ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 12 Сентябрь 1972 Октябрь № 5

УДК 518 : 519.3 : 62-50

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАЗЫСКАНИЯ СЕДЛОВЫХ ТОЧЕК

В. Ф. ДЕМЬЯНОВ, А. Б. ПЕВНЫЙ

(Ленинград)

Рассматриваются методы разыскания седловых точек и изучается дифференцируемость по направлениям функции максимума в случае, когда максимум берется по множеству, зависящему от переменной состояния.

Введение

Задачи нахождения седловых точек — это большой класс задач, с которыми приходится сталкиваться как в разного рода игровых ситуациях [1, 2], так и в собственно математических проблемах, например в задаче нахождения седловых точек функции Лагранжа [3].

Настоящий обзор не претендует на полноту. Так, мы не рассматриваем связей между матричными играми и линейным программированием [4]. Цель статьи — дать общую формулировку нескольких методов для разыскания седловых точек и строго сформулировать условия их сходимости. Нам кажется, что полученные чисто теоретические результаты о сходимости методов проливают свет и на вычислительный аспект проблемы. При этом мы ограничиваемся конечномерным случаем, хотя ряд результатов может быть перенесен и на бесконечномерный случай.

Заметим также, что почти все изложенные ниже результаты переносятся на случай вогнутых игр n лиц [5–8].

§ 1. Понятие седловой точки

Пусть задано множество $\Omega \subset E^n = E^{n_1} \times E^{n_2}$, $n = n_1 + n_2$. Через P_i обозначим проекцию Ω на E^{n_i}, $i = 1, 2$, и рассмотрим прямое произведение $S = P_1 \times P_2$. Ясно, что $\Omega \subset S$. Пусть на S задана функция $f(x, y)$, $x \in P_1 \subset E^{n_1}$, $y \in P_2 \subset E^{n_2}$. Точка $[x^*, y^*] \in \Omega$ называется седловой точкой f на Ω, если

$$f(x^*, y) \leqslant f(x^*, y^*) \leqslant f(x, y^*)$$

для всех $[x^*, y] \in \Omega$ и $[x, y^*] \in \Omega$ (см. [1–3]). Положим $z = [x, y]$, $w = [u, v]$ и, как в [5–10], введем функцию

$$\Phi(z, w) = f(u, y) - f(x, v).$$

Нетрудно проверить, что если $z^* = [x^*, y^*] \in \Omega$ и

$$\min_{w \in \Omega} \Phi(z^*, w) = \Phi(z^*, z^*) = 0, \tag{1.1}$$

то z^* является седловой точкой f на Ω. Если же

$$\min_{w\in\Omega} \Phi(z^*, w) \geqslant -\varepsilon, \qquad \varepsilon \geqslant 0,$$

то выполняются неравенства

$$f(x^*, y) - \varepsilon \leqslant f(x^*, y^*) \leqslant f(x, y^*) + \varepsilon$$

для всех $[x^*, y] \in \Omega$ и $[x, y^*] \in \Omega$.

Обратно, если $\Omega = S = P_1 \times P_2$, то всякая седловая точка удовлетворяет условию (1.1). В случае же $\Omega \neq S$ мы будем рассматривать исключительно седловые точки, удовлетворяющие условию (1.1), и будем писать просто «седловая точка» вместо «седловая точка, удовлетворяющая условию (1.1)» (в [5–8] такие точки названы нормализованными седловыми точками).

Везде в настоящей статье предполагается, если не оговорено противное, что Ω — выпуклый компакт (тогда и проекции P_1 и P_2 будут выпуклыми компактами), а функция $f(x, y)$ непрерывна на S и выпукло-вогнута на $S = P_1 \times P_2$, т. е. при любом фиксированном $y \in P_2$ выпукла по x на P_1 и при любом фиксированном $x \in P_1$ вогнута по y на P_2. При этих предположениях справедлива

Теорема 1.1. *Седловые точки f на Ω существуют.*

Доказательство [5, 7]. Рассмотрим отображение

$$w(z) = \{w \in \Omega \mid \Phi(z, w) = \min_{w'\in\Omega} \Phi(z, w')\}.$$

Из непрерывности и выпуклости по w' функции $\Phi(z, w')$ следует, что отображение $w(z)$ полунепрерывно сверху [2, 11]. Тогда по теореме Какутани о неподвижной точке [2, 11] существует точка $z^* \in \Omega$, для которой $z^* \in w(z^*)$, т. е.

$$\min \Phi(z^*, w) = \Phi(z^*, z^*).$$

Поэтому точка z^* является седловой точкой f на Ω.

В § 2—6, 8, 11 будем предполагать, что f непрерывно дифференцируема на S, и использовать обозначение

$$h(z) = \Phi_w(z, z) = [f_x(x, y), -f_y(x, y)].$$

Теорема 1.2. *Если выполнено условие*

$$(h(z+w) - h(z), w) > 0, \qquad w \neq 0, \qquad z, z+w \in \Omega, \tag{1.2}$$

то седловая точка f на Ω единственна.

Доказательство [7]. Заметим, что для седловой точки $z^* \in \Omega$ справедливо равенство

$$\min_{w\in\Omega} (h(z^*), w - z^*) = 0,$$

так как противное означало бы существование направления спуска функции $\Phi(z^*, w)$, не выводящего из Ω, что противоречит (1.1). Допустим, что существуют две седловые точки z_1 и z_2. Тогда

$$(h(z_1), z_2 - z_1) \geqslant 0, \qquad (h(z_2), z_1 - z_2) \geqslant 0,$$
$$(h(z_1) - h(z_2), z_1 - z_2) \leqslant 0.$$

В силу (1.2), $z_1 = z_2$. Теорема доказана.

Заметим, что если функция $f(z)$ дважды непрерывно дифференцируема на Ω и сильно выпукло-вогнута, т. е.

$$(1.3) \qquad (f_{xx}(z)u, u) \geqslant m\|u\|^2, \qquad (-f_{yy}(z)v, v) \geqslant m\|v\|^2, \qquad m > 0,$$

то условие (1.2) выполнено. Действительно,

$$(h'(z)w, w) = (f_{xx}(z)u, u) - (f_{yy}(z), v, v) \geqslant m(\|u\|^2 + \|v\|^2) = $$
$$= m\|w\|^2,$$
$$(h(z+w) - h(z), w) = (h'(z+\theta w)w, w) \geqslant m\|w\|^2,$$
$$0 < \theta < 1.$$

Сделаем два замечания о структуре алгоритмов в § 2—6. Если $\Omega = P_1 \times P_2$, то при сделанных предположениях всякая точка $[x^*, y^*] \in \Omega$, для которой

$$(1.4) \qquad \min_{x \in P_1} \max_{y \in P_2} f(x, y) = \max_{y \in P_2} f(x^*, y),$$

$$(1.5) \qquad \max_{y \in P_2} \min_{x \in P_1} f(x, y) = \min_{x \in P_1} f(x, y^*),$$

является седловой точкой f на Ω. Поэтому для нахождения седловой точки достаточно найти минимакс (1.4) и максимин (1.5). Однако в обычных методах нахождения минимакса и максимина на каждом шаге приходится решать внутренние задачи в (1.4) и (1.5). В методах же § 2—6 осуществляется одновременное движение по x и y и не нужно находить ни максимум $f(x_k, y)$ по y, ни минимум $f(x, y_k)$ по x.

Необходимые условия седловой точки и методы § 2—6, 9 являются обобщением необходимых условий минимума и методов минимизации. Если функция $f(x, y)$ не зависит от y, т. е. $f(x, y) = \varphi(x)$, то задача нахождения седловых точек f на Ω есть задача минимизации φ на P_1 и метод нахождения седловой точки переходит в соответствующий метод минимизации.

Изучим вначале подробно случай $\Omega = E^n$, который будет служить нам моделью для построения методов при наличии ограничений.

§ 2. Нахождение седловых точек на всем пространстве

Рассмотрим случай, когда $\Omega = E^n = E^{n_1} \times E^{n_2}$, а $f(x, y)$ дифференцируема и выпукло-вогнута на E^n. Очевидно, для того чтобы точка z^* была седловой точкой f на E^n, необходимо и достаточно, чтобы $h(z^*) = 0$.

Для нахождения z^* можно использовать то обстоятельство, что при некоторых условиях решение $z(t)$ дифференциального уравнения

$$(2.1) \qquad \dot z = -h(z), \qquad z(0) = z_0$$

сходится к z^* при $t \to \infty$. Изучим эти условия. Пусть $f(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема на E^n и

$$(2.2) \qquad (f_{xx}(x,\ y)u,\ u) \geqslant m\|u\|^2, \quad (f_{yy}(x,\ y)v,\ v) \leqslant -m\|v\|^2, \quad m > 0,$$

для всех $[x,\ y]$ и $[u,\ v]$ из E^n. Тогда

$$(h'(z)w, w) \geqslant m\|w\|^2, \qquad z, w \in E^n,$$

и для решения $z = z(t)$ уравнения (2.1) и функции $F(z) = {}^1/_2\|h(z)\|^2$ имеем

$$\dot F(z) = -(h'(z)h(z),\ h(z)) \leqslant -m\|h(z)\|^2 = -2mF(z),$$
$$F(z(t)) \leqslant F(z_0)e^{-2mt}, \qquad \|h(z(t))\| \leqslant \|h(z_0)\|e^{-mt},$$

$$\|z(t_1) - z(t_2)\| = \left\|\int_{t_2}^{t_1} h(z(t))\,dt\right\| \leqslant \frac{1}{m}\|h(z_0)\|\,|e^{-mt_1} - e^{-mt_2}|.$$

Отсюда следует, что $z(t)$ сходится к некоторой точке z^* при $t \to \infty$. Так как $\|h(z^*)\| = \lim \|h(z(t))\| = 0$, то z^* — седловая точка f на Ω. Мы доказали, что при условиях (2.2) седловая точка $f(x,\ y)$ на всем пространстве E^n существует.

Далее, учитывая, что $(\Phi_{ww}g,\ g) \geqslant m\|g\|^2$, имеем

$$0 \geqslant \Phi(z, z^*) - \Phi(z, z) = (\Phi_w(z, z), z^* - z) +$$
$$+\frac{1}{2}(\Phi_{ww}(z^* - z), z^* - z) \geqslant (h(z), z^* - z) + \frac{m}{2}\|z - z^*\|^2,$$

$$(2.3) \qquad \|z - z^*\| \leqslant \frac{2}{m}\|h(z)\|,$$

$$\|z(t) - z^*\| \leqslant \frac{2}{m}\|h(z_0)\|e^{-mt}.$$

Итак, $\|z(t) - z^*\|$ убывает не медленнее e^{-mt}. Заметим, что из оценки (2.3) следует единственность z^*. На основе этого непрерывного метода можно построить следующий дискретный метод. Пусть выполнены условия (2.2) и

$$(2.4) \qquad \|f_{xx}(z)\| \leqslant M, \quad \|f_{yy}(z)\| \leqslant M, \quad \|f_{xy}(z)\| \leqslant M, \quad z \in E^n.$$

Начиная с произвольной точки $z_0 \in E^n$, строим последовательность $\{z_k\}$ следующим образом:

$$(2.5) \qquad z_{k+1} = z_k - \alpha_k h(z_k),$$

$$(2.6) \qquad \alpha_k \in \left[\varepsilon_1, \frac{m - \varepsilon_2}{2M^2}\right], \qquad \varepsilon_1 > 0, \qquad \varepsilon_2 > 0.$$

Аналогичные методы для этой и других задач рассматривались в [3, 12–14].

Теорема 2.1. *При сделанных предположениях $\{z_k\}$ сходится к z^* со скоростью геометрической прогрессии.*

Доказательство. На луче $z_{k\alpha} = z_k - \alpha h(z_k)$, $\alpha \geqslant 0$, имеем

$$\frac{d}{d\alpha} F(z_{k\alpha}) = -(h'(z_{k\alpha}) h(z_{k\alpha}), h(z_k)) =$$
$$= -(h'(z_{k\alpha}) h(z_k), h(z_k)) - (h'(z_{k\alpha})(h(z_{k\alpha}) - h(z_k)), h(z_k)).$$

Используя условия (2.2) и (2.4), нетрудно получить, что

(2.7) $$(h'(z) w, w) \geqslant m\|w\|^2, \qquad \|h'(z)\| \leqslant 2M,$$

(2.8) $$\|h(z) - h(z_1)\| \leqslant 2M\|z - z_1\|, \qquad z, z_1, w \in E^n.$$

Поэтому

$$\frac{d}{d\alpha} F(z_{k\alpha}) \leqslant -m\|h(z_k)\|^2 + 4M^2\alpha\|h(z_k)\|^2,$$
$$F(z_{k\alpha}) \leqslant F(z_k)[1 - 2m\alpha + 4M^2\alpha^2].$$

Для α_k, удовлетворяющих (2.6),

$$1 - 2m\alpha + 4M^2\alpha^2 \leqslant 1 - 2\varepsilon_1\varepsilon_2 \equiv q^2 < 1.$$

Получим

$$F(z_{k+1}) \leqslant F(z_k) q^2, \quad \|h(z_{k+1})\| \leqslant \|h(z_k)\| q, \quad \|h(z_k)\| \leqslant \|h(z_0)\| q^k.$$

Отсюда

$$\|z_{k+1} - z_k\| = \alpha_k \|h(z_k)\| \leqslant C_1 q^k.$$

Теперь легко показать, что

$$\|z_k - z^*\| \leqslant C q^k.$$

Теорема доказана.

Замечание. Если функция $f(x, y)$ является выпукло-вогнутой, то вместо нее можно рассмотреть функцию

$$F(x, y) = f(x, y) + c\|x\|^2 - d\|y\|^2,$$

где $c > 0$ и $d > 0$. Функция $F(x, y)$ удовлетворяет условию (2.2) и при малых c и d не очень отличается от $f(x, y)$.

Чтобы найти z^*, можно также применить метод Ньютона для решения уравнения $h(z) = 0$:

$$z_{k+1} = z_k - [h'(z_k)]^{-1} h(z_k),$$

ибо, в силу (2.7), $[h'(z_k)]^{-1}$ существует. Метод Ньютона сходится с квадратичной скоростью, если начальное приближение z_0 достаточно близко к z^*. Хорошее начальное приближение можно получить, использовав метод (2.5). Можно построить метод второго порядка, не требующий на каждом шаге обращения матрицы $h'(z_k)$ и сходящийся с любого начального приближения.

Решение уравнения (2.1) представляет собой кривую с параметром t. Метод (2.5) основан на замене этой кривой ее касательной. Но можно аппроксимировать эту кривую более точно. Имеем

$$z(t + \alpha) = z(t) - \alpha h(z(t)) + {}^1/_2\alpha^2 h'(z(t)) h(z(t)) + o(\alpha^2).$$

Отсюда сразу получаем метод последовательных приближений. Пусть $z_0 \in E^n$ — произвольная точка и найдено z_k. Положим

$$z_{k\alpha} = z_k - \alpha h(z_k) + {}^1/_2\alpha^2 h'(z_k) h(z_k), \quad z_{k+1} = z_{k\alpha_k},$$

где правило выбора α_k будет указано ниже. Такой метод минимизации был предложен в [12].

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия* (2.2) *и* (2.4). *Тогда можно найти такие* ε_1 *и* ε_2 ($\varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0$), *что при* $\alpha_k \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ *последовательность* $\{z_k\}$ *сходится к* z^* *со скоростью геометрической прогрессии.*

Доказательство. Имеем

$$\frac{d}{d\alpha} F(z_{k\alpha}) = -(h'(z_{k\alpha}) h(z_{k\alpha}), h(z_k)) +$$
$$+ \alpha (h'(z_{k\alpha}) h(z_{k\alpha}), h'(z_k) h(z_k)).$$

Из (2.7) и (2.8) нетрудно получить, что

$$\|h(z_{k\alpha}) - h(z_k)\| \leqslant 2M\|z_{k\alpha} - z_k\| \leqslant (2M\alpha + 2M^2\alpha^2)\|h(z_k)\|,$$

$$\|h(z_{k\alpha})\| \leqslant (1 + 2M\alpha + 2M^2\alpha^2)\|h(z_k)\|,$$

$$\frac{d}{d\alpha} F(z_{k\alpha}) \leqslant -m\|h(z_k)\|^2 + 2M(2M\alpha + 2M^2\alpha^2)\|h(z_k)\|^2 +$$
$$+ 4M^2\alpha(1 + 2M\alpha + 2M^2\alpha^2)\|h(z_k)\|^2 \leqslant (-m + C\alpha)\|h(z_k)\|^2,$$
$$F(z_{k\alpha}) \leqslant F(z_k)(1 - 2m\alpha + C\alpha^2), \qquad \alpha \in [0, 1].$$

Теперь нетрудно найти такие ε_1 и ε_2, что при $\alpha_k \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ будет $1 - 2m\alpha + C\alpha^2 \leqslant q^2 < 1$. Дальнейшее — как в теореме 2.1.

§ 3. Метод условного градиента

Этот метод является обобщением метода условного градиента для минимизации [12, 15–17] и опирается на следующее простое утверждение: для того чтобы точка $z^* \in \Omega$ была седловой точкой f на Ω, необходимо и достаточно, чтобы

$$\psi(z^*) = \min_{w \in \Omega} (h(z^*), w - z^*) = 0.$$

Предположим сначала, что Ω — строго выпуклый компакт, а $h(z)$ непрерывно дифференцируема на открытом множестве $\Omega' \supset \Omega$. Пусть $\Omega'' = \{z \in \Omega' \mid h(z) \neq 0\}$. Для $z \in \Omega''$ существует единственная точка $\theta(z) \in \Omega$, для которой

$$\psi(z) = \min_{w \in \Omega} (h(z), w - z) = (h(z), \theta(z) - z).$$

Для $z \in \Omega''$ и $g \in E^n$ существует [18, 19] производная по направлению

$$\frac{\partial \psi(z)}{\partial g} = (h'(z)(\theta(z) - z) - h(z), g).$$

Так как функция $\zeta(z) = \theta(z) - z$ непрерывна на Ω'', то $\psi(z)$ непрерывно дифференцируема на Ω'' и

(3.1) $$\psi'(z) = h'(z)\zeta(z) - h(z).$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{z} = \zeta(z), \qquad z(0) = z_0 \in \Omega \cap \Omega''.$$

Допустим, что решение $z(t)$ существует на $[0, \infty)$ (в частности, это так, если $\Omega'' = \Omega'$). Нетрудно показать, что $z(t) \in \Omega$ для всех t и

$$\dot{\psi}(z) = (h'(z)\zeta(z), \zeta(z)) - \psi(z) \geqslant -\psi(z),$$
$$\psi(z(t)) \geqslant \psi(z_0)e^{-t}, \quad |\psi(z(t))| \leqslant |\psi(z_0)|e^{-t}.$$

Если $z(t_k) \to z^*$ при $t_k \to +\infty$, то $\psi(z^*) = 0$ и z^* — седловая точка f на Ω.

Предположим теперь, что выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1) Ω — строго выпуклый компакт и $h(z) \neq 0$ на Ω;

2) $\Omega = P_1 \times P_2$, P_1 и P_2 — строго выпуклые компакты, $f_x(z) \neq 0$ и $f_y(z) \neq 0$ на Ω.

Тогда, как и выше, точка $\theta(z)$ единственна, функция $\psi(z)$ непрерывно дифференцируема на Ω и справедлива формула (3.1).

В методе условного градиента для нахождения седловых точек [8, 20–22], начиная с произвольной точки $z_0 \in \Omega$, строится последовательность $\{z_k\}$ следующим образом:

$$z_{k+1} = z_{k\alpha_k}, \qquad z_{k\alpha} = z_k + \alpha\zeta_k, \qquad \zeta_k = \theta(z_k) - z_k,$$

α_k — точка минимума $|\psi(z_{k\alpha})|$ при $\alpha \in [0, 1]$.

Теорема 3.1 [8]. *При сделанных предположениях справедливы следующие утверждения.*

1. $\psi(z_k) \to 0$ *и всякая предельная точка* $\{z_k\}$ *является седловой точкой* f *на* Ω.

2. *Если* $\psi'(z)$ *удовлетворяет условию Липшица на* Ω, *то*

$$\psi(z_k) = O(1/k).$$

3. *Если* $\psi'(z)$ *удовлетворяет условию Липшица на* Ω *и выполнено условие* (1.3), *то седловая точка* z^* *единственна и*

$$|\psi(z_k)| \leqslant |\psi(z_0)|q^k, \qquad q < 1,$$

$$\|z_k - z^*\|^2 \leqslant \frac{2}{m}|\psi(z_0)|q^k. \tag{3.2}$$

Доказательство. 1. Имеем $\psi(z_{k\alpha}) = \psi(z_k) + a_k\alpha + o_k(\alpha)$, где

$$a_k = (\psi'(z_k), \zeta_k) = (h'(z_k)\zeta_k, \zeta_k) - (h(z_k), \zeta_k).$$

В силу выпуклости-вогнутости $f(x, y)$

$$(h'(z_k)\zeta_k, \zeta_k) \geqslant 0.$$

Отсюда $a_k \geqslant -(h(z_k), \zeta_k) = |\psi(z_k)|$, $\psi(z_{k\alpha}) \geqslant \psi(z_k) + \alpha|\psi(z_k)| + o_k(\alpha)$.

Теперь от противного легко доказать, что $\psi(z_k) \to 0$. Если $z_{k_l} \to z^*$, то $\psi(z^*) = 0$ и z^* — седловая точка f на Ω.

2. Если $\psi'(z)$ удовлетворяет условию Липшица на Ω, то

$$|o_k(\alpha)| = \left|\int_0^\alpha (\psi'(z_{k\alpha}) - \psi'(z_k), \zeta_k)\,d\alpha\right| \leqslant {}^1/_2\alpha^2 L\|\zeta_k\|^2 \leqslant {}^1/_2\alpha^2 LD^2,$$

где $D = \operatorname{diam}\Omega < \infty$. Отсюда

$$\psi(z_{k\alpha}) \geqslant \psi(z_k) + \alpha|\psi(z_k)| - {}^1/_2\alpha^2 LD^2.$$

Теперь легко показать (см., например, [12, 23]), что при больших k

$$\psi(z_{k+1}) \geqslant \psi(z_k) + \frac{|\psi(z_k)|^2}{LD^2}, \qquad |\psi(z_{k+1})| \leqslant |\psi(z_k)| - \frac{|\psi(z_k)|^2}{LD^2}$$

и $|\psi(z_k)| = O(1/k)$, что и требовалось доказать.

3. Если выполнены условия (1.3), то

$$(h'(z_k)\zeta_k, \zeta_k) \geqslant m\|\zeta_k\|^2.$$

Поэтому

$$\psi(z_{k\alpha}) \geqslant \psi(z_k) + \alpha m\|\zeta_k\|^2 + \alpha|\psi(z_k)| - {}^1/_2\alpha^2 L\|\zeta_k\|^2.$$

При $\alpha \leqslant \min\{1, 2m/L\}$ будет

$$\psi(z_{k\alpha}) \geqslant \psi(z_k) + \alpha|\psi(z_k)|.$$

Отсюда

$$|\psi(z_{k+1})| \leqslant |\psi(z_k)|q, \quad |\psi(z_k)| \leqslant |\psi(z_0)|q^k,$$

$$q = 1 - \min\{1, 2m/L\}.$$

Докажем, что для всех $z \in \Omega$ и для любой седловой точки z^*

$$\|z - z^*\|^2 \leqslant \frac{2}{m}|\psi(z)|, \tag{3.3}$$

откуда будет следовать неравенство (3.2) и единственность z^*.

Действительно,

$$0 \leqslant \Phi(z^*, z) - \Phi(z, z) = (\Phi_z(z, z), z^* - z) +$$

$$+ {}^1/_2(\Phi_{zz}(z^* - z), z^* - z) \leqslant (-h(z), z^* - z) - \frac{m}{2}\|z^* - z\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant -\psi(z) - \frac{m}{2}\|z^* - z\|^2.$$

Теорема доказана.

Замечания. 1. Теорема остается справедливой, если шаг α_k выбирать таким образом:

$$\alpha_k = \max\{\alpha = 2^{-\nu} | \psi(z_{k\alpha}) \geqslant \psi(z_k) + {}^1/_2\alpha|\psi(z_k)|, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Утверждение 3 имеет место, даже если брать произвольное $\alpha_k \in [\varepsilon, \min\{1, 2m/L\}]$, $\varepsilon > 0$. При этом $q = 1 - \varepsilon$.

2. В силу выпуклости $\Phi(z_0, w)$ по w имеем

$$\min_{w\in\Omega} \Phi(z_0, w) = \Phi(z_0, w_0) = \Phi(z_0, w_0) - \Phi(z_0, z_0) \geqslant (h(z_0), w_0 - z_0) \geqslant \psi(z_0).$$

Отсюда следует, что

$$f(x_0, y) + \psi(z_0) \leqslant f(x_0, y_0) \leqslant f(x, y_0) - \psi(z_0) \tag{3.4}$$

для всех $[x_0, y] \in \Omega$ и $[x, y_0] \in \Omega$.

Функция $\psi(z)$ вычисляется на каждой итерации, поэтому оценки (3.3) и (3.4) могут служить для прекращения вычислений при достижении заданной точности.

Теорема 3.2. *Пусть:*

1) Ω — *сильно выпуклый компакт; т. е. существует* $\gamma > 0$ *такое, что* $\frac{1}{2}(x+y)+z \in \Omega$ *при любых* $x, y \in \Omega$ *и любых* z: $\|z\| \leqslant \gamma\|x-y\|^2$;

2) $\|h(z)\| \geqslant \varepsilon > 0$ *для всех* $z \in \Omega$;

3) $\psi'(z)$ *удовлетворяет условию Липшица на* Ω *с константой* L.

Тогда $\{z_k\}$ *сходится к некоторой седловой точке* z^* *функции* f *на* Ω *со скоростью геометрической прогрессии.*

Доказательство. Как и раньше, имеем

$$|\psi(z_{k\alpha})| \leqslant |\psi(z_k)| - \alpha|\psi(z_k)| + \tfrac{1}{2}L\alpha^2\|\zeta_k\|^2. \tag{3.5}$$

Докажем, что

$$\|\zeta_k\|^2 \leqslant \frac{1}{2\gamma\varepsilon}|\psi(z_k)|. \tag{3.6}$$

Действительно, в силу сильной выпуклости

$$w_k = \frac{\theta_k + z_k}{2} - \gamma\frac{h(z_k)}{\|h(z_k)\|}\|\theta_k - z_k\|^2 \in \Omega.$$

Поэтому

$$\psi(z_k) \leqslant (h(z_k), w_k - z_k) = \tfrac{1}{2}\psi(z_k) - \gamma\|h(z_k)\|\|\theta_k - z_k\|^2.$$

Отсюда и следует (3.6). Из (3.6) и (3.5) следует, что

$$|\psi(z_{k\alpha})| \leqslant |\psi(z_k)|\left(1-\alpha+\frac{L\alpha^2}{4\gamma\varepsilon}\right),$$

$$|\psi(z_k)| \leqslant |\psi(z_0)|q^k, \qquad q = \min_{0\leqslant\alpha\leqslant 1}\left(1-\alpha+\frac{L\alpha^2}{4\gamma\varepsilon}\right) < 1,$$

$$\|\zeta_k\|^2 \leqslant Cq^k.$$

Отсюда

$$\|z_{k+1} - z_k\| \leqslant \|\zeta_k\| \leqslant C_1 q^{k/2}.$$

Поэтому z_k сходится к некоторой точке z^* и

$$\|z_k - z^*\| \leqslant C_2 q^{k/2}, \quad \psi(z^*) = 0.$$

Теорема доказана.

Замечание. В теореме не требуется, чтобы f удовлетворяла условиям (1.3) и чтобы седловая точка была единственной.

Пусть теперь $\Omega = P_1 \times P_2$, где P_1 и P_2 — строго выпуклые компакты, но $f_x(x, y)$ и $f_y(x, y)$ могут обращаться в нуль на Ω. В этом случае применим модифицированный метод условного градиента [20].

Для $z = [x, y] \in \Omega'$ введем

$$\psi_1(z) = \min_{u\in P_1}(f_x(z), u - x), \qquad \psi_2(z) = \max_{v\in P_2}(f_y(z), v - y),$$

$$H(z) = \tfrac{1}{2}[\psi_1^2(z) + \psi_2^2(z)].$$

Ранее рассмотренная функция $\psi(z)=\psi_1(z)-\psi_2(z)$. Пусть $\theta_1(z)\in P_1$ и $\theta_2(z)\in P_2$ — любые точки, для которых

$$\psi_1(z)=(f_x(z),\ \theta_1(z)-x),\qquad \psi_2(z)=(f_y(z),\ \theta_2(z)-y).$$

Докажем, что $H(z)$, $\psi_1^2(z)$, $\psi_2^2(z)$ непрерывно дифференцируемы на Ω'. Если $f_x(x)\neq 0$, то $\psi_1^2(z)$ дифференцируема в точке z по любому направлению $g=[g_1,g_2]\in E^n$ [18, 19] и

$$\frac{\partial\psi_1^2(z)}{\partial g}=2\psi_1(z)\,[\,(f_{xx}(z)\,(\theta_1(z)-x)-f_x(z),\,g_1)+$$
$$+(f_{xy}(z)\,(\theta_1(z)-x),\,g_2)\,].$$

Если $f_x(z)=0$, то $\psi_1^2(z)$ дифференцируема в точке z и

$$\frac{\partial\psi_1^2(z)}{\partial z}=0,\ \text{ т. е. }\ \lim_{g\to 0}\frac{\psi_1^2(z+g)-\psi_1^2(z)}{\|g\|}=0.$$

Действительно,

$$\psi_1^2(z+g)-\psi_1^2(z)=\psi_1^2(z+g)=(f_x(z+g),\ \theta_1(z+g)-x-g_1)^2=$$
$$=(f_{xz}(z)g+o(\|g\|),\ \theta_1(z+g)-x-g_1)^2=O(\|g\|^2).$$

Отсюда следует, что $\psi_1^2(z)$ непрерывно дифференцируема на Ω' и

$$\frac{\partial\psi_1^2(z)}{\partial z}=2\psi_1(z)\,[f_{xx}(z)\,(\theta_1(z)-x)-f_x(z),\,f_{xy}(z)\,(\theta_1(z)-x)\,].$$

Аналогично, $\psi_2^2(z)$ непрерывно дифференцируема на Ω' и

$$\frac{\partial\psi_2^2(z)}{\partial z}=2\psi_2(z)\,[f_{yx}(z)\,(\theta_2(z)-y),\,f_{yy}(z)\,(\theta_2(z)-y)-f_y(z)\,].$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot x=-\psi_1(x,\ y)\,(\theta_1(x,\ y)-x),\qquad \dot y=\psi_2(x,\ y)\,(\theta_2(x,\ y)-y),$$
$$x(0)=x_0,\qquad y(0)=y_0.$$

Правая часть этой системы непрерывна на Ω'. Тогда существует решение $z=[x(t),y(t)]$, определенное на $[0,\infty)$. Имеем

$$\dot H(z)=-\psi_1^2(z)\,[\,(f_{xx}(\theta_1-x),\ \theta_1-x)-(f_x,\ \theta_1-x)\,]+$$
$$+\psi_2^2(z)\,[\,(f_{yy}(\theta_2-y),\,\theta_2-y)-(f_y,\,\theta_2-y)\,]\leqslant$$
$$\leqslant\psi_1^3(z)-\psi_2^3(z)\leqslant -H^{3/2}(z),$$
$$H(z(t))\leqslant\frac{4}{(t+c)^2},\qquad t\geqslant 0,\qquad c=\frac{2}{\sqrt{[H(z_0)]}}.$$

Если $z(t_k)\to z^*$, то $H(z^*)=0$ и z^* — седловая точка f на Ω. На основе этого непрерывного метода можно построить следующий дискретный метод для нахождения z^*.

Выберем $z_0\in\Omega$. Пусть $z_k=[x_k,\ y_k]$ уже найдена. Рассмотрим луч

$$z_{k\alpha}=[x_k-\alpha\psi_1(z_k)\zeta_{1k},\ y_k+\alpha\psi_2(z_k)\zeta_{2k}],$$

где $\zeta_{1k} = \theta_1(z_k) - x_k$, $\zeta_{2k} = \theta_2(z_k) - y_k$, и положим $z_{k+1} = z_{k\alpha_k}$, где α_k — точка минимума $H(z_{k\alpha})$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant \min\{1/|\psi_1(z_k)|,\ 1/\psi_2(z_k)\}$.

Теорема 3.3. *При сделанных предположениях $H(z_k) \to 0$ и всякая предельная точка $\{z_k\}$ является седловой точкой f на Ω.*

Доказательство. Имеем

$$H(z_{k\alpha}) = H(z_k) + \alpha a_k + o_k(\alpha),$$

$$a_k = -\psi_1^2(z_k)[(f_{xx}(z_k)\zeta_{1k}, \zeta_{1k}) - \psi_1(z_k)] + $$

$$+ \psi_2^2(z_k)[(f_{yy}(z_k)\zeta_{2k}, \zeta_{2k}) - \psi_2(z_k)].$$

В силу выпуклости-вогнутости $f(x, y)$

$$a_k \leqslant \psi_1^3(z_k) - \psi_2^3(z_k) \leqslant -H^{3/2}(z_k).$$

Если допустить, что $H(z_k) \not\to 0$, т. е. $H(z_k) \geqslant \varepsilon > 0$, то получим, что $H(z_{k+1}) \leqslant H(z_k) - \gamma$, $\gamma = \mathrm{const} > 0$, чего не может быть. Поэтому $H(z_k) \to 0$.

Теорема доказана.

§ 4. Метод проекции градиента

Этот метод является обобщением метода проекции градиента для минимизации на выпуклом множестве [17]. Для игр n лиц он был предложен в [7].

Пусть Ω — выпуклое замкнутое множество, не обязательно ограниченное. В частности, при $\Omega = E^n$ получим более сильный результат, чем в § 2. Пусть P—оператор проектирования на Ω, определяемый условиями

$$Pz \in \Omega, \quad \|Pz - z\| = \min_{w \in \Omega} \|w - z\|.$$

В силу (1.1) и выпуклости $\Phi(z, w)$ по w справедлива

Теорема 4.1. *Для того чтобы точка $z^* \in \Omega$ была седловой точкой f на Ω, необходимо и достаточно, чтобы при некотором $\alpha > 0$*

$$P(z^* - \alpha h(z^*)) = z^*. \tag{4.1}$$

Для нахождения z^* можно применить следующий метод:

$$z_{k+1} = P(z_k - \alpha h(z_k)), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.2}$$

где точка $z_0 \in \Omega$, а $\alpha > 0$ достаточно мало.

Предположим, что $h(z)$ удовлетворяет условиям

$$(h(z) - h(w),\ z - w) \geqslant m(r)\|z - w\|^2, \qquad z,\ w \in \Omega_r, \tag{4.3}$$

$$\|h(z) - h(w)\| \leqslant M(r)\|z - w\|, \qquad z,\ w \in \Omega_r, \tag{4.4}$$

где $\Omega_r = \{z \in \Omega \mid \|z - z_0\| \leqslant r\}$, $m(r)$ — неотрицательная невозрастающая функция, $M(r)$ — неубывающая функция, причем может оказаться, что $m(r) = 0$ при больших r, а $M(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$.

Теорема 4.2. *Пусть существует $r_0 > 0$ такое, что $r_0 m(r_0) > \|h(z_0)\|$. Тогда существует седловая точка функции f на Ω, и если шаг α удовлетворяет неравенствам*

$$0 < \alpha < \sup_{r > 0} \frac{2}{rM^2(r)}[rm(r) - \|h(z_0)\|], \tag{4.5}$$

то процесс (4.2) *со скоростью геометрической прогрессии сходится к некоторой седловой точке* z^*:

$$\|z_k - z^*\| \leqslant Cq^k, \qquad q < 1. \tag{4.6}$$

Доказательство. Пусть шаг α удовлетворяет (4.5) (по предположению супремум в (4.5) положителен). Выберем $r > 0$ такое, что

$$0 < \alpha < \frac{2}{rM^2(r)}[rm(r) - \|h(z_0)\|]. \tag{4.7}$$

Покажем, что оператор $\Phi z = P(z - \alpha h(z))$ является оператором сжатия на Ω_r и переводит Ω_r в себя. Действительно, для $z, w \in \Omega_r$ в силу (4.3) и (4.4)

$$\|\Phi z - \Phi w\|^2 \leqslant \|z - w - \alpha(h(z) - h(w))\|^2 = \|z - w\|^2 - $$
$$-2\alpha(h(z) - h(w),\ z - w) + \alpha^2\|h(z) - h(w)\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant (1 - 2\alpha m(r) + \alpha^2 M^2(r))\|z - w\|^2.$$

В силу (4.7), $0 < \alpha < 2m(r) / M^2(r)$, поэтому

$$q = \sqrt{[1 - 2\alpha m(r) + \alpha^2 M^2(r)]} < 1.$$

Для доказательства $\Phi\Omega_r \subset \Omega_r$ достаточно убедиться в том, что

$$\|\Phi z_0 - z_0\| \leqslant (1 - q)r. \tag{4.8}$$

Действительно, для $z \in \Omega_r$ элемент $\Phi z \in \Omega$ и

$$\|\Phi z - z_0\| = \|\Phi z - \Phi z_0 + \Phi z_0 - z_0\| \leqslant qr + (1 - q)r = r.$$

Нетрудно проверить, что

$$\|\Phi z_0 - z_0\| \leqslant \alpha\|h(z_0)\|, \qquad (1 - q)r \geqslant rm(r)\alpha - \frac{rM^2(r)}{2}\alpha^2.$$

Отсюда и из (4.7) следует (4.8). Итак, Φ — оператор сжатия на Ω_r и переводит Ω_r в себя. По принципу сжатых отображений существует неподвижная точка z^*, $\Phi z^* = z^*$, что равносильно (4.1). Поэтому z^* — седловая точка и процесс (4.2) сходится к z^*, причем выполнено (4.6), где $C = \|\Phi z_0 - z_0\| / (1 - q)$.

Теорема доказана.

Замечания. 1. Если $m(r) \equiv m > 0$, $M(r) \equiv M > 0$, то процесс (4.2) сходится, если $0 < \alpha < 2m / M^2$. Величина q минимальна и равна $\sqrt{[1 - m^2 / M^2]}$ при $\alpha = m / M^2$.

2. Все сказанное останется справедливым, если Ω — выпуклое замкнутое множество в гильбертовом пространстве.

3. В [24] рассмотрен процесс $z_{k+1} = z_k - \alpha h(z_k)$ для решения уравнения $h(z) = 0$ в предположении, что $rm(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$. Наши результаты могут рассматриваться как обобщение [24] на случай уравнения (4.1).

Пусть теперь вектор-функция $h(z)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} &\|h(z) - h(w)\| \leqslant M(r)\|z - w\|, \quad && z, w \in \Omega_r. \\ &(h(z) - h(w),\ z - w) \geqslant 0, && z, w \in \Omega. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Нетрудно проверить, что условия (4.9) выполнены, если функция $f(x, y)$ выпукло-вогнута и дважды непрерывно дифференцируема (при этих предположениях $(h'(z)w, w) \geqslant 0$).

Введем функции

$$
\begin{aligned}
f_\varepsilon(x, y) &= f(x, y) + \varepsilon\|x - a_0\|^2 - \varepsilon\|y - b_0\|^2, \quad \varepsilon > 0,\\
\Phi_\varepsilon(z, w) &= f_\varepsilon(u, y) - f_\varepsilon(x, v) =\\
&= \Phi(z, w) - \varepsilon\|z - c_0\|^2 + \varepsilon\|w - c_0\|^2,\\
h_\varepsilon(z) &= \partial\Phi_\varepsilon(z, z) / \partial w = h(z) + 2\varepsilon(z - c_0),
\end{aligned}
$$

где $c_0 = [a_0, b_0]$ — некоторая фиксированная точка. Функция $h_\varepsilon(z)$ удовлетворяет условиям

$$\|h_\varepsilon(z) - h_\varepsilon(w)\| \leqslant (M(r) + 2\varepsilon)\|z - w\|, \qquad z, w \in \Omega_r, \tag{4.10}$$

$$(h_\varepsilon(z) - h_\varepsilon(w),\ z - w) \geqslant 2\varepsilon\|z - w\|^2, \qquad z, w \in \Omega. \tag{4.11}$$

По теореме 4.2, функция f_ε имеет на Ω седловую точку $z_\varepsilon = [x_\varepsilon, y_\varepsilon]$ (нетрудно проверить, что она единственна) и итеративный процесс

$$z_{k+1} = P(z_k - \alpha h_\varepsilon(z_k))$$

при малых $\alpha > 0$ со скоростью геометрической прогрессии сходится к z_ε.

Обозначим через Q^* множество седловых точек f на Ω и предположим, что Q^* не пусто. Множество Q^* выпукло и замкнуто.

Теорема 4.3 *Справедливо соотношение*

$$\lim_{\varepsilon\to+0} z_\varepsilon = z^*, \tag{4.12}$$

где z^* — точка множества Q^*, ближайшая к точке c_0:

$$\|z^* - c_0\| = \min_{z\in Q^*} \|z - c_0\|.$$

Доказательство. Имеем

$$
\begin{aligned}
&\Phi_\varepsilon(z_\varepsilon, z) \geqslant 0,\\
&\Phi(z_\varepsilon, z) - \varepsilon\|z_\varepsilon - c_0\|^2 + \varepsilon\|z - c_0\|^2 \geqslant 0,\\
&\Phi(z_\varepsilon, z) = -\Phi(z, z_\varepsilon) \leqslant 0, \qquad z \in Q^*,
\end{aligned}
$$

$$\|z_\varepsilon - c_0\|^2 \leqslant \|z - c_0\|^2, \qquad z \in Q^*. \tag{4.13}$$

Пусть $\tilde z$ — произвольная предельная точка $\{z_\varepsilon\}$ при $\varepsilon \to +0$ (в силу (4.13), $\{z_\varepsilon\}$ ограничена, поэтому предельные точки существуют).

Ясно, что $\tilde z \in Q^*$ и в силу (4.13)

$$\|\tilde z - c_0\| \leqslant \|z - c_0\|, \qquad z \in Q^*,$$

т. е. $\tilde z$ — точка множества Q^*, ближайшая к c_0, значит, $\tilde z = z^*$. Так как произвольная предельная точка совпадает с z^*, то выполнено (4.12). Теорема доказана.

Для случая, когда $\Omega = P_1 \times P_2$, теорема была доказана в [25].

Описанную выше замену f на f_ε можно применять при решении матричных игр. Для них $f(x, y) = (Ax, y)$, а Ω — произведение симплексов $S_{n_1} \times S_{n_2}$. Положим

$$f_\varepsilon(x, y) = (Ax, y) + \varepsilon\|x\|^2 - \varepsilon\|y\|^2.$$

Тогда функция $h_\varepsilon(z) = [A^*y + 2\varepsilon x,\ -Ax + 2\varepsilon y]$ удовлетворяет условию Липшица с константой $\sqrt{(\|A\|^2 + 4\varepsilon^2)}$, а также условию (4.11). Поэтому итерационный процесс

$$x_{k+1} = P_1(x_k - \alpha(A^*y_k + 2\varepsilon x_k)),\ y_{k+1} = P_2(y_k + \alpha(Ax_k - 2\varepsilon y_k)),$$

где P_1 и P_2 — операторы проектирования на S_{n_1} и S_{n_2} и $0 < \alpha < 4\varepsilon/(\|A\|^2 + 4\varepsilon^2)$, со скоростью геометрической прогрессии сходится к $[x_\varepsilon, y_\varepsilon]$. Точка $[x_\varepsilon, y_\varepsilon]$ есть седловая точка f_ε и при $\varepsilon \to +0$ стремится к решению матричной игры, ближайшему к началу координат.

§ 5. Метод наискорейшего спуска

В этом параграфе рассматривается описанный в [26] метод нахождения ε-седловых точек на многогранниках. Доказывается, что метод сходится со скоростью геометрической прогрессии.

Пусть множество Ω задано следующим образом:

$$\Omega = \{z \in E^n \mid g_j(z) \leqslant 0,\ j \in J = 1, \ldots, N\}, \tag{5.1}$$

где функции $g_j(z)$ выпуклы и дифференцируемы. Пусть Ω также ограничено. Введем обозначения

$$\begin{gathered} Q_\varepsilon(z) = \{j \in J \mid -\varepsilon \leqslant g_j(z) \leqslant 0\}, \qquad \varepsilon \geqslant 0, \\ \Gamma_\varepsilon^*(z) = \Big\{ w \in E^n \mid w = -\sum_{j \in Q_\varepsilon(z)} \alpha_j g_j'(z),\ \alpha_j \geqslant 0 \Big\}, \\ d_\varepsilon(z) = \min\{\|h(z) - w\|^2 \mid w \in \Gamma_\varepsilon^*(z)\} = \|h(z) - w(z)\|^2. \end{gathered} \tag{5.2}$$

Легко показать, что если $d_0(z^*) = 0$, то выполняется (1.1) и z^* — седловая точка f на Ω. Если $d_\varepsilon(z^*) = 0$ при $\varepsilon > 0$, то точку z^* назовем ε-седловой. Можно показать, что если выполнено условие Слейтера, т. е. существует точка $\bar z \in \Omega$ такая, что

$$g_j(\bar z) \leqslant -\gamma < 0 \tag{5.3}$$

для всех нелинейных ограничений $g_j(z) \leqslant 0$, то при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \gamma$ для любой ε-седловой точки z^* выполняются неравенства

$$f(x^*, y) - C\varepsilon \leqslant f(x^*, y^*) \leqslant f(x, y^*) + C\varepsilon$$

для всех $[x^*, y] \in \Omega$ и $[x, y^*] \in \Omega$, $C = \mathrm{const}$.

Перейдем к доказательству геометрической скорости сходимости метода [26]. Как и в [26], предположим, что

$$g_j(z) = (A_j, z) + a_j, \qquad \|A_j\| = 1, \qquad j \in J,$$

а функция f дважды дифференцируема на Ω и

$$\begin{gathered} m\|u\|^2 \leqslant (f_{xx}(x, y)u, u) \leqslant M\|u\|^2, \\ -M\|v\|^2 \leqslant (f_{yy}(x, y)v, v) \leqslant -m\|v\|^2, \\ \|f_{xy}(x, y\|) \leqslant M,\quad m > 0,\ [x, y] \in \Omega,\ [u, v] \in E^n. \end{gathered} \tag{5.4}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. В [26] предложен следующий метод отыскания ε-седловой точки. Начиная с произвольной точки $z_0 \in \Omega$ строим последовательность $\{z_k\}$. На k-м шаге решаем задачу квадратичного программирования $\min\{\|h(z_k)-w\|^2 \mid w\in\Gamma_\varepsilon^*(z_k)\}=d_k=\|w_k-h(z_k)\|^2=\|g_k\|^2$. Если $d_k= 0$, то z_k есть ε-седловая точка, и процесс прекращается.

Если $d_k>0$, то положим

$$z_{k\alpha}=z_k+\alpha g_k,\qquad \beta_k=\max\{\beta\mid z_{k\beta}\in\Omega\},\qquad z_{k+1}=z_{k\alpha_k},$$

где шаг α_k может выбираться одним из следующих способов:

1) α_k — точка минимума $d_\varepsilon(z_{k\alpha})$ при $\alpha\in[0,\beta_k]$;

2) α_k — точка минимума $\|h(z_{k\alpha})-w_k\|^2$ при $\alpha\in[0,\beta_k]$;

3) α_k — точка минимума $1-2m\alpha+4M^2\alpha^2$ на $[0,\beta_k]$, т. е. $\alpha_k= \min\{m/4M^2,\beta_k\}$.

Теорема 5.1. *При любом выборе шага $d_k\to0$ со скоростью геометрической прогрессии. Если применять способ 3), то $\{z_k\}$ сходится к некоторой ε-седловой точке со скоростью геометрической прогрессии.*

Доказательство. Можно показать, что $w_k\in\Gamma_\varepsilon^*(z_{k\alpha})$ при $\alpha\in [0,\beta_k]$. Отсюда имеем

$$\begin{aligned}d_\varepsilon(z_{k\alpha})&\leqslant\|h(z_{k\alpha})-w_k\|^2=\|h(z_{k\alpha})-h(z_k)+h(z_k)-w_k\|^2=\\&=\|g_k\|^2-2(h(z_{k\alpha})-h(z_k),g_k)+\|h(z_{k\alpha})-h(z_k)\|^2.\end{aligned}$$

В силу (5.4) выполняются неравенства

$$\begin{aligned}&(h(z+w)-h(z),w)\geqslant m\|w\|^2,\\&\|h(z+w)-h(z)\|\leqslant 2M\|w\|.\end{aligned}$$

Отсюда

$$d_\varepsilon(z_{k\alpha})\leqslant d_k(1-2m\alpha+4M^2\alpha^2),\qquad \alpha\in[0,\beta_k].$$

Легко показать, что $\beta_k\geqslant\varepsilon/\|g_k\|=\varepsilon/\sqrt{d_k}$, и допущением противного можно доказать, что $d_k\to0$. Поэтому $\beta_k\to+\infty$ и для больших k при способах 1)—3)

$$d_{k+1}\leqslant d_kq^2,\qquad q^2=1-m^2/4M^2<1.$$

Таким образом, $d_k\leqslant Cq^{2k}$. Далее, при способе 3)

$$\|z_{k+1}-z_k\|=\alpha_k\|g_k\|\leqslant C_1q^k.$$

Отсюда $\{z_k\}$ сходится к некоторой точке z^* и

$$\|z_k-z^*\|\leqslant C_2q^k.$$

Функция $d_\varepsilon(z)$ полунепрерывна снизу по z, поэтому $d_\varepsilon(z^*)=0$ и z^* есть ε-седловая точка. Теорема доказана.

Замечания. 1. Непрерывный метод наискорейшего спуска для нахождения седловых точек был рассмотрен в [5].

2. Можно показать, что если выполнено условие Слейтера (5.3), то для $z_0= [x_0,y_0]\in\Omega$ и $0\leqslant\varepsilon\leqslant\gamma$ справедливы неравенства

$$f(x_0,y)-C\varepsilon-Dd_\varepsilon(z_0)\leqslant f(x_0,y_0)\leqslant f(x,y_0)+C\varepsilon+Dd_\varepsilon(z_0) \tag{5.5}$$

для всех $[x_0,y]$, $[x,y_0]\in\Omega$. Здесь $D=\operatorname{diam}\Omega$, C — константа, не зависящая от z_0

и ε. Если же кроме того выполняется условие (1.3), то

(5.6) $$f(x_0, y) - C\varepsilon - \frac{1}{2m} d_\varepsilon^2(z_0) \leqslant f(x_0, y_0) \leqslant f(x, y_0) + C\varepsilon + \frac{1}{2m} d_\varepsilon^2(z_0),$$

(5.7) $$\|z - z^*\|^2 \leqslant \frac{2}{m}\left[C\varepsilon + \frac{1}{2m} d_\varepsilon^2(z_0)\right]$$

для всех $[x_0, y]$, $[x, y_0] \in \Omega$. Функция $d_\varepsilon(z)$ вычисляется на каждой итерации, поэтому оценки (5.5) — (5.7) можно использовать для прекращения вычислений при достижении заданной точности.

§ 6. Метод Зуховицкого — Поляка — Примака

Этот метод рассмотрен в [6, 7] и является обобщением [27]. Применяется он в случае, когда Ω задано системой неравенств

$$\Omega = \{z \in E^n | g_j(z) \leqslant 0, j \in J = 1, \ldots, N\}.$$

Введем обозначения

$$Q_\varepsilon(z) = \{j \in J | -\varepsilon \leqslant g_j(z) \leqslant 0\}, \qquad \varepsilon \geqslant 0,$$
$$L_\varepsilon(z) = \mathrm{co}\{h(z);\, g'_j(z), j \in Q_\varepsilon(z)\},$$
$$\rho_\varepsilon(z) = \min_{w \in L_\varepsilon(z)} \|w\| = \|w_\varepsilon(z)\|.$$

Легко показать, что если $w_0(z^*) = 0$, то выполняется (1.1) и z^* — седловая точка f на Ω.

Перейдем к описанию алгоритма. Выберем последовательность чисел $\{\varepsilon_k\}$ такую, что $\varepsilon_k > 0$, $\varepsilon_k \to 0$, $\Sigma\varepsilon_k = \infty$, и произвольную точку $z_0 \in \in \Omega$. Пусть приближение z_k уже построено. Найдем $w_k = w_{\varepsilon_k}(z_k)$. Если $w_k \neq 0$, то положим

(6.1) $$z_{k+1} = z_k - \alpha_k \frac{w_k}{\|w_k\|},$$

(6.2) $$\alpha_k = \min\{\varepsilon_k, \beta_k\}, \qquad \beta_k = \max\left\{\beta \,|\, z_k - \beta\frac{w_k}{\|w_k\|} \in \Omega\right\}.$$

Если $w_k = 0$, то найдем другое $w_k = w_0(z_k)$. Если новое $w_k = 0$, то z_k — седловая точка. Если новое $w_k \neq 0$, то вычислим z_{k+1} по формулам (6.1) и (6.2).

Теорема 6.1 [6, 7]. *Пусть:*

1) *выпуклое замкнутое ограниченное множество Ω содержит внутренние точки;*

2) *выпуклые функции $g_j(z)$ непрерывно дифференцируемы;*

3) *непрерывная вектор-функция $h(z)$ удовлетворяет условию* (1.2).

Тогда существует подпоследовательность $\{z_{k_i}\}$, сходящаяся к единственной в этом случае седловой точке z^*.

Доказательство этой теоремы приведено в [6, 7].

Замечание. Можно показать, что если выполнено условие Слейтера (5.3), то существуют $\varepsilon_0 > 0$ и $K \geqslant 1$ такие, что для $z \in \Omega$ и $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ выполняются неравенства

$$\rho_\varepsilon(z) \leqslant d_\varepsilon(z) \leqslant K\rho_\varepsilon(z),$$

где $d_\varepsilon(z)$ определено в § 5. Так как $\rho_\varepsilon(z)$ вычисляется на каждой итерации, то оценки (5.5)—(5.7) с заменой $d_\varepsilon(z_0)$ на $K\rho_\varepsilon(z_0)$ могут служить для прекращения вычислений при достижении заданной точности.

§ 7. Метод Салмона — Дарабана

Заметим, что любой метод нахождения минимакса

$$\min_{z\in G}\max_{w\in D} M(z,w)=M^* \tag{7.1}$$

может быть использован для нахождения седловых точек, так как всякая точка $z^*\in\Omega$, в которой

$$\min_{z\in\Omega}\max_{w\in\Omega}\Phi(w,z)=\max_{w\in\Omega}\Phi(w,z^*),$$

является седловой точкой f на Ω. В частности, методы, рассмотренные в [28], могут применяться для разыскания седловых точек *). Другой метод разыскания минимакса (7.1) предложен в [29, 30].

Не предполагается, что компакты G и D выпуклы, а непрерывная функция $M(z, w)$ выпукло-вогнута. Сам метод заключается в том, что начиная с произвольной точки $w_1\in D$ строятся последовательности $\{z_k\}$ и $\{w_k\}$ из условий

$$\max_{1\leqslant i\leqslant k} M(z_k,w_i)=\min_{z\in G}\max_{1\leqslant i\leqslant k} M(z,w_i), \tag{7.2}$$

$$M(z_k,w_{k+1})=\max_{w\in D} M(z_k,w). \tag{7.3}$$

Ниже будет доказано, что этот метод сходится, даже если задачи (7.2) и (7.3) решаются приближенно.

Пусть $M(z, w)$ удовлетворяет условию Липшица по w:

$$|M(z,w')-M(z,w'')|\leqslant L\|w'-w''\|,\qquad z\in G,\quad w',\ w''\in D.$$

Лемма 7.1. *Если $\{z_k\}$ — произвольная последовательность, а последовательность $\{w_k\}$ такова, что*

$$M(z_k,w_{k+1})\geqslant\max_{1\leqslant i\leqslant k} M(z_k,w_i),$$

то

$$\lim_{k\to\infty}\left[M(z_k,w_{k+1})-\max_{1\leqslant i\leqslant k} M(z_k,w_i)\right]=0.$$

Доказательство. Допустим противное:

$$M(z_{k_s}, w_{k_s+1})-\max_{1\leqslant i\leqslant k_s} M(z_{k_s},w_i)\geqslant\varepsilon_0>0.$$

Отсюда

$$L\|w_{k_s+1}-w_i\|\geqslant M(z_{k_s},w_{k_s+1})-M(z_{k_s},w_i)\geqslant\varepsilon_0,\qquad 1\leqslant i\leqslant k_s,$$

что противоречит ограниченности компакта D.

Теорема 7.1. *Если последовательности $\{z_k\}$ и $\{w_k\}$ таковы, что*

$$\max_{1\leqslant i\leqslant k} M(z_k,w_i)\leqslant\min_{z\in G}\max_{1\leqslant i\leqslant k} M(z,w_i)+\delta_k,\qquad \delta_k\geqslant 0,$$

*) Для применения методов [28] важно знать производные функции максимума по направлениям (см. Приложение 1).

$$M(z_k, w_{k+1}) \geqslant \max_{w \in D} M(z_k, w) - \lambda_k, \qquad \lambda_k \geqslant 0,$$

$$M(z_k, w_{k+1}) \geqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant k} M(z_k, w_i),$$

причем $\delta_k \to 0$ *и* $\lambda_k \to 0$, *то*

$$\lim_{k\to\infty} \max_{w\in D} M(z_k, w) = M^*$$

и во всякой предельной точке z^* *последовательности* $\{z_k\}$ *достигается минимакс* (7.1).

Доказательство. Имеем

$$\lambda_k + M(z_k, w_{k+1}) \geqslant \max_{w\in D} M(z_k, w) \geqslant M^* \geqslant \max_{1\leqslant i\leqslant k} M(z_k, w_i) - \delta_k,$$

$$0 \leqslant \max_{w\in D} M(z_k, w) - M^* \leqslant M(z_k, w_{k+1}) - \max_{1\leqslant i\leqslant k} M(z_k, w_i) + \lambda_k + \delta_k,$$

и утверждение теоремы следует из леммы 7.1.

§ 8. Метод чебышевских центров

Метод чебышевских центров [6, 7] позволяет находить седловые точки выпукло-вогнутой функции $f(x, y)$ на выпуклом компакте Ω. Этот метод опирается на следующее утверждение.

Для того чтобы $z^* \in \Omega$ была седловой точкой f на Ω, необходимо и достаточно, чтобы точка $[z^*, z^*]$ была седловой точкой функции $(h(w), z - w)$ на $\Omega \times \Omega$, т. е.

$$(h(w), z^* - w) \leqslant (h(z^*), z^* - z^*) = 0 \leqslant (h(z^*), z - z^*)$$

для всех $z \in \Omega$ и $w \in \Omega$.

Отсюда всякая точка $z^* \in \Omega$, в которой

$$\max_{w\in\Omega} (h(w), z^* - w) = \min_{z\in\Omega} \max_{w\in\Omega} (h(w), z - w) = 0, \tag{8.1}$$

является седловой точкой f на Ω.

Метод чебышевских центров [6, 7] заключается в следующем.

Начиная с произвольной точки $z_0 \in \Omega$ строим последовательность $\{z_k\}$ из условия

$$\max_{0\leqslant i\leqslant k-1} (h(z_i), z_k - z_i) = \min_{z\in\Omega} \max_{0\leqslant i\leqslant k-1} (h(z_i), z - z_i) = \mu_k. \tag{8.2}$$

Если Ω — многогранник, то это — задача линейного программирования. Этот метод получается, если для решения задачи (8.1) применить метод Салмона — Дарабана и на каждом шаге полагать $w_{k+1} = z_k$.

Теорема 8.1 [6, 7]. *Если* $h(z)$ *удовлетворяет условию* (1.2), *то* $\mu_k \to 0$ *и существует подпоследовательность* $\{z_{i_k}\}$, *сходящаяся к единственной седловой точке* z^*.

Доказательство. Имеем

$$0 \geqslant \mu_{k_s} = \max_{0\leqslant i\leqslant k_s-1} (h(z_i), z_{k_s} - z_i) \geqslant (h(z_{k_{s-1}}), z_{k_s} - z_{k_{s-1}}).$$

Пусть $\{z_k\}$ сходится. Тогда $\mu_{k_s} \to 0$. Так как $\{\mu_k\}$ не убывает, то $\mu_k \to 0$.

Введем функцию

$$\delta(t) = \min\{(h(z+w) - h(z),\ w) \mid \|w\| \geqslant t,\ z,\ z+w \in \Omega\}.$$

Имеем

$$0 \leqslant \delta(\|z_i - z^*\|) \leqslant (h(z_i) - h(z^*),\ z_i - z^*) = (h(z_i),\ z_i - z^*) -$$
$$-(h(z^*),\ z_i - z^*) \leqslant -(h(z_i),\ z^* - z_i),$$
$$0 \leqslant \min_{0\leqslant i\leqslant k-1} \delta(\|z_i - z^*\|) \leqslant -\max_{0\leqslant i\leqslant k-1} (h(z_i),\ z^* - z_i) \leqslant -\mu_k.$$

Выделим подпоследовательность $\{z_{i_k}\}$, положив

$$\min_{0\leqslant i\leqslant k-1} \delta(\|z_i - z^*\|) = \delta(\|z_{i_k} - z^*\|).$$

Так как $\mu_k \to 0$, то $\delta(\|z_{i_k} - z^*\|) \to 0$. Отсюда в силу (1.2) $z_{i_k} \to z^*$.

§ 9. Метод штрафных функций

Этот метод является обобщением метода штрафных функций для решения задач на условный экстремум [17, 31].

Пусть R_1 и R_2 — выпуклые компакты, $P_1 \subset \operatorname{int} R_1$, $P_2 \subset \operatorname{int} R_2$, а функция $f(x, y)$ непрерывна и выпукло-вогнута на $R = R_1 \times R_2$. Мы покажем, как задача нахождения седловой точки $f(x, y)$ на $\Omega = P_1 \times P_2$ сводится к решению последовательности задач нахождения седловой точки на R.

Выберем такие функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(y)$, что $\psi_1(x)$ непрерывна и выпукла на R_1, $\psi_1(x) = 0$ при $x \in P_1$, $\psi_1(x) > 0$ при $x \overline{\in} P_1$, $\psi_2(y)$ непрерывна и выпукла на R_2, $\psi_2(y) = 0$ при $y \in P_2$ и $\psi_2(y) > 0$ при $y \overline{\in} P_2$.

Такие функции существуют. Так, в качестве $\psi_1(x)$ можно взять $\rho(x, P_1)$ — расстояние от точки x до выпуклого компакта P_1. Если P_1 задан выпуклыми неравенствами $g_i(x) \leqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$, то можно положить

$$\psi_1(x) = \sum_{i=1}^{m} \varphi(g_i(x)),$$

где $\varphi(t)$ — произвольная функция со свойствами:

1) $\varphi(t)$ непрерывна, выпукла и не убывает на $(-\infty, \infty)$;

2) $\varphi(t) = 0$ при $t \leqslant 0$, $\varphi(t) > 0$ при $t > 0$.

Часто используют следующие две функции:

1) $\varphi(t) = 0$ при $t \leqslant 0$, $\varphi(t) = t^\alpha$ при $t > 0$, $\alpha \geqslant 1$;

2) $\varphi(t) = \max\{0, e^t - 1\}$.

Рассмотрим теперь функции

$$F_\lambda(x, y) = f(x, y) + \lambda\psi_1(x) - \lambda\psi_2(y), \qquad \lambda > 0,$$
$$\Phi_\lambda(z, w) = F_\lambda(u, y) - F_\lambda(x, v) = \Phi(z, w) + \lambda[\psi_1(u) -$$
$$-\psi_1(x)] + \lambda[\psi_2(v) - \psi_2(y)].$$

Метод штрафных функций для разыскания седловой точки f на Ω заключается в нахождении ε_λ-седловых точек z_λ функции $F_\lambda(x, y)$ на R, т. е.

$$z_\lambda \in R, \qquad \min_{w\in R} \Phi_\lambda(z_\lambda, w) \geqslant -\varepsilon_\lambda, \qquad \varepsilon_\lambda > 0.$$

По теореме 1.1 такие точки z_λ существуют.

Теорема 9.1. *Если* $\varepsilon_\lambda \to 0$ *при* $\lambda \to +\infty$, *то*

(9.1) $\rho(z_\lambda, \Omega) \to 0$ *при* $\lambda \to +\infty$

и всякая предельная точка z^* *последовательности* $\{z_\lambda\}$ *является седловой точкой* f *на* Ω.

Доказательство. Если $w \in \Omega$, то $\psi_1(u) = \psi_2(v) = 0$ и $\Phi_\lambda(z_\lambda, w) = \Phi(z_\lambda, w) - \lambda\psi_1(x_\lambda) - \lambda\psi_2(y_\lambda) \geqslant -\varepsilon_\lambda$. Отсюда следует, что

$$(9.2) \qquad \min_{w\in\Omega} \Phi(z_\lambda, w) \geqslant -\varepsilon_\lambda,$$

$$0 \leqslant \psi_1(x_\lambda) + \psi_2(y_\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}[\varepsilon_\lambda + C] \to 0 \text{ при } \lambda \to \infty,$$

где C — максимум $\Phi(z, w)$ на $R \times R$. Теперь, используя свойства функций $\psi_1(x)$ и $\psi_2(y)$, легко доказать соотношение (9.1). Из него следует, что предельная точка $z^* \in \Omega$ и в силу (9.2)

$$\min_{w\in\Omega} \Phi(z^*, w) \geqslant 0,$$

а это и означает, что z^* — седловая точка f на Ω.

Замечание. Теорема верна, если $R_1 = E^{n_1}$, $R_2 = E^{n_2}$ и при этом

$$\sup_{y\in R_2} \inf_{x\in P_1} f(x, y) < +\infty, \qquad \inf_{x\in R_1} \sup_{y\in P_2} f(x, y) > -\infty.$$

§ 10. Обобщения метода Брауна — Робинсон

Метод Брауна — Робинсон [32] служит для решения матричных игр, т. е. для нахождения седловой точки билинейной формы (Ax, y) на произведении симплексов $S_{n_1} \times S_{n_2}$. Этот метод разными способами был обобщен в [10, 33].

Рассмотрим сначала метод [10, 34]. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна и выпукло-вогнута на $\Omega = P_1 \times P_2$. Выберем последовательность $\{\alpha_k\}$ такую, что

$$\alpha_k \in (0, 1], \qquad \alpha_k \to 0, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty.$$

Пусть найдено k-е приближение $[x_k, y_k] \in \Omega$. Найдем u_k — точку минимума $f(x, y_k)$ на P_1, v_k — точку максимума $f(x_k, y)$ на P_2 и положим

$$(10.1) \qquad x_{k+1} = x_k + \alpha_k(u_k - x_k), \qquad y_{k+1} = y_k + \alpha_k(v_k - y_k).$$

В [10] доказано, что если при любом x максимум $f(x, y)$ по $y \in P_2$ достигается в единственной точке и при любом y минимум $f(x, y)$ по $x \in P_1$ достигается в единственной точке, то $\{[x_k, y_k]\}$ сходится к единственной в этом случае седловой точке $[x^*, y^*]$. В [35], используя идею доказательства [32], автор доказал, что и без условий единственности всякая предельная точка $\{[x_k, y_k]\}$ является седловой точкой f на Ω.

Метод (10.1) является непосредственным обобщением процесса Брауна — Робинсон. Легко проверить, что этот процесс является частным случаем метода (10.1) при $\alpha_k = 1/k$.

Нетрудно обобщить метод [10] на случай $\Omega \neq P_1 \times P_2$. Равенство (1.1) эквивалентно тому, что пара $[z^*, z^*]$ является седловой точкой функции $\Phi(z, w)$ на $\Omega \times \Omega$. Метод (10.1) принимает вид

$$z_{k+1} = z_k + \alpha_k(w_k - z_k), \tag{10.2}$$

где w_k — точка минимума $\Phi(z_k, w)$ по $w \in \Omega$. Из результата [35] следует, что всякая предельная точка $\{z_k\}$ является седловой точкой f на Ω.

Перейдем к методу [33]. Пусть $f(x, y)$ — непрерывная функция, определенная на прямом произведении компактных пространств P_1 и P_2 и такая, что

$$\min_{x\in P_1} \max_{y\in P_2} f(x, y) = v = \max_{y\in P_2} \min_{x\in P_1} f(x, y).$$

Зададим последовательности $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ следующим образом: x_0 произвольно, x_k минимизирует сумму

$$\sum_{i=0}^{k-1} f(x, y_i), \qquad k \geqslant 1;$$

y_0 произвольно, y_k максимизирует сумму

$$\sum_{i=0}^{k-1} f(x_i, y), \qquad k \geqslant 1.$$

В [33] доказано, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} f(x_k, y_i) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i, y_k) = v.$$

Алгоритм [33] в случае матричных игр совпадает с процессом Брауна — Робинсон.

Скорость сходимости метода Брауна — Робинсон и его обобщений невелика. Так, в случае матричных игр в [36] доказано, что после k-го шага метода Брауна — Робинсон погрешность в определении значения игры v не превосходит $a2^n k^{-1/(n-2)}$, где $a = \max |a_{ij}|$, $n = n_1 + n_2$ — размерность $[x, y]$.

§ 11. Метод Ньютона для нахождения седловых точек на ограниченном множестве

Пусть множество Ω задано формулой (5.1), конус $\Gamma_0^*(z)$ — формулой (5.2) и выполнено условие Слейтера (5.3). Тогда для того, чтобы точка $z^* \in \Omega$ была седловой точкой f на Ω, необходимо и достаточно, чтобы $h(z^*) \in \Gamma_0^*(z^*)$, т. е.

$$h(z^*) + \sum_{j\in Q_0(z^*)} \alpha_j^* g_j'(z^*) = 0, \qquad \alpha_j^* \geqslant 0,$$
$$g_j(z^*) = 0, \qquad j \in Q_0(z^*).$$

Можно показать, что существует множество $\bar{Q} \subset Q_0(z^*)$ такое, что векторы $g_j'(z^*)$, $j \in \bar{Q}$, линейно независимы и справедливы равенства

$$(11.1) \qquad h(z^*) + \sum_{j \in \bar{Q}} \beta_j^* g_j'(z^*) = 0, \qquad g_j(z^*) = 0, \quad j \in \bar{Q},$$

где $\beta_j^* > 0$. Предположим теперь, что $h(z)$ и $g_j(z)$ непрерывно дифференцируемы, а матрицы $f_{xx}(z^*)$ и $-f_{yy}(z^*)$ положительно определены. Тогда можно доказать, что якобиан системы (11.1) не равен нулю при $z = z^*$ и любых β_j. Поэтому для решения системы (11.1) можно применить метод Ньютона. Хорошее начальное приближение можно получить, использовав методы, описанные выше. Аналогичный прием для случая минимизации функции максимума был рассмотрен в [28].

Задача нахождения множества $\bar{Q}$ значительно упрощается, если оказывается, что $\bar{Q} = Q_0(z^*)$, ибо в этом случае можно воспользоваться следующей леммой.

Лемма 11.1. *Существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что при $\|z - z^*\| < \delta$, $z \in \Omega$, множество $Q_\varepsilon(z)$ совпадает с $Q_0(z^*)$.*

Эта лемма может быть использована и в общем случае, когда $\bar{Q} \neq Q_0(z^*)$, ибо обычно множество $Q_0(z^*)$ значительно у́же, чем множество $J = 1, \ldots, N$, так что задача «угадывания» множества $\bar{Q} \subset Q_0(z^*)$ облегчается.

§ 12. Другой вариант метода Ньютона

Этот метод является обобщением метода Ньютона для задач минимизации с ограничениями [17]. Его можно применять не только для нахождения седловых точек, но и вообще для решения уравнения вида (12.1).

Пусть на выпуклом замкнутом множестве Ω задана вектор-функция $h(z)$. Требуется найти решение уравнения

$$(12.1) \qquad \psi(z) = 0, \qquad \psi(z) = \inf_{w \in \Omega} (h(z), w - z).$$

Предположим, что $h(z)$ дифференцируема. Тогда для решения уравнения (12.1) можно применить метод последовательных приближений, в котором z_{k+1} — точка минимума на Ω функции

$$\Phi_k(z) = (h(z_k),\ z - z_k) + {}^1/_2 (h'(z_k)(z - z_k),\ z - z_k)$$

(предполагается, что минимум на Ω достигается).

В [17, 37] получены условия сходимости этого метода для случая, когда $h(z)$ является градиентом некоторой функции. Однако можно заметить, что при доказательстве нигде не используется, что $h(z)$ является градиентом. Поэтому из результатов [37] следует

Теорема 12.1. *Пусть на множестве $\Omega_r = \{z \in \Omega \mid \|z - z_0\| \leqslant r\}$ матрица $h'(z)$ удовлетворяет условию Липшица с константой L и условию*

$$(12.2) \qquad (h'(z)w, w) \geqslant m\|w\|^2, \qquad m > 0, \quad z \in \Omega_r.$$

Пусть также начальное приближение z_0 таково, что

$$q = \frac{L\|z_1 - z_0\|}{2m} < 1, \qquad r \geqslant \frac{\|z_1 - z_0\|}{q} \sum_{k=0}^{\infty} q^{2^k}.$$

Тогда существует решение $z^* \in \Omega_r$ уравнения (12.1) *и $\{z_k\}$ с квадратичной скоростью сходится к z^*:*

$$\|z_k - z^*\| \leqslant \frac{\|z_1 - z_0\|}{q} \sum_{i=k}^{\infty} q^{2^i}.$$

В случае когда $h(z) = [f_x, -f_y]$ и $f(x, y)$ выпукло-вогнута, решения уравнения (12.1) суть седловые точки f на Ω. Поэтому описанный выше метод можно применять для нахождения седловых точек. Условие (12.2) выполнено, например, если f сильно выпукло-вогнута на Ω_r, т. е. для любого $z \in \Omega_r$ выполнено условие (1.3).

Замечание. В [37] получены условия сходимости в случае, когда вектор $h(z_k)$, матрица $h'(z_k)$ и точка минимума z_{k+1} вычисляются приближенно. Кроме того, если в теоремах 5 и 6 из [37] заменить $f'(x)$ на $h(z)$ и $f''(x)$ на $h'(z)$, то получим общие теоремы сходимости методов решения уравнения (12.1).

Методы § 11 и 12 можно называть методами Ньютона, так как в случае $\Omega = E^n$ они совпадают с классическим методом Ньютона решения уравнения $h(z) = 0$.

В заключение обратим внимание на аналогию между методом [10] (§ 10), методом условного градиента (§ 3) и методом Ньютона (§ 12). Все эти методы можно записать в виде

$$z_{k+1} = z_k + \alpha_k(w_k - z_k),$$

где шаг $\alpha_k \in (0, 1]$, а w_k — точка минимума некоторой функции $\Phi_k(w)$ на Ω. В методе [10] шаги α_k выбираются заранее такими, что $\alpha_k \to 0$, $\Sigma\alpha_k = \infty$ и минимизируется выпуклая функция $\Phi_k(w) = \Phi(z_k, w)$. В методе условного градиента минимизируется на Ω линейная функция $\Phi_k(w) = (h(z_k), w - z_k)$, являющаяся линейной аппроксимацией функции $\Phi(z_k, w)$ в точке $w = z_k$, а в качестве шага α_k берется точная или приближенная точка минимума функции $\psi(z_k + \alpha(w_k - z_k))$ на отрезке $[0, 1]$. В методе Ньютона $\alpha_k = 1$ и минимизируется квадратичная функция

$$\Phi_k(w) = (h(z_k),\ w - z_k) + {}^1/_2(h'(z_k)(w - z_k),\ w - z_k),$$

являющаяся квадратичной аппроксимацией $\Phi(z_k, w)$ (хотя $h'(z_k)$ не совпадает с $\Phi_{ww}(z_k, z_k)$, но $(h'(z_k)w, w) = (\Phi_{ww}(z_k, z_k)w, w)$).

При $\alpha_k = 1$ метод Ньютона сходится, если z_0 достаточно близко к z^*. Если α_k выбирать из других соображений (например, из условия минимума $\psi(z_k + \alpha(w_k - z_k))$ на $[0, 1]$), то можно надеяться получить сходимость с любого начального приближения. Аналогичный прием для задач минимизации при наличии ограничений предложен в [38].

Как уже отмечалось в § 10, в случае матричных игр метод Брауна — Робинсон является частным случаем метода [10] при $\alpha_k = 1/k$. Но для матричных игр функция $\Phi(z_k, w)$ линейна по w и, следовательно, совпадает со всей линейной аппроксимацией $(h(z_k), w - z_k)$. Поэтому метод Брауна — Робинсон можно рассматривать как частный случай метода условного градиента.

§ 13. Вычислительный аспект

Мы не можем рассмотреть этот вопрос в полном объеме: это чрезвычайно важная и недостаточно исследованная проблема, при обсуждении которой нужно в большой мере опираться на результаты численных экспериментов.

Сначала несколько слов о нахождении седловых точек на всем пространстве (§ 2). Может оказаться целесообразным сначала применять градиентный метод (2.5), не требующий хорошего начального приближения и обладающий вначале быстрой сходимостью. После того как скорость сходимости градиентного метода замедляется, обычно бывает возможно применить метод Ньютона, так как уже получено хорошее начальное приближение.

В методах § 3—6 исходная задача сводится к последовательности вспомогательных экстремальных задач: задача минимизации линейной функции на Ω (§ 3); задача проектирования на Ω (§ 4); задача нахождения точки конуса $\Gamma_\varepsilon^*(z_k)$, ближайшей к точке $h(z_k)$ (§ 5); задача нахождения точки многогранника $L_\varepsilon(z_k)$, ближайшей к началу координат (§ 6). Естественно, что применение соответствующего метода целесообразно лишь в том случае, когда вспомогательная задача решается достаточно просто.

Заметим, что две последние задачи могут эффективно решаться симплекс-методом для квадратичного программирования [39, 40]. При этом если $Q_\varepsilon(z_k)$ содержит q индексов, то требуется порядка $qn + 2q^2$ ячеек памяти.

Вспомогательные задачи в методах § 5 и 6 по трудности близки. Однако метод § 5 применим лишь при линейных ограничениях, а метод § 6 — и при нелинейных.

С другой стороны, в случае линейных ограничений метод § 5 сходится, по-видимому, быстрее метода § 6, что видно хотя бы из того, что при условиях (5.4) метод § 5 сходится со скоростью геометрической прогрессии, а для метода § 6 при тех же условиях этого установить не удается.

В методе [10] на каждом шаге требуется максимизировать $f(x_k, y)$ по y и минимизировать $f(x, y_k)$ по x. В методе [33] на каждом шаге требуется даже минимизировать $\sum_{i=0}^{k-1} f(x, y_i)$ по x и максимизировать $\sum_{i=0}^{k-1} f(x_i, y)$ по y. Если функция $f(x, y)$ нелинейна, то приходится запоминать x_i и y_i, $0 \leqslant i \leqslant k-1$.

Метод § 11 можно применять на заключительном этапе других методов, когда множество $\overline{Q}$ определилось и получено хорошее начальное приближение.

Замечание. Доказательство теорем 4.2 и 5.1 принадлежит А. Б. Певному. Отметим еще некоторые работы. В [41] рассмотрен непрерывный метод в духе Эрроу, Гурвица и Удзавы. В [25] получен ряд результатов о методе проекции градиента и о методе штрафных функций. В [42] дан обзор методов, рассмотренных в [6–8].

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Дифференцируемость по направлениям функции максимума

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \max_{y \in \Omega(x)} f(x, y).$$

В задачах минимизации $\varphi(x)$ большое значение имеют производные по направлениям

$$\varphi'(x_0, g) = \lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha} [\varphi(x_0 + \alpha g) - \varphi(x_0)].$$

Ниже будут указаны условия существования и вид этих производных.

Предположим, что

$$\Omega(x) = \{y \mid h_i(x, y) \leqslant 0, i = 1, \dots, N\},$$

где функции $h_i(x, y)$ непрерывно дифференцируемы, выпуклы по y при $x = x_0$ и при $x = x_0$ удовлетворяют условию Слейтера: существует $\bar{y}$ такое, что $h_i(x_0, \bar{y}) < 0$, $i = 1, \dots, N$. Пусть также все $\Omega(x)$ содержатся в некотором ограниченном множестве D. Введем множества

$$\Gamma(x, y, g) = \{v \mid (h_{ix}(x, y), g) + (h_{iy}(x, y), v) \leqslant 0, \ i \in Q(x, y)\},$$

$$Q(x, y) = \{i \mid h_i(x, y) = 0\}.$$

Если $h_i(x, y)$ не зависят от x, то $\Gamma(x, y, g)$ — обычный конус допустимых направлений. Введем также множество

$$R(x_0) = \{y \in \Omega(x_0) \mid \varphi(x_0) = f(x_0, y)\}.$$

О функции $f(x, y)$ предположим, что она непрерывна и в точках $[x_0, y]$, $y \in R(x_0)$, дифференцируема по любому направлению $[g, v]$, т. е. существует предел

$$f'(x_0, y; g, v) = \lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha} [f(x_0 + \alpha g, y + \alpha v) - f(x_0, y)].$$

Другими словами,

$$f(x_0 + \alpha g, y + \alpha v) - f(x_0, y) = \alpha f'(x_0, y; g, v) + o(\alpha).$$

Пусть выполнены условия:

1) если $v_k \to v$, то

$$f'(x_0, y; g, v) \leqslant \overline{\lim_{k \to \infty}} f'(x_0, y; g, v_k);$$

2) если $x_k = x_0 + \alpha_k g$, $\quad y_k = y_0 + \alpha_k v_k + o(\alpha_k)$, $\quad \alpha_k \to +0$, $\quad y_0 \in R(x_0)$, $\quad \alpha_k v_k \to 0$, $v_k \in \Gamma(x_0, y_0, g)$, то справедливо неравенство

$$f(x_k, y_k) - f(x_0, y_0) \leqslant \alpha_k f'(x_0, y_0; g, v_k) + o(\alpha_k).$$

При сделанных предположениях справедлива

Теорема*). *Функция $\varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0 по любому направлению g и*

$$\varphi'(x_0; g) = \sup_{y \in R(x_0)} \sup_{v \in \Gamma(x_0, y, g)} f'(x_0, y; g, v).$$

*) Этот результат получен совместно с Т. К. Виноградовой.

Доказательство. Можно показать, что $\Gamma(x_0, y, g)$ является замыканием множества допустимых направлений

$$\gamma(x_0, y, g) = \{v \mid \exists \alpha_0 > 0: \ y + \alpha v \in \Omega(x_0 + \alpha g) \text{ при } 0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0\}.$$

Фиксируем $y \in R(x_0)$ и $v \in \gamma(x_0, y, g)$. Тогда $y + \alpha v \in \Omega(x_0 + \alpha g)$ при малых α и

$$\varphi(x_0 + \alpha g) \geqslant f(x_0 + \alpha g, y + \alpha v) = \varphi(x_0) + \alpha f'(x_0, y; g, v) + o(\alpha),$$

$$\varphi'(x_0, g) = \varliminf_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha} [\varphi(x_0 + \alpha g) - \varphi(x_0)] \geqslant f'(x_0, y; g, v).$$

В силу произвольности $y \in R(x_0)$ и $v \in \gamma(x_0, y, g)$

(1) $$\varphi'(x_0, g) \geqslant \sup_{y \in R(x_0)} \sup_{v \in \gamma(x_0, y, g)} f'(x_0, y; g, v).$$

Из условия 1) следует, что

(2) $$\sup_{v \in \gamma(x_0, y, g)} f'(x_0, y; g, v) = \sup_{v \in \Gamma(x_0, y, g)} f'(x_0, y, g, v).$$

Положим

$$\overline{\varphi'(x_0, g)} = \varlimsup_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha} [\varphi(x_0 + \alpha g) - \varphi(x_0)].$$

Выберем $\{y_k\}$ и $\{\alpha_k\}$ так, чтобы

$$\frac{1}{\alpha_k} [\varphi(x_0 + \alpha_k g) - \varphi(x_0)] \to \overline{\varphi'(x_0, g)}, \qquad y_k \in R(x_0 + \alpha_k g),$$

$$y_k \to y_0, \qquad \alpha_k \to +0.$$

При сделанных предположениях точечно-множественное отображение $\Omega(x)$ непрерывно при $x = x_0$. Поэтому из непрерывности $f(x, y)$ следует непрерывность $\varphi(x)$ при $x = x_0$. Отсюда вытекает, что $y_0 = \lim y_k \in R(x_0)$, т. е. $y_0 \in \Omega(x_0)$, $\varphi(x_0) = f(x_0, y_0)$. Точку y_k можно представить в виде $y_k = y_0 + \alpha_k v_k + o(\alpha_k)$, где

$$\alpha_k v_k \to 0, \qquad v_k \in \Gamma(x_0, y_0, g).$$

Положим также $x_k = x_0 + \alpha_k g$. Тогда в силу условия 2)

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_0) = f(x_k, y_k) - f(x_0, y_0) \leqslant \alpha_k f'(x_0, y_0; g, v_k) + o(\alpha_k),$$

(3) $$\overline{\varphi'(x_0, g)} \leqslant \varlimsup_{k \to \infty} f'(x_0, y_0; g, v_k) \leqslant \sup_{y \in R(x_0)} \sup_{v \in \Gamma(x_0, y_0, g)} f'(x_0, y; g, v).$$

Из (1) — (3) следует утверждение теоремы.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

В этом приложении рассмотрим задачу о нахождении седловых точек выпукло-вогнутого функционала $f(x, y)$, заданного на $\Omega = P_1 \times P_2$, где P_1 и P_2 — замкнутые ограниченные выпуклые множества в некоторых гильбертовых пространствах. Предположим также, что $f(x, y)$ слабо полунепрерывен снизу по x на P_1 и слабо полунепрерывен сверху по y на P_2. Последнее условие не вытекает из выпукло-вогнутости. Пример: $f(x, y) \equiv \varphi(x)$, $\varphi(0) = 1$, $\varphi(x) = x$ при $0 < x \leqslant 1$, $P_1 = [0, 1]$.

Теорема 1. *При сделанных предположениях $f(x, y)$ имеет седловую точку на Ω.*

Доказательство может быть проведено точно так же, как в [2] доказывается теорема о минимаксе.

Многие из методов § 2—12 могут служить для разыскания седловых точек в рассматриваемом бесконечномерном случае. Так, в [43, 44] рассмотрен метод условного градиента. Без всяких изменений сохраняют свою силу в рассматриваемом случае доказательства теорем 4.2 и 12.1 о сходимости метода проекции градиента и метода Ньютона.

Для нахождения седловой точки $f(x, y)$ на Ω может быть также применен метод Ритца. Идея этого метода, хорошо известного для задач минимизации (см. [17]), заключается в аппроксимации множества Ω конечномерными множествами.

Пусть $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ — полная в P_1 система, т. е. для всякого $x \in P_1$

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \right\| = 0.$$

Будем называть ее базисом. Обозначим через L_n подпространство, натянутое на $a_1, \ldots, a_n$, и положим $P_{1n} = L_n \cap P_1$.

Пусть $b_1, \ldots, b_n, \ldots$ — базис в P_2. Аналогично построим P_{2n}. Будем искать седловую точку $f(x, y)$ на $\Omega_n = P_{1n} \times P_{2n}$. Эта задача конечномерна, так как она заключается в нахождении седловой точки функции

$$\varphi(\lambda, \mu) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i, \ \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i\right)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \in P_1, \qquad \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i \in P_2.$$

Для ее решения могут быть использованы методы § 2—12.

Теорема 2. *Пусть $f(x, y)$ непрерывна по x равномерно относительно $y \in P_2$ (т. е. $f(x_n, y) \to f(x, y)$ равномерно по $y \in P_2$ при $\|x_n - x\| \to 0$) и непрерывна по y равномерно относительно $x \in P_1$. Пусть $z_n^* = [x_n^*, y_n^*]$ есть ε_n-седловая точка $f(x, y)$ на Ω_n, т. е.*

$$f(x_n^*, y) - \varepsilon_n \leqslant f(x_n^*, y_n^*) \leqslant f(x, y_n^*) + \varepsilon_n \tag{1}$$

для всех $[x, y] \in \Omega_n$. Тогда всякая слабо предельная точка z^* последовательности $\{z_n^*\}$ является седловой точкой $f(x, y)$ на Ω.

Доказательство. Для простоты обозначений будем считать, что $\{z_n^*\}$ слабо сходится к z^*. Фиксируем $z = [x, y] \in \Omega$. В силу полноты базисов существует последовательность $\{z_n\}$, $z_n = [x_n, y_n] \in \Omega_n$, такая, что $\|z_n - z\| \to 0$. В силу (1)

$$f(x_n, y_n^*) - f(x_n^*, y_n) + 2\varepsilon_n \geqslant 0,$$

$$f(x, y_n^*) - f(x_n^*, y) + [f(x_n, y_n^*) - f(x, y_n^*)] + $$
$$+ [f(x_n^*, y) - f(x_n^*, y_n)] + 2\varepsilon_n \geqslant 0.$$

В силу слабой полунепрерывности сверху по y и снизу по x

$$f(x, y^*) - f(x^*, y) \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \, [f(x, y_n^*) - f(x_n^*, y)] \geqslant 0.$$

В силу произвольности $z = [x, y] \in \Omega$ это означает, что $z^* = [x^*, y^*]$ — седловая точка $f(x, y)$ на Ω.

Теорема доказана.

В [44] показано, что если $f(x, y)$ — дважды непрерывно дифференцируемый и сильно выпукло-вогнутый на $P_1 \times P_2$ функционал, то $\{z_n^*\}$ сильно сходится к z^*.

Примером бесконечномерной задачи является задача нахождения седловых точек функционала

$$I(u, v) = \int_0^T F(x, u, v, t)\, dt + \Phi(x(T))$$

на множестве $U \times V$. Здесь фазовые переменные $x(t)$ и управления $u(t)$, $v(t)$ связаны уравнением

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, u, v, t), \qquad x(0) = x_0,$$

время T и начальное состояние x_0 фиксированы, U — ограниченное замкнутое выпуклое множество в L_r^2 $[0, T]$, V — ограниченное замкнутое выпуклое множество в $L_q^2[0, T]$, $L_q^2[0, T]$ — пространство q-мерных вектор-функций, суммируемых с квадратом на $[0, T]$. Об условиях, при которых функционал $I(u, v)$ является дифференцируемым, выпукло-вогнутым и т. д., см., например, [17] и [44].

Поступила в редакцию 16.07.1971
Переработанный вариант 26.02.1972

Цитированная литература

1. Н. Н. Воробьев. Конечные бескоалиционные игры. Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 4, 21—56.
2. С. Карлин. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М., «Мир», 1964.
3. К. Дж. Эрроу, Л. Гурвиц, Х. Удзава. Исследования по линейному и нелинейному программированию. М., Изд-во ин. лит., 1962.
4. Е. Г. Гольштейн, Д. Б. Юдин. Новые направления в линейном программировании. М., «Сов. Радио», 1966.
5. J. B. Rosen. Existence and uniqueness of equilibrium points for concave n-person games. Econometrica, 1965, **33**, № 3, 520—534.
6. С. И. Зуховицкий, Р. А. Поляк, М. Е. Примак. Два метода отыскания точек равновесия вогнутых игр n лиц. Докл. АН СССР, 1969, **185**, № 1, 24—27.
7. С. И. Зуховицкий, Р. А. Поляк, М. Е. Примак. Численные методы отыскания точек равновесия вогнутых игр n лиц. Тр. Первой зимней школы по матем. программированию в г. Дрогобыче. Вып. I. М., 1969, 93—130.
8. С. И. Зуховицкий, Р. А. Поляк, М. Е. Примак. О вогнутой игре n лиц и одной модели производства. Докл. АН СССР, 1970, **191**, № 6, 1220—1223.
9. Д. Гейл. Теория линейных экономических моделей. М., Изд-во ин. лит., 1963.
10. В. А. Волконский. Оптимальное планирование в условиях большой размерности. Экономика и матем. методы, 1965, **1**, № 2, 195—219.
11. Е. Г. Гольштейн. Выпуклое программирование. Элементы теории. М., «Наука», 1970.
12. В. Ф. Демьянов, А. М. Рубинов. Приближенные методы решения экстремальных задач. Л., Изд-во ЛГУ, 1968.
13. Б. Т. Поляк. Итерационные методы, использующие множители Лагранжа, для решения экстремальных задач с ограничениями типа равенств. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1970, **10**, № 5, 1098—1106.
14. Б. Т. Поляк. Градиентные методы минимизации функционалов. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, **3**, № 4, 643—654.
15. M. Frank, Ph. Wolfe. Algorithm for quadratic programming. Nav. Res. Log. Quart., 1956, **3**, № 1—2, 95—110.
16. В. Ф. Демьянов, А. М. Рубинов. Минимизация гладкого выпуклого функционала на выпуклом множестве. Вестн. ЛГУ, 1964, вып. 19, 5—18.
17. Е. С. Левитин, Б. Т. Поляк. Методы минимизации при наличии ограничений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, **6**, № 5, 787—823.
18. В. Ф. Демьянов. К решению некоторых минимаксных задач. I. Кибернетика, 1966, № 6, 58—66; II. 1967, № 3, 62—66.
19. Б. Н. Пшеничный. Необходимые условия экстремума. М., «Наука», 1969.
20. В. Ф. Демьянов. Последовательные приближения для нахождения седловых точек. Докл. АН СССР, 1967, **177**, № 1, 21—24.

21. В. Ф. Демьянов. К разысканию седловых точек. Вестн. ЛГУ, 1967, вып. 19, 25—34.
22. В. Ф. Демьянов. Дополнение к статье «К разысканию седловых точек». Вестн. ЛГУ, 1970, вып. 19, 137—138.
23. Г. Полиа, Г. Сегё. Задачи и теоремы из анализа. М., Гостехиздат, 1956.
24. М. М. Вайнберг. О сходимости процесса наискорейшего спуска для нелинейных уравнений. Сибирский матем. ж., 1961, **2**, № 2, 201—220.
25. A. Auslender. Rechershe des points de selle d'une fonction. Cah. Cent. étud. rech. opér., 1970, **12**, № 2, 57—75.
26. В. Ф. Демьянов. Нахождение седловых точек на многогранниках. Докл. АН СССР, 1970, **192**, № 1, 13—15.
27. С. И. Зуховицкий, Р. А. Поляк, М. Е. Примак. Численный метод для решения задачи выпуклого программирования в гильбертовом пространстве. Докл. АН СССР, 1965, **163**, № 2, 282—284.
28. В. Ф. Демьянов, В. Н. Малоземов. К теории нелинейных минимаксных задач. Успехи матем. наук, 1971, **26**, № 3, 53—104.
29. D. M. Salmon. Minimax controller design. «9-th Joint Automat Control Conf. Ann Arbor, Michigan, 1968, Preprints of techn. papers». New York, N. Y., 1968, 495—500.
30. И. К. Дарабан. Об одном способе нахождения минимакса. В сб. «Матем. методы исследования и оптимизации систем». Вып. 4. Киев, 1970, 37—41.
31. Ю. Б. Гермейер. К задаче отыскания минимакса с ограничениями. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1970, **10**, № 1, 39—55.
32. Дж. Робинсон. Итеративный метод решения игр. В сб. «Матричные игры». М., Физматгиз, 1961, 110—117.
33. Дж. Данскин. Итеративный метод решения непрерывных игр. В сб. «Бесконечные антагонистич. игры». М., Физматгиз, 1963, 123—132.
34. В. А. Волконский, С. А. Иванков. Сходимость итеративных процессов отыскания точки равновесия. Сибирский матем. ж., 1970, **11**, № 4, 770—781.
35. С. А. Иванков. Теоремы о сходимости итеративных процессов решения игр. Тр. Третьей зимней матем. школы в г. Дрогобыче. Вып. II. М., 1970, 324—335.
36. Г. Н. Шапиро. Замечание о вычислительном методе в теории игр. В сб. «Матричные игры». М., Физматгиз, 1961, 118—127.
37. Б. Т. Поляк. Сходимость методов возможных направлений в экстремальных задачах. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1971, **11**, № 4, 855—869.
38. Ю. М. Данилин. Минимизация нелинейных функционалов в задачах с ограничениями. Кибернетика, 1970, № 3, 110—117.
39. Г. П. Кюнци, В. Крелле. Нелинейное программирование. М., «Сов. радио», 1965.
40. Дж. Хедли. Нелинейное и динамическое программирование. М., «Мир», 1967.
41. В. Н. Горбатенко. Градиентный метод нахождения седловых точек при ограничениях типа равенств. Кибернетика, 1971, № 3, 94—101.
42. С. И. Зуховицкий, Р. А. Поляк, М. Е. Примак. Вогнутые игры многих лиц (численные методы). Экономика и матем. методы, 1971, **7**, № 6, 888—900.
43. Р. И. Трухаев, В. В. Хоменюк. Теория неклассических вариационных задач. Л., Изд-во ЛГУ, 1971.
44. В. И. Жуковский. К теории дифференциальных игр с интегральной платой. I. Кибернетика, 1971, № 4, 130—142; II. № 5, 76—82.