\mathbf{v}_{\alpha_i}, \mathbf{v}_{\beta_i}, \mathbf{k}_i) \otimes B_i^*(\wedge(\mathbf{v}_{\beta_i}, \mathbf{k}_i) \otimes \wedge(\mathbf{v}_{\alpha_i}, \mathbf{k}_i))}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Чтобы вычислить $\tau(\Delta_i)$, напомним, что $\mathcal{D}_i^* = (I \pm \rho(\beta_i), \rho(\alpha_i) - I)$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} W_i \cap \ker \mathcal{D}_i^* &= \ker \mathcal{D}_i \oplus \ker \mathcal{D}_i, \\ \mathcal{D}_i^*(\mathbb{C}^m \oplus \mathbb{C}^m) &= \mathcal{D}_i^*(W_i) = V_{\beta_i} + V_{\alpha_i}. \end{aligned}$$

Отсюда $\ker \Delta_i = B_i(\ker \mathcal{D}_i \oplus \ker \mathcal{D}_i)$ и $\operatorname{coker} \Delta_i = \operatorname{coker} \mathcal{D}_i^* = \ker \mathcal{D}_i$. Тогда

$$H^n(N_i, N_{i-1}) \cong \ker \mathcal{D}_i \oplus \ker \mathcal{D}_i, \quad H^n(N_i, N_{i-1}) = \ker \mathcal{D}_i$$

и, используя $\mathbf{k}_i \times \mathbf{k}_i$ и \mathbf{k}_i как базисы этих пространств, получаем

$$\tau(\Delta_i) = \frac{\wedge((I - \rho(\alpha_i))\mathbf{v}_{\alpha_i}, (I \pm \rho(\beta_i))\mathbf{v}_{\beta_i}, \mathbf{k}_i) \otimes (\wedge \mathbf{k}_i \otimes \wedge \mathbf{k}_i)}{B_i^*(\wedge(\mathbf{v}_{\beta_i}, \mathbf{k}_i) \otimes \wedge(\mathbf{v}_{\alpha_i}, \mathbf{k}_i)) \otimes \wedge \mathbf{k}_i} \quad (2.13)$$

Из соотношений (2.11)–(2.13) вытекает, что

$$\tau_{d_0^{n-1}, i} = 1. \quad \bullet$$

§3. R -кручение и связывающие градиентные линии

Перейдем к описанию компонент F_{ij}^* дифференциала d_1 . Пусть ψ_t — градиентный поток функции g . Мы можем построить индексную фильтрацию

$$\emptyset = K_{-1} \subset K_0 \subset L_1 \subset P_1 \subset K_1 \subset L_2 \subset P_2 \subset K_2 \subset K_3 = M$$

такую, что $L_1 \subset M_1 \subset L_2$, $P_1 \subset M_2 \subset P_2$ и

$$\begin{aligned} \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \psi_t(K_i \setminus K_{i-1}) &= C_i(g), & i = 0, 1, 2, 3; \\ \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \psi_t(L_i \setminus K_{i-1}) &= C_i(g) \cap M_1, & i = 1, 2; \\ \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \psi_t(P_i \setminus L_i) &= C_i(g) \cap (M_2 \setminus M_1), & i = 1, 2; \\ \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \psi_t(K_i \setminus P_i) &= C_i(g) \setminus M_2, & i = 1, 2. \end{aligned}$$

Имеем

$$H^i(K_i, K_{i-1}) = \bigoplus_{\text{index}(x)=i} \mathbb{C}^m x. \quad (3.1)$$

Заметим, что все компоненты $G_{xy}^* : \mathbb{C}^m x \rightarrow \mathbb{C}^m y$ дифференциалов d^K в цепном комплексе

$$0 \rightarrow H^0(K_0) \xrightarrow{d^K} H^1(K_1, K_0) \xrightarrow{d^K} H^2(K_2, K_1) \xrightarrow{d^K} H^2(M, K_2) \rightarrow 0 \quad (3.2)$$

задаются так же, как в уравнении (2.5) леммы 1.

Теорема 1. Для критических окружностей γ_i компоненты F_{ij}^k индуцируются следующими гомоморфизмами:

- (с.с) G_{w_i, w_j}^n и G_{z_i, z_j}^{n+1} для $k_{2n} < i \leq k_{2n+1}$ и $k_{2n+2} < j \leq k_{2n+3}$, $n = 0, 1$;
- (с.т) G_{w_i, q_j}^1 , G_{w_i, r_j}^1 и G_{z_i, s_j}^2 для $k_2 < i \leq k_3 < j \leq k_4$.

Для критических торов F_{c_i} компоненты F_{ij}^k индуцируются гомоморфизмами:

- (т.с) G_{p_i, w_j}^0 , G_{q_i, z_j}^1 и G_{r_i, z_j}^1 для $k_1 < i \leq k_2 < j \leq k_3$.

Доказательство. Рассмотрим диаграммы

$$\begin{array}{ccccc}
 H^1(M_1) & \xrightarrow{d_1} & H^2(M_2, M_1) & \xrightarrow{d_1} & H^3(M, M_2) \\
 \downarrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 H^1(L_1) & & H^2(P_2, M_1) & & \\
 \uparrow & & \uparrow & & \\
 H^1(L_1, K_0) & & H^2(P_2, K_1) & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 H^1(K_1, K_0) & \xrightarrow{d^K} & H^2(K_2, K_1) & \xrightarrow{d^K} & H^3(M, K_2)
 \end{array} \tag{3.3}$$

и

$$\begin{array}{ccccc}
 H^1(M_1) & \xrightarrow{d_1} & H^2(M_2, M_1) & \xrightarrow{d_1} & H^3(M, M_2) \\
 \downarrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 H^1(L_1) & & H^2(P_2, M_1) & & \\
 \uparrow & & \uparrow & & \\
 H^1(L_1, K_0) & & H^2(P_2, K_1) & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 H^1(K_1, K_0) & \xrightarrow{d^K} & H^2(K_2, K_1) & \xrightarrow{d^K} & H^3(M, K_2),
 \end{array} \tag{3.4}$$

где спускающиеся гомоморфизмы инъективны, а поднимающиеся сюръективны. Из (3.3) вытекает, что дифференциалы d_1 в

$$H^0(M_1) \xrightarrow{d_1} H^1(M_2, M_1) \xrightarrow{d_1} H^2(M, M_2)$$

индуцируются компонентами $H^0(K_0) \rightarrow H^1(P_1, L_1)$ и

$$H^1(P_1, L_1) = \bigoplus_{k_2 < i \leq k_3} \mathbb{C}^m w_i \rightarrow H^2(K_2, P_2) = \bigoplus_{k_4 < i} \mathbb{C}^m w_i \oplus \bigoplus_{k_3 < i \leq k_4} (\mathbb{C}^m q_i \oplus \mathbb{C}^m r_i)$$

дифференциалов d^K в (3.2). Из (3.4) вытекает, что дифференциалы d_1 в

$$H^1(M_1) \xrightarrow{d_1} H^2(M_2, M_1) \xrightarrow{d_1} H^3(M, M_2)$$

индуцируются компонентами

$$H^1(L_1, K_0) = \bigoplus_{i \leq k_1} \mathbb{C}^m z_i \oplus \bigoplus_{k_1 < i \leq k_2} (\mathbb{C}^m q_i \oplus \mathbb{C}^m r_i) \rightarrow H^2(P_2, L_2) = \bigoplus_{k_2 < i \leq k_3} \mathbb{C}^m z_i$$

и $H^2(P_2, L_2) \rightarrow H^3(M, K_2)$ дифференциалов d^K в (3.2). •

Рассмотрим член (E_2, d_2) спектральной последовательности, определенный в (1.8). По следствию 4 дифференциалы $d_2: E_2^{n,q} \rightarrow E_2^{n+2,q-1}$ могут быть ненулевыми только для $n = 0, q = 0, 1, 2$.

$$\begin{aligned} E_2^{0,q} &= \ker(d_1: H^q(M_1) \rightarrow H^{q+1}(M_2, M_1)), \quad q = 0, 1; \\ E_2^{0,2} &= H^2(M_1); \\ E_2^{1,q} &= \ker(d_1: H^{q+1}(M_2, M_1) \rightarrow H^{q+2}(M, M_2))/d_1(H^q(M_1)), \quad q = 0, 1; \\ E_2^{2,-1} &= H^1(M, M_2); \\ E_2^{2,q} &= H^{q+2}(M, M_2)/d_1(H^{q+1}(M_2, M_1)), \quad q = 0, 1. \end{aligned}$$

Теорема 2.

- (0) Дифференциал $d_2: E_2^{0,0} \rightarrow E_2^{2,-1}$ индуцируется компонентами $H^0(K_0) \rightarrow \bigoplus_{k_3 < i \leq k_4} \mathbb{C}^m p_i$ гомоморфизма $d^K: H^0(K_0) \rightarrow H^1(K_1, K_0)$.
- (1) Дифференциал $d_2: E_2^{0,1} \rightarrow E_2^{2,0}$ индуцируется компонентами

$$\bigoplus_{i \leq k_1} \mathbb{C}^m z_i \oplus \bigoplus_{k_1 < i \leq k_2} (\mathbb{C}^m q_i \oplus \mathbb{C}^m r_i) \rightarrow \bigoplus_{k_4 < i} \mathbb{C}^m w_i \oplus \bigoplus_{k_3 < i \leq k_4} (\mathbb{C}^m q_i \oplus \mathbb{C}^m r_i)$$

гомоморфизма $d^K: H^1(K_1, K_0) \rightarrow H^2(K_2, K_1)$.

- (2) Дифференциал $d_2: E_2^{0,2} \rightarrow E_2^{2,1}$ индуцируется компонентами

$$\bigoplus_{k_1 < i \leq k_2} \mathbb{C}^m s_i \rightarrow H^3(M, K_2)$$

гомоморфизма $d^K: H^2(K_2, K_1) \rightarrow H^3(M, K_2)$.

Доказательство. По (1.9) дифференциал $d_2: E_2^{0,q} \rightarrow E_2^{2,q-1}$ задается как композиция

$$j_{q-1}^{-1} \circ \delta_q |_{\text{im } k_q}: \text{im } k_q \rightarrow H^{q+1}(M, M_2) / \text{im } j_{q-1},$$

где $k_q: H^q(M_2) \rightarrow H^q(M_1)$ — гомоморфизм включения, $\delta_q: H^q(M_1) \rightarrow H^{q+1}(M, M_1)$ — кограница, $j_{q-1}: H^{q+1}(M, M_2) \rightarrow H^{q+1}(M, M_1)$ — гомоморфизм релятивизации и дифференциал $j_{q-1}: H^{q+1}(M, M_2) / \ker j_{q-1} \rightarrow$

$\text{im } j_{q-1}$ — естественный изоморфизм. Рассмотрим следующие диаграммы (3.5)–(3.7):

$$\begin{array}{ccccc}
 E_2^{0,0} & \xrightarrow{\delta_0 | \text{im } k_0} & \text{im } j_{-1} & \xleftarrow{j^{-1}} & E_2^{2,-1} \\
 \cap & & \cap & & \uparrow \\
 H^0(M_1) & \xrightarrow{\delta_0} & H^1(M, M_1) & \xleftarrow{j^{-1}} & H^1(M, M_2) \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 & & & & H^1(M, P_1) \\
 & & & & \downarrow \\
 & & & & H^1(K_1, P_1) \\
 & & & & \downarrow \\
 H^0(K_0) & \xrightarrow{d^K} & & & H^1(K_1, K_0),
 \end{array} \tag{3.5}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 E_2^{0,1} & \xrightarrow{\delta_1 | \text{im } k_1} & \text{im } j_0 & \xleftarrow{j^0} & E_2^{2,0} \\
 \cap & & \cap & & \uparrow \\
 H^1(M_1) & \xrightarrow{\delta_1} & H^2(M, M_1) & \xleftarrow{j^0} & H^2(M, M_2) \\
 \downarrow & & & & \uparrow d^1 \\
 H^1(L_1) & & & & H^2(M, P_2) \\
 \uparrow & & & & \downarrow \\
 H^1(L_1, K_0) & & & & H^2(K_2, P_2) \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 H^1(K_1, K_0) & \xrightarrow{d^K} & & & H^2(K_2, K_1),
 \end{array} \tag{3.6}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 E_2^{0,2} & \xrightarrow{\delta_2 | \text{im } k_2} & \text{im } j_1 & \xleftarrow{j^1} & E_2^{2,1} \\
 \cap & & \cap & & \uparrow \\
 H^2(M_1) & \xrightarrow{\delta_2} & H^3(M, M_1) & \xleftarrow{j^1} & H^3(M, M_2) \\
 \uparrow & & & & \uparrow \\
 H^2(L_2) & & & & \\
 \uparrow & & & & \\
 H^2(L_2, K_1) & & & & \\
 \uparrow & & & & \\
 H^2(K_2, K_1) & \xrightarrow{d^K} & & & H^3(M, K_2),
 \end{array} \tag{3.7}$$

где так же, как в теореме 1, спускающиеся гомоморфизмы инъективны, а поднимающиеся — сюръективны. Из (3.5) и того, что $H^1(K_1, P_1) = \bigoplus_{k_3 < i \leq k_4} \mathbb{C}^m p_i$, следует утверждение (0). Из (3.6) и того, что

$$H^1(L_1, K_0) = \bigoplus_{i \leq k_1} \mathbb{C}^m z_i \oplus \bigoplus_{k_1 < i \leq k_2} \mathbb{C}^m q_i \oplus \mathbb{C}^m r_i$$

и

$$H^2(K_2, P_2) = \bigoplus_{k_4 < i} \mathbb{C}^m w_i \oplus \bigoplus_{k_3 < i \leq k_4} \mathbb{C}^m q_i \oplus \mathbb{C}^m r_i,$$

получаем утверждение (1). Из (3.6) и того, что $H^2(L_2, K_1) = \bigoplus_{k_1 < i \leq k_2} \mathbb{C}^m s_i$, получаем (2). •

§4. Примеры

Мы рассмотрим отдельные случаи движения твердого тела. Уравнения Эйлера–Пуассона, описывающие движение твердого тела вокруг неподвижной точки в гравитационном поле, имеют вид

$$\begin{aligned} A\dot{\omega} &= A\omega \times \omega + \nu \times C, \\ \dot{\nu} &= \nu \times \omega, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где ω — угловая скорость в репере тела, матрица A — момент инерции, и мы можем считать, что она диагональна, C — центр масс и ν — единичный вектор вдоль вертикальной оси в фиксированном репере. Более общо, уравнения движения гироскопа в гравитационном поле имеют вид

$$\begin{aligned} A\dot{\omega} &= (A\omega + \lambda) \times \omega + \nu \times C, \\ \dot{\nu} &= \nu \times \omega. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Система (4.2) имеет следующие интегралы:

$$f_1 = |\nu|^2, \quad f_2 = \langle A\omega + \lambda, \nu \rangle, \quad H = \frac{1}{2} \langle A\omega, \omega \rangle + \langle \nu, c \rangle.$$

Погрузим систему (4.2) в двойственное пространство $e(3)^* \cong \mathbb{R}^6$ к алгебре Ли ортогональной группы. Множество

$$N_{g,\lambda} = \{(\nu, A\omega + \lambda) : f_1(\nu, \omega) = 1, f_2(\nu, \omega) = g\}$$

является коприсоединенной орбитой и, таким образом, симплектическим слоем пуассонова многообразия $e(3)^*$. Система (4.2) превращается в гамильтонову систему

$$\begin{aligned} \dot{R} &= \frac{\partial H}{\partial S} \times S + \frac{\partial H}{\partial R} \times R, \\ \dot{S} &= \frac{\partial H}{\partial S} \times R. \end{aligned} \quad (4.3)$$

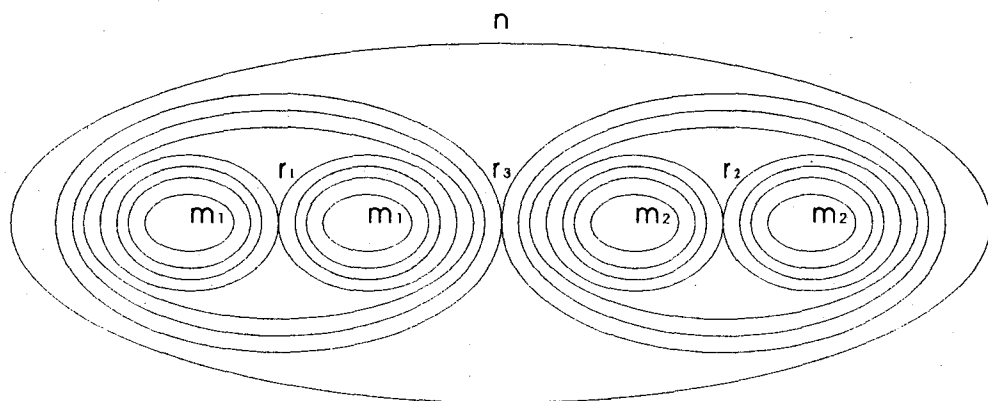
Пример 1. Случай Ковалевской в уравнениях (4.1) соответствует условиям $A_1 = A_2 = 2A_3$ и $C = (c, d, 0)$, которые мы нормализуем к виду $A_1 = c = 1$, $d = 0$. В этом случае (4.3) допускает независимый интеграл

$$K = \left(\frac{S_1^2 - S_2^2}{2} - R_1 \right)^2 + (S_1 S_2 - R_2)^2$$

с $\{H, K\} = 0$. При $h > g^2 + 1/(2g^2)$

$$M = \{(R, S) \in N_{g,0} : H(R, S) = h\}$$

является трехмерным вещественным проективным пространством $\mathbb{R}P^3$, и, таким образом, $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_2$. Пусть $\rho: \pi_1(M) \rightarrow U(1)$ — нетривиальное представление. Критическими множествами интеграла $K: M \rightarrow \mathbb{R}$ являются две минимальные окружности m_1 и m_2 с $\rho(m_i) = 1$, одна ориентируемая и две неориентируемые седловые окружности r_1, r_2 и r_3 с $\rho(r_j) = -1$ и одна максимальная окружность n с $\rho(n) = -1$. Семейство торов, начинающееся в m_i , переходит в семейство торов \mathcal{F}_i после пересечения окружности $r_i, i = 1, 2$. Семейства торов \mathcal{F}_1 и \mathcal{F}_2 встречаются после пересечения r_3 и становятся одним семейством торов.



Так как $\Delta(r_1) = \Delta(r_2) = -1$ и $\Delta(r_3) = 1$, то

$$H^k(M_1) = \begin{cases} \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}, & \text{если } k = 0, 1, \\ 0, & \text{если } k \neq 0, 1; \end{cases}$$

$$H^k(M_2, M_1) = \begin{cases} \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}, & \text{если } k = 1, 2, \\ 0, & \text{если } k \neq 1, 2; \end{cases}$$

$$H^*(M, M_2) = 0;$$

$$\tau_{d_0^0, i} = \tau_{d_0^1, i} = 1, i = 1, 2, \tau_{d_0^1, 3} = \frac{1}{2}, \tau_{d_0^2} = 2 \implies \tau_{d_0} = 1.$$

Чтобы вычислить $d_1: H^k(M_1) \rightarrow H^{k+1}(M_2, M_1), k = 0, 1$, преобразуем интеграл Ботта K в функцию Морса-Смейла f . Заметим, что при $i = 1, 2$ многообразие $W^u(r_i)$ является лентой Мёбиуса Σ_i с краем $\partial\Sigma_i = m_i$. Функция f имеет на m_i критические точки w_i и z_i индексов 0 и 1 и на r_i — критические точки η_i и ζ_i индексов 1 и 2 соответственно. Имеется одна орбита α_i , связывающая ζ_i с z_i , и две орбиты β_i и δ_i , связывающие η_i с w_i ,

причем $\rho(\alpha_i) = 1$, $\rho(\beta_i) = 1$ и $\rho(\delta_i) = -1$. Таким образом, $(G_{w_i, \eta_i} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}) = 2$ и $(G_{z_i, \zeta_i} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}) = 1$.

Следовательно,

$$(d_1 : H^0(M_1) \rightarrow H^1(M_2, M_1)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

и

$$(d_1 : H^1(M_1) \rightarrow H^2(M_2, M_1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда $E_2^{**} = 0$ и $\tau_{d_1} = 2 \cdot 2/1 = 4$.

Пример 2. Случай Сретенского в уравнениях (4.2) соответствует тому, что $A_1 = A_2 = 4A_3$, $C = (c, d, 0)$ и $\lambda = (0, 0, l)$, что мы нормализуем к виду $A_1 = c = 1$, $d = 0$. В этом случае система (4.2) интегрируема только для $g = 0$. Независимым интегралом с $\{H, K\} = 0$ является функция

$$K = (S_3 + l)(S_1^2 + S_2^2) - S_1 R_3.$$

Многообразии

$$M = \{(R, S) \in N_{0,3/4} : H(R, S) = 0, 97\}$$

является связной суммой двух экземпляров $S^2 \times S^1$, и, таким образом, $\pi_1(M)$ — свободная группа с двумя образующими α_1, α_2 . Критическими множествами интеграла $K : M \rightarrow \mathbb{R}$ являются одна стягиваемая минимальная окружность m , две ориентируемые и одна стягиваемая седловые окружности r_1, r_2 и r_3 и три максимальные окружности $n_1 \cong \alpha_1$, $n_2 \cong \alpha_2$ и $n_3 \cong \alpha_1 \alpha_2$. Семейство торов, начинающееся в m , переходит в семейство торов \mathcal{F} после пересечения с r_1 . Когда семейство \mathcal{F} пересекает r_2 и r_3 одновременно, оно расщепляется на три семейства торов, оканчивающиеся на трех максимальных окружностях. Пусть $\rho : \pi_1(M) \rightarrow U(p)$ — такое представление, что $\det(I - \rho(\alpha_i)), \det(I - \rho(\alpha_1 \alpha_2)) \neq 0$. Тогда

$$H^k(M_1) = \begin{cases} \mathbb{C}^p, & \text{если } k = 0, 1, \\ 0, & \text{если } k \neq 0, 1; \end{cases}$$

$$H^k(M_2, M_1) = \begin{cases} \mathbb{C}^p \oplus \mathbb{C}^p, & \text{если } k = 1, 2, \\ 0, & \text{если } k \neq 1, 2; \end{cases}$$

$$H^*(M, M_2) = 0;$$

$$\tau_{d_0^0} = \tau_{d_0^{1,i}} = 1, \quad i = 2, 3, \quad \tau_{d_0^{1,1}} = \frac{1}{2};$$

$$\tau_{d_0^2} = \det(I - \rho(\alpha_1)) \det(I - \rho(\alpha_2)) \det(I - \rho(\alpha_1 \alpha_2)).$$

Чтобы вычислить $d_1 : H^k(M_1) \rightarrow H^{k+1}(M_2, M_1)$, $k = 0, 1$, преобразуем интеграл Ботта K в функцию Морса-Смейла f . Функция f имеет на m критические

точки w и z индексов 0 и 1, а на r_i — критические точки η_i и ζ_i индексов 1 и 2 соответственно. Имеются две орбиты β_i и γ_i , связывающие ζ_i с z и такие, что $\rho(\beta_i) = \rho(\alpha_i)$ и $\rho(\gamma_i) = I$, и две орбиты δ_i и ε_i , связывающие η_i с w и такие, что $\rho(\delta_i) = \rho(\alpha_i)$ и $\rho(\varepsilon_i) = I$. Следовательно,

$$(d_1: H^0(M_1) \rightarrow H^1(M_2, M_1)) = \begin{pmatrix} I - \rho(\alpha_1) \\ I - \rho(\alpha_2) \end{pmatrix}$$

и

$$(d_1: H^1(M_1) \rightarrow H^2(M_2, M_1)) = \begin{pmatrix} I - \rho(\alpha_1) \\ I - \rho(\alpha_2) \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$E_2^{s,q} = \begin{cases} H^{1+q}(M_2, M_1)/d_1(H^q(M_1)) \cong \mathbb{C}^p, & \text{если } s = 1 \text{ и } q = 0, 1, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (4.4)$$

и затем

$$H^q(M) = \begin{cases} E_2^{1,q-1}, & \text{если } q = 1, 2, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (4.5)$$

Пусть $\mathbf{h} = \{h_1, \dots, h_p\}$ — базис, дополнительный к $\text{im} \begin{pmatrix} I - \rho(\alpha_1) \\ I - \rho(\alpha_2) \end{pmatrix}$. Обозначим через $[\mathbf{h}_1]$ и $[\mathbf{h}_2]$ соответствующие базисы в $H^1(M)$ и $H^2(M)$. Тогда

$$\tau_{d_1} = \frac{\wedge[\mathbf{h}_2]}{\wedge[\mathbf{h}_1]}.$$

Список литературы

- [1] Fel'shtyn A. L., *Attractors, integrable Hamiltonian systems, and the Reidemeister torsion*, Seminar on Dynamical Systems (St. Petersburg, 1991), Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., vol. 12, Birkhäuser, Basel, 1994, pp. 227-234.
- [2] Floer A., *Witten's complex and infinite-dimensional Morse theory*, J. Differential Geom. 30 (1989), 207-221.
- [3] Фоменко А. Т., Цишант Х., *О топологии трехмерных многообразий, возникающих в гамильтоновой механике*, Докл. АН СССР 294 (1987), №2, 283-287.
- [4] Фоменко А. Т., *Симплектическая геометрия. Методы и приложения*, МГУ, М., 1988.
- [5] Freed D., *Reidemeister torsion, spectral sequences, and Brieskorn spheres*, J. Reine Angew. Math. 429 (1992), 75-89.
- [6] Fried D., *Lefschetz formulas for flows*, The Lefschetz Centennial Conference, Pt. III (Mexico City, 1984), Contemp. Math., vol. 58, III, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, pp. 19-69.
- [7] Milnor J., *Infinite cyclic coverings*, Conference on the Topology of Manifolds (Michigan State Univ., E. Lansing, Mich., 1967), Prindle, Weber, and Schmidt, Boston, MA, 1968, pp. 115-133.
- [8] Milnor J., *Whitehead torsion*, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), 358-426.

- [9] Reidemeister K., *Homotopieringe und Linsenräume*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 11 (1935), 102-109.
- [10] Ray D., Singer I., *R-torsion and the Laplacian on Riemannian manifolds*, Adv. Math. 7 (1971), 145-210.
- [11] Sánchez-Morgado H., *Reidemeister torsion and Morse-Smale flows*, Ergodic Theory Dynam. Systems 16 (1996), 405-414.
- [12] Waldhausen F., *Eine Klasse von drei-dimensionalen Mannigfaltigkeiten*. I, II, Invent. Math. 3 (1967), 308-333.

Institut für Mathematik,
E.-M.-Arndt-Universität Greifswald
Jahnstrasse 15a, D-17489 Greifswald, Germany
E-mail: felshtyn@rz.uni-greifswald.de

Поступило 31 августа 1998 г.

Instituto de Matemáticas, UNAM
Ciudad Universitaria C. P. 04510
Cd. de México

Current: CIMAT
A.P. 402 C.P. 36000
Guanajuato. Gto.
México

E-mail: hector@matem.unam.mx