А. Я. Белецкий, Об одном процессе восстановления, *Изв. вузов. Матем.*, 1968, номер 3, 17–19

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1968 МАТЕМАТИКА № 3 (70)

УДК 519.21

А. Я. Белецкий

ОБ ОДНОМ ПРОЦЕССЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Пусть имеется некоторый элемент, время жизни которого (случайная величина Y) распределено по закону $Q(t)$, т. е. $Q(t) = P(Y < t)$, $t \geqslant 0$. После отказа элемент заменяется эквивалентным. Предположим, что время, затрачиваемое на замену, пренебрежимо мало по сравнению с временем жизни элемента, и поэтому можно считать, что восстановление происходит мгновенно. Предположим, кроме того, что через случайные промежутки времени X, такие, что $F(t) = P(X < t)$, $t \geqslant 0$, производится принудительная замена (возможно исправного) элемента. Относительно функций $Q(t)$ и $F(t)$ условимся, что их производные $q(t)$ и $f(t)$ существуют.

Пусть $\chi_{n,k}$ есть время, в течение которого произошло n принудительных восстановлений и k отказов элемента.

Наша задача заключается в определении функции $G_{n,k}(t) = P(\chi_{n,k} < t)$, $t \geqslant 0$, и получении на ее основе ряда числовых характеристик потока восстановления.

Пусть $g_k(t)$ — условная плотность вероятности того, что в момент времени t производится первое принудительное восстановление, а за время $(0, t)$ произошло k отказов элемента. Таким образом,

$$g_k(t) = f(t)\, Q_k(t), \tag{1}$$

где $Q_k(t)$ — вероятность того, что в промежутке времени $(0, t)$ имеет место k последовательных отказов элемента. Для функции $Q_k(t)$ справедливо $Q_k(t) = \int\limits_0^t q(\tau)\, Q_{k-1}(t-\tau)\, d\tau$; $Q_0(t) = 1 - Q(t)$. Очевидно, что

$$G_{n,k}(t) = \sum_{j=0}^{k} \int\limits_0^t g_j(\tau)\, G_{n-1,\, k-j}(t-\tau)\, d\tau, \quad n \geqslant 1. \tag{2}$$

Обозначим для произвольной функции $\alpha(t)$ ее преобразование Лапласа через

$$\alpha^*(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st}\, \alpha(t)\, dt. \tag{3}$$

Тогда из уравнения (2) следует, что

$$\left.\begin{aligned}
&G^*_{n,0}(s) = g^*_0(s)\, G^*_{n-1,0}(s),\\
&G^*_{n,1}(s) = g^*_0(s)\, G^*_{n-1,1}(s) + g^*_1(s)\, G^*_{n-1,0}(s),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&G^*_{n,k}(s) = g^*_0(s)\, G^*_{n-1,k}(s) + g^*_1(s)\, G^*_{n-1,k-1}(s) + \dots + g^*_k(s)\, G^*_{n-1,0}(s).
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Введем производящую функцию $G^*(x, y, s)$ по формуле

$$G^*(x, y, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x^n y^k G^*_{n, k}(s). \tag{5}$$

Пусть

$$G^*_n(y, s) = \sum_{k=0}^{\infty} y^k G^*_{n, k}(s). \tag{6}$$

Из системы уравнений (4) легко получим

$$G^*_n(y, s) = G^*_{n-1}(y, s) \sum_{k=0}^{\infty} y^k g^*_k(s),$$

или

$$G^*_n(y, s) = G^*_0(y, s) \left[\sum_{k=0}^{\infty} y^k g^*_k(s)\right]^n. \tag{7}$$

Тогда

$$G^*(x, y, s) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n G^*_n(y, s).$$

Откуда

$$G^*(x, y, s) = \frac{G^*_0(y, s)}{1 - x \sum\limits_{k=0}^{\infty} y^k g^*_k(s)}. \tag{8}$$

Очевидно, что

$$G_{0, k}(t) = [1 - F(t)]\, Q_k(t). \tag{9}$$

Подставив выражения (1) и (9) в (8), с учетом формул (3) и (6), и вынося символ интеграла из-под знака суммирования, получим окончательно

$$G^*(x, y, s) = \frac{\int\limits_0^{\infty} e^{-st} [1 - F(t)] \sum\limits_{k=0}^{\infty} y^k Q_k(t)\, dt}{1 - x \int\limits_0^{\infty} e^{-st} f(t) \sum\limits_{k=0}^{\infty} y^k Q_k(t)\, dt}. \tag{10}$$

Пример 1. Требуется определить среднее число принудительных восстановлений элемента $H(t)$ за промежуток времени $(0, t)$. Легко показать, что

$$H^*(s) = \left.\frac{\partial G^*(x, 1, s)}{\partial x}\right|_{x=1}.$$

Учитывая, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} Q_k(t) = 1$, из уравнения (10) находим

$$H^*(s) = \frac{f^*(s)}{s\,[1 - f^*(s)]}.$$

Обращая последнее уравнение, получим известное [1] выражение для функции восстановления $H(t) = F(t) + \int\limits_0^t H(t - \tau)\, dF(\tau)$.

Пример 2. Пусть $q(t)=\lambda e^{-\lambda t}$, $t\geqslant 0$, где λ — интенсивность отказов. Определим среднее число отказов элемента $N(t)$ за промежуток времени $(0, t)$. Нетрудно убедиться, что $N^*(s)= = \left.\frac{\partial G^*(1, y, s)}{\partial y}\right|_{y=1}$. При экспоненциальном законе времени жизни элемента $\sum\limits_{k=0}^{\infty} kQ_k(t)=\lambda t$. С учетом последнего выражения (после несложных вычислений) из уравнения (10) получим $N^*(s)=\lambda/s^2$. Следовательно, $N(t)=\lambda t$. В самом деле, поскольку интенсивность отказов элементов при экспоненциальном законе распределения времени их жизни остается постоянной, то поток принудительных замен любой интенсивности не может изменить среднего числа отказов элемента за промежуток времени $(0, t)$.

г. Киев

Поступило
24 XII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Смит В. Л. Теория восстановления и смежные с ней вопросы. В сб. переводов: Математика, т. 5, № 3, 1961.

И. Ю. РЫЖАКОВ. ОБ ОТЫСКАНИИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО МНОЖЕСТВА В НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ СЛУЧАЯХ

(*аннотация статьи, принятой к печати*)

Пусть $\pi_n(z)$ — полином, наименее уклоняющийся от нуля на заданном множестве B среди полиномов $P_n(z)=\sum\limits_{k=0}^{n} c_k z^k$; коэффициенты которых удовлетворяют линейной зависимости $\sum\limits_{k=0}^{4} c_k\lambda_k=1$. В статье рассматривается: I) для случая, когда B есть круг $|z|\leqslant 1$, критерий того, что $\pi_n(z)=\frac{1}{\lambda_p}z^p$, $0\leqslant p\leqslant n$. При выполнении этого критерия приводится способ отыскания характеристического множества; II) для произвольного B — условие, необходимое для существования характеристического множества, число точек которого не превосходит $\left[\frac{n}{2}\right]$. Если это условие выполнено, приводится способ отыскания множества $\{z_j\}_1^m$, $1\leqslant m\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$, такого, что имеет место альтернатива: или это множество характеристическое, или всякое характеристическое множество состоит более чем из $\left[\frac{n}{2}\right]$ точек. Решается также следующая задача: среди тригонометрических полиномов $T_n(t)=\sum\limits_{k=0}^{n}(a_k\cos kt+ + b_k\sin kt)$ порядка не выше n с двумя закрепленными коэффициентами a_h и b_h найти полином, наименее уклоняющийся от нуля на $[-\pi, \pi]$. Доказано, в частности, что величина наименьшего уклонения равна $\frac{l+1}{2}\sqrt{a_h^2+b_h^2}\,\operatorname{tg}\frac{\pi}{2(l+1)}$, где $l=\left[\frac{n+h}{2h}\right]$. (Работа поступила в журнал „Математика“ 26.IV.1967.)