Е. И. Никольская, Покомпонентная оценка разности частичных сумм разложений по корневым вектор-функциям, отвечающих двум операторам Шредингера с неэрмитовыми матричными потенциалами, для вектор-функции с монотонными компонентами,

Дифференц. уравнения, 1994, том 30, номер 1, 60–69

ЯНВАРЬ 1994 г., ТОМ 30, № 1

УДК 517.927.25

Е. И. НИКОЛЬСКАЯ

ПОКОМПОНЕНТНАЯ ОЦЕНКА РАЗНОСТИ ЧАСТИЧНЫХ СУММ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО КОРНЕВЫМ ВЕКТОР-ФУНКЦИЯМ, ОТВЕЧАЮЩИХ ДВУМ ОПЕРАТОРАМ ШРЕДИНГЕРА С НЕЭРМИТОВЫМИ МАТРИЧНЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ, ДЛЯ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ С МОНОТОННЫМИ КОМПОНЕНТАМИ

В наших работах [1, 2] были установлены оценки разности частичных сумм спектральных разложений абсолютно непрерывной функции, отвечающих двум скалярным операторам Шредингера с комплекснозначными потенциалами из класса L_p.

В настоящей статье те же оценки будут получены для разложений m-компонентной вектор-функции $f(x)$, все компоненты которой монотонны, в биортогональный ряд по корневым m-компонентным вектор-функциям операторов

$$L\psi = -\frac{d^2\psi}{dx^2} + U(x)\psi, \quad L_1\psi = -\frac{d^2\psi}{dx^2} + U_1(x)\psi \tag{1}$$

с неэрмитовыми матричными потенциалами $U(x)$ и $U_1(x)$, все элементы которых принадлежат классу $L_p[a, b]$, $p \geqslant 1$.

Как и в работах [1, 2], эти оценки будут верны для произвольных краевых условий или даже без краевых условий (например, в случае разложений по системе экспонент).

Перейдем к точной формулировке результатов.

В качестве основного интервала рассмотрим конечный интервал $G = (a, b)$. Здесь, как и в дальнейшем, под скалярным произведением двух m-компонентных вектор-функций $f(x) = \{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)\}$ и $g(x) = \{g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x)\}$ мы будем понимать следующее соотношение:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \sum_{j=1}^m f_j(x)\overline{g_j(x)}\,dx. \tag{2}$$

Символом $L_p^m[a, b]$ будем обозначать пространство m-компонентных вектор-функций $f(x)$, для которых при фиксированном $p \geqslant 1$ существует интеграл

$$\int_a^b \sum_{j=1}^m |f_j(x)|^p dx, \tag{3}$$

а норму в этом пространстве определим равенством

$$\|f\|_{L_p^m[a, b]} = \left\{\int_a^b \sum_{j=1}^m |f_j(x)|^p dx\right\}^{1/p}. \tag{4}$$

Для оператора L из (1) рассмотрим произвольную биортонормированную (в смысле скалярного произведения (2)) пару систем вектор-функций

$\{\psi^n(x)\}$ и $\{\hat{\psi}^n(x)\}$, удовлетворяющую при фиксированном $p \geqslant 1$ трем условиям А*), т. е.

1) для любого номера $n = 1, 2, \ldots$ каждая компонента $\psi_j^n(x)$ и $\hat{\psi}_j^n(x)$ вектор-функций $\psi^n(x)$ и $\hat{\psi}^n(x)$ соответственно абсолютно непрерывна вместе с первыми производными на сегменте $[a, b]$, причем вектор-функции $\{\psi^n(x)\}$ и $\{\hat{\psi}^n(x)\}$ для некоторого комплексного числа λ_n почти всюду на $[a, b]$ удовлетворяют векторным уравнениям**)

$$L\psi^n = \lambda_n \psi^n - \theta_n \psi^{n-1}, \tag{5}$$

$$L^* \hat{\psi}^n = \bar{\lambda}_n \hat{\psi}^n - \theta_{n+1} \hat{\psi}^{n+1}, \tag{6}$$

в которых L^* — формально сопряженный к L дифференциальный оператор имеет вид

$$L^* = -\frac{d^2}{dx^2} + U^*(x), \tag{7}$$

где символом $U^*(x)$ обозначена сопряженная к $U(x)$ матрица, θ_n — число, равное нулю или единице (в последнем случае дополнительно требуется выполнение равенства $\lambda_n = \lambda_{n-1}$), причем $\theta_1 = 0$;

2) тот квадратный корень μ_n из комплексного числа λ_n, для которого $\operatorname{Re} \mu_n \geqslant 0$, удовлетворяет двум неравенствам:

$$|\operatorname{Im} \mu_n| \leqslant C_1 \quad \text{(для всех номеров } n\text{)}, \tag{8}$$

$$\sum_{t \leqslant |\mu_n| \leqslant t+1} 1 \leqslant C_2 \quad \text{(для всех вещественных } t \geqslant 0\text{)}; \tag{9}$$

3) система $\{\psi^n(x)\}$ замкнута и минимальна в $L_p^m[a, b]$ при фиксированном $p \geqslant 1$.

Аналогично рассмотрим произвольную биортонормированную пару систем вектор-функций $\{\tilde{\psi}^n(x)\}$ и $\{\hat{\tilde{\psi}}^n(x)\}$, удовлетворяющую условиям A для оператора L_1 из (1) при том же p. Для произвольной вектор-функции $f(x)$, все компоненты которой принадлежат классу $L_p^m[a, b]$, составим векторные частичные суммы двух биортогональных разложений

$$\sigma^\mu(x, f) = \sum_{|\mu_n| \leqslant \mu} \langle f, \hat{\psi}^n \rangle \psi^n(x), \quad \tilde{\sigma}^\mu(x, f) = \sum_{|\tilde{\mu}_n| \leqslant \mu} \langle f, \hat{\tilde{\psi}}^n \rangle \tilde{\psi}^n(x). \tag{10}$$

В дальнейшем для каждого $j = 1, 2, \ldots, m$ будем рассматривать j-е компоненты векторных частичных сумм (10)

$$\sigma_j^\mu(x, f) = \sum_{|\mu_n| \leqslant \mu} \langle f, \hat{\psi}^n \rangle \psi_j^n(x), \quad \tilde{\sigma}_j^\mu(x, f) = \sum_{|\tilde{\mu}_n| \leqslant \mu} \langle f, \hat{\tilde{\psi}}^n \rangle \tilde{\psi}_j^n(x). \tag{11}$$

Результаты работы сформулируем в виде теорем.

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ — произвольная m-компонентная вектор-функция, каждая компонента которой монотонна на замкнутом конечном интервале $\bar{G} = [a, b]$, потенциалы $U(x)$ и $U_1(x)$ операторов (1) представляют собой произвольные, вообще говоря, неэрмитовы матрицы размера $m \times m$ с комплекснозначными элементами из пространства $L_1[a, b]$, пары систем вектор-функций $\{\psi^n(x)\}$, $\{\hat{\psi}^n(x)\}$ и $\{\tilde{\psi}^n(x)\}$, $\{\hat{\tilde{\psi}}^n(x)\}$ удовлетворяют трем условиям A при некотором фиксированном $p \geqslant 1$ для операторов*

---

*) Эти условия взяты из работ [3, 4]. Такой выбор пары систем вектор-функций позволяет охватить случай произвольных краевых условий.

**) Векторные уравнения (5) в покомпонентной записи представляют собой системы m уравнений

$$-\frac{d^2\psi_j^n}{dx^2} + \sum_{l=1}^m U_{jl}(x)\psi_l^n(x) = \lambda_n \psi_j^n(x) - \theta_n \psi_j^{n-1}(x),$$

$$-\frac{d^2\hat{\psi}_j^n}{dx^2} + \sum_{l=1}^m \bar{U}_{jl}(x)\hat{\psi}_l^n(x) = \bar{\lambda}_n \hat{\psi}_j^n(x) - \theta_{n+1}\hat{\psi}_j^{n+1}(x) \quad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

L и L_1 соответственно. Тогда если для любого компакта K_0 интервала $[a, b]$ существует постоянная $C(K_0)$, обеспечивающая справедливость для всех номеров n неравенств

$$\|\psi^n\|_{L_p^m(K_0)}\|\hat{\psi}^n\|_{L_q^m(G)}\leqslant C(K_0), \tag{12}$$

$$\|\tilde{\psi}^n\|_{L_p^m(K_0)}\|\hat{\tilde{\psi}}^n\|_{L_q^m(G)}\leqslant C(K_0), \tag{13}$$

в которых $q=p/(p-1)$ ($q=\infty$ при $p=1$), то при всех достаточно больших μ для разности j-х компонент векторных частичных сумм (10) для всех $j=1, 2, \ldots, m$ справедлива оценка

$$\sigma_j^\mu(x, f)-\tilde{\sigma}_j^\mu(x, f)=O\left(\frac{\ln\mu}{\mu}\right), \tag{14}$$

равномерная по x на любом компакте интервала $[a, b]$.

Теорема 2. *Если в условиях теоремы 1 потенциалы $U(x)$ и $U_1(x)$ состоят из элементов пространства $L_p[a, b]$ при некотором $p>1$, то при выполнении условий (12) и (13) при всех достаточно больших μ для любых $j=1, 2, \ldots, m$ справедлива оценка*

$$\sigma_j^\mu(x, f)-\tilde{\sigma}_j^\mu(x, f)=O\left(\frac{1}{\mu}\right), \tag{15}$$

равномерная по x на любом компакте интервала (a, b).

Заметим, что, как следует из работы В. А. Ильина [3], условия (12) и (13) являются необходимыми и достаточными для обеспечения покомпонентной равносходимости разложения любой вектор-функции $f(x)$ из пространства $L_p^m[a, b]$ при $p\geqslant 1$ в биортогональный ряд по системе $\{\psi^n(x)\}$ с разложением в тригонометрический ряд по Фурье этой функции на любом компакте интервала (a, b). А поэтому условия (12) и (13) обеспечивают и покомпонентную равносходимость разложений любой вектор-функции $f(x)$ из класса $L_p^m[a, b]$ по системам $\{\psi^n(x)\}$ и $\{\tilde{\psi}^n(x)\}$ соответственно.

Доказательству теоремы 1 предпошлем несколько лемм.

Лемма 1. *В условиях теоремы 1 при всех достаточно больших μ и для любых $j=1, 2, \ldots, m$ справедлива следующая оценка:*

$$\sum_{||\mu_n|-\mu|\leqslant 1}\|\psi^n\|_{L_p^m(K)}\left|\int_{x_1}^{x_2}\hat{\psi}^n(y)\,dy\right|\leqslant\frac{C}{\mu}, \tag{16}$$

где $a\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant b$, K — любой компакт интервала G.

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать далее $\mu>2$. Заметим сразу, что из (9) следует, что $\sum\limits_{||\mu_n|-\mu|\leqslant 1}1=O(1)$.

Фиксируем произвольный компакт K интервала G и произвольное число R_0, для которого $0<2R_0<\rho(K, dG)$. Пусть $x\in K$, $R\in[R_0, 2R_0]$.

В условиях теоремы 1, учитывая, что вектор-функции $\hat{\psi}^n(x)$ удовлетворяют уравнению (6), возможно применение формулы среднего значения (см. работу В. А. Ильина и Е. И. Моисеева [5]), т. е. для любого $n=1, 2, \ldots$ и любого x_0, такого, что числа x_0, x_0+R, x_0-R принадлежат G, справедливо равенство*):

$$\frac{1}{2}\int_{x_0-R}^{x_0+R}\hat{\psi}^n(y)\,dy=\int_0^R\frac{\hat{\psi}^n(x+r)+\hat{\psi}^n(x-r)}{2}\,dr=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{\substack{s\geqslant 0\\ \hat{\psi}^{n-s}\sim\hat{\psi}^n}}\frac{1}{s!2^s}\frac{\psi^{n-s}(x)}{\mu_n^{s-1/2}}\int_0^R r^{s+1/2}J_{s-1/2}(\mu_n r)\,dr+$$

*) Запись $\hat{\psi}_{n-s}\sim\hat{\psi}_n$, как и в [3], обозначает тот факт, что функции $\hat{\psi}_{n-s}$, $\hat{\psi}_n$ принадлежат одной цепочке, т. е. при $s=0$ всегда $\hat{\psi}_{n-s}\sim\hat{\psi}_n$, а при $s\geqslant 1$ символ $\hat{\psi}_{n-s}\sim\hat{\psi}_n$ означает, что $\theta_{n-s+1}=\theta_{n-s+2}=\ldots=\theta_n=1$.

$$+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{\substack{s\geqslant 0\\ \hat{\psi}^{n-s}\sim\hat{\psi}^{n}}}\frac{1}{s!2^{s+1}}\int_0^R\left\{\int_0^r\left[\frac{r-t}{\mu_n}\right]^{s+1/2}J_{s+1/2}(\mu_n(r-t))\times\right.$$

$$\left.\times(U(x+t)\hat{\psi}^{n-s}(x+t)+U(x-t)\hat{\psi}^{n-s}(x-t))dt\right\}dr. \qquad (17)$$

В правой части (17) в двойном интеграле меняем порядок интегрирования по r и t. Принимая во внимание известное соотношение для бесселевых функций (см., например, [6, с. 55])

$$\int_0^R r^{s+1/2}J_{s-1/2}(\mu_n r)\,dr=\frac{R^{s+1/2}}{\mu_n}J_{s+1/2}(\mu_n R),$$

умножая обе части равенства (17) на $\|\psi^n(x)\|_{L_p^m[K]}$, получаем

$$\frac{1}{2}\|\psi^n(x)\|_{L_p^m[K]}\int_{x_0-R}^{x_0+R}\hat{\psi}^n(y)\,dy=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{\substack{s\geqslant 0\\ \hat{\psi}^{n-s}\sim\hat{\psi}^{n}}}\frac{R^{s+1/2}}{s!2^{s}}\,\frac{\hat{\psi}^{n-s}(x)}{\mu_n^{s+1/2}}J_{s+1/2}(\mu_n R)\|\psi^n(x)\|_{L_p^m[K]}+$$

$$+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\|\psi^n(x)\|_{L_p^m[K]}\sum_{\substack{s\geqslant 0\\ \hat{\psi}^{n-s}\sim\hat{\psi}^{n}}}\frac{R^{s+1/2}}{s!2^{s+1}}\times$$

$$\times\left\{\int_0^R\left[\frac{1}{\mu_n^{1/2}}\int_t^R(r-t)^{s+1/2}J_{s+1/2}(\mu_n(r-t))\,dr\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{U(x+t)\hat{\psi}^{n-s}(x+t)+U(x-t)\hat{\psi}^{n-s}(x-t)}{\mu_n^{s}}\right]dt\right\}=S_1+S_2. \qquad (18)$$

Из работы [4] следует, что для всех $\tilde{\psi}^{n-s}$ и $\hat{\psi}^n$ из одной цепочки и для любого $p\geqslant 1$ верна оценка

$$\max_{x\in K}(|\hat{\psi}^{n-s}(x)|/|\mu_n|^s)\leqslant C\|\hat{\psi}^n(x)\|_{L_q^m(G)}, \qquad (19)$$

справедливая для любого компакта K интервала G. Тогда в силу (12) можно утверждать, что

$$\max_{x\in K}(|\hat{\psi}^{n-s}(x)|/|\mu_n|^s)\|\psi^n(x)\|_{L_p^m(K)}\leqslant C. \qquad (20)$$

Заметим, что условие (9) обеспечивает справедливость неравенства

$$0\leqslant s\leqslant[C_2]. \qquad (21)$$

Учитывая оценки (20) и (21), а также известное неравенство для бесселевых функций

$$|J_\nu(z)|\leqslant C(\nu)|z|^{-1/2}, \qquad (22)$$

справедливое для любого $\nu\geqslant -1/2$ и любого z, такого, что $|\mathrm{Im}\,z|\leqslant C$, получим

$$|S_1|=O(|\mu_n|^{-1}). \qquad (23)$$

Положим $K(\mu_n,t,R)=\frac{1}{\sqrt{\mu_n}}\int_t^R(r-t)^{s+1/2}J_{s+1/2}(\mu_n(r-t))\,dr$. В нашей работе [1] установлено, что при всех $0\leqslant s\leqslant[C_2]$ для величины $K(\mu_n,t,R)$ справедлива оценка

$$|K(\mu_n,t,R)|=O(|\mu_n|^{-1}). \qquad (24)$$

Из оценок (20), (21) и (24), учитывая тот факт, что все элементы матрицы $U(x)$ суммируемы, получим

$$|S_2| = O(|\mu_n|^{-1}). \tag{25}$$

Подставляя правые части (23) и (25) в правую часть (18), получим

$$\|\psi^n\|_{L_p^m(K)} \left| \int_{x_0-R}^{x_0+R} \hat{\psi}^n(y)\,dy \right| \leqslant \frac{C}{|\mu_n|}. \tag{26}$$

В силу выбора чисел R и x_0 можно утверждать, что верна оценка

$$\|\psi^n\|_{L_p^m(K)} \left| \int_{x_1}^{x_2} \hat{\psi}^n(y)\,dy \right| \leqslant \frac{C}{|\mu_n|} \tag{27}$$

для любых x_1 и x_2, таких, что $a \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant b$.

Оценка (16) следует из (27) очевидным образом. Таким образом, лемму 1 можно считать доказанной.

Введем вектор-функции

$$\theta_j(x, y, \mu) = \sum_{|\mu_n| \leqslant \mu} \psi_j^n(x) \overline{\hat{\psi}}^n(y), \quad \tilde{\theta}_j(x, y, \mu) = \sum_{|\mu_n^1| \leqslant \mu} \tilde{\psi}_j^n(x) \overline{\hat{\hat{\psi}}}^n(y). \tag{28}$$

Лемма 2. *Если выполнены условия теоремы 1, то для вектор-функций, определенных в (28), при всех достаточно больших μ для любых $j = 1, 2, \ldots, m$ справедливы оценки*

$$\left| \int_a^c [\theta_j(x, y, \mu) - \tilde{\theta}_j(x, y, \mu)]\,dy \right| = O\left(\frac{\ln \mu}{\mu}\right), \tag{29}$$

$$\left| \int_c^b [\theta_j(x, y, \mu) - \tilde{\theta}_j(x, y, \mu)]\,dy \right| = O\left(\frac{\ln \mu}{\mu}\right), \tag{30}$$

равномерные по x на любом компакте интервала G $(a \leqslant c \leqslant b)$.

Доказательство. Докажем оценку (29). Фиксируем произвольный компакт K интервала G и произвольное число R_0, для которого $0 < 2R_0 < \rho(K, dG)$. Пусть $x \in K$, $y \in G$. Для любого числа R из отрезка $[R_0, 2R_0]$ введем вспомогательную m-компонентную вектор-функцию $v^j(x, y, \mu, R)$, у которой j-я компонента равна «срезанному» ядру Дирихле, т. е. равна

$$\begin{array}{ll} \dfrac{1}{\pi} \dfrac{\sin[|\mu_n|(x-y)]}{(x-y)} & \text{при } |x-y| < R, \\ 0 & \text{при } |x-y| \geqslant R, \end{array} \tag{31}$$

а все остальные компоненты равны нулю. Будем раскладывать эту вектор-функцию по системе вектор-функций $\{\overline{\hat{\psi}}^n(y)\}$.

В работе В. А. Ильина [3] установлен вид n-го коэффициента Фурье этой вектор-функции:

$$v_n^j(x, R, \mu) = \frac{2}{\pi} \psi_j^n(x) \int_0^R \frac{\sin(\mu r)}{r} \cos(\mu_n r)\,dr +$$

$$+ \sum_{\substack{s \geqslant 1 \\ \psi^{n-s} \sim \psi^n}} \frac{1}{2^s s!} \frac{\psi_j^{n-s}(x)}{\mu_n^s} \left[\mu^{1/2} \mu_n^{1/2} \int_0^R J_{1/2}(\mu r) J_{s-1/2}(\mu_n r) r^s dr\right] +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^R \frac{1}{\mu_n} \int_t^R \sin(\mu_n(r-t)) \frac{\sin(\mu r)}{r}\,dr \times$$

$$\times \left[\sum_{l=1}^m U_{jl}(x+t) \psi_l^n(x+t) + U_{jl}(x-t) \psi_l^n(x-t)\right] dt +$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{\substack{s\geqslant 1\\ \psi^{n-s}\sim\psi^n}}\frac{1}{2^s s!}\int_0^R\frac{1}{\sqrt{\mu_n}}\int_t^R\frac{\sin\mu r}{r}(r-t)^{s+1/2}J_{s+1/2}[\mu_n(r-t)]\,dr\times$$

$$\times\left[\sum_{l=1}^{m}\frac{U_{jl}(x+t)\psi_l^{n-s}(x+t)+U_{jl}(x-t)\,\psi_l^{u-s}(x-t)}{\mu_n^s}\right]dt. \quad (32)$$

Исходя из (32), запишем следующее равенство:

$$v^j(x,y,\mu,r)-\sum_{|\mu_n|<\mu}\psi_j^n(x)\bar{\hat{\psi}}^n(y)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\psi_j^n(x)\bar{\hat{\psi}}^n(y)\times$$

$$\times\int_0^R\frac{\sin(\mu r)}{r}\cos(\mu_n r)\,dr-\sum_{|\mu_n|<\mu}\psi^n(x)\bar{\hat{\psi}}_j^n(y)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{s\geqslant 1\\ \psi^{n-s}\sim\psi^n}}\frac{\bar{\hat{\psi}}^n(y)\psi_j^{n-s}(x)}{2^s s!\ \mu_n^s}\left[\mu^{1/2}\mu_n^{1/2}\int_0^R J_{1/2}(\mu r)J_{s-1/2}(\mu_n r)r^s dr\right]+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^R\left[\frac{\bar{\hat{\psi}}^n(y)}{\mu_n}\int_t^R\sin(\mu_n(r-t))\,\frac{\sin(\mu r)}{r}\,dr\right]\times$$

$$\times\left[\sum_{l=1}^{m}U_{jl}(x+t)\psi_l^n(x+t)+U_{jl}(x-t)\psi_l^n(x-t)\right]dt+$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{l=1}^{m}\sum_{\substack{s\geqslant 1\\ \psi^{n-s}\sim\psi^n}}\frac{\bar{\hat{\psi}}^n(y)}{2^s s!}\int_0^R\frac{1}{\sqrt{\mu_n}}\int_t^R\frac{\sin\mu r}{r}(r-t)^{s+1/2}J_{s+1/2}[\mu_n(r-$$

$$-t)]\,dr\left[\sum_{l=1}^{m}\frac{U_{jl}(x+t)\,\psi_l^{n-s}(x+t)+U_{jl}(x-t)\psi_l^{n-s}(x-t)}{\mu_n^s}\right]dt. \quad (33)$$

Усредняем по R почленно обе части равенства (33)*) и интегрируем по y в пределах от a до c $(a\leqslant c\leqslant b)$. (Законность почленного усреднения, а затем интегрирования будет обоснована ниже.) Далее проведем оценку каждого слагаемого.

Согласно нашей работе [1], справедливо равенство

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\psi_j^n(x)\bar{\hat{\psi}}^n(y)S_{R_0}\left[\frac{2}{\pi}\int_0^R\frac{\sin(\mu r)}{r}\cos(\mu_n r)\,dr\right]-$$

$$-\sum_{|\mu_n|<\mu}\psi_j^n(x)\bar{\hat{\psi}}^n(y)=\frac{1}{2}\sum_{|\mu_n|=\mu}\psi_j^n(x)\bar{\hat{\psi}}^n(y)+\sum_{n=1}^{\infty}\psi_j^n(x)\bar{\hat{\psi}}^n(y)\overset{0}{I}(\mu,\mu_n,R), \quad (34)$$

где, как следует из работы [7], величина $\overset{0}{I}(\mu,\mu_n,R)$ имеет вид

$$\overset{0}{I}(\mu,\mu_n,R_0)=S_{R_0}\left[-\frac{2}{\pi}\int_R^{\infty}\frac{\sin(\mu r)}{r}\cos(\bar{\mu}_n r)\,dr+\right.$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\bar{\mu}_n^{2k}}{(2k)!}\int_0^R r^{2k-1}\sin\mu r\cos\bar{\mu}_n r\,dr-$$

$$\left.-\frac{2i}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\bar{\mu}_n^{2k-1}}{(2k-1)!}\int_0^R r^{2k-2}\sin\mu r\sin\bar{\mu}_n r\,dr\right],$$

*) Операция усреднения вводится здесь так же, как и в работе [3], т. е. для произвольной функции $f(R)$, заданной на сегменте $R_0\leqslant R\leqslant 2R_0$, полагается $S_{R_0}=(2/3R_0^2)\int_{R_0}^{2R_0}Rf(R)\,dR$.

где $\bar{\mu}_n$ и $\bar{\bar{\mu}}_n$ — действительная и мнимая части комплексного числа μ_n соответственно.

Для оценки первого слагаемого в правой части равенства (34) нам понадобится оценка, аналогичная оценке (19), установленная в работе [4], а именно при условии, что все элементы потенциала $U(x)$ принадлежат только классу $L_1(G)$ для любых двух компактов K и K' интервала G, первый из которых лежит строго внутри второго, для любого целого s, такого, что $0\leqslant s\leqslant [C_2]$ и любого $p\geqslant 1$

$$\max_{x\in K}\left(|\psi^{n-s}(x)|/|\mu_n|^s\right)\leqslant C\|\psi^n(x)\|_{L_p^m(K')}. \tag{35}$$

Тогда из оценок (9), (16) и (35), взятой при $s=0$, получим

$$\left|\int_a^c \sum_{|\mu_n|=\mu}\psi_j^n(x)\bar{\hat{\varphi}}^n(y)\right|\leqslant \sum_{|\mu_n|=\mu}|\psi_j^n(x)|\left|\int_a^c\bar{\hat{\varphi}}^n(y)dy\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{|\mu_n|=\mu}\|\psi^n\|_{L_p^m(K)}\left|\int_a^c\bar{\hat{\varphi}}^n(y)dy\right|=O\left(\frac{1}{\mu}\right). \tag{36}$$

Введем обозначение:

$$S_{R_0}\left[\mu^{1/2}\mu_n^{1/2}\int_0^R J_{1/2}(\mu r)J_{s-1/2}(\mu_n r)r^s dr\right]=\overset{s}{I}(\mu,\mu_n,R_0),\quad s\geqslant 1,$$

докажем, что

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{s\geqslant 0\\ \psi^{n-s}\sim\psi^n}}\frac{1}{2^s s!}\,\frac{\psi_j^{n-s}(x)}{\mu_n^s}\overset{s}{I}(\mu,\mu_n,R)\int_a^c\bar{\hat{\varphi}}^n(y)dy\right|=$$

$$=O\left(\frac{1}{\mu}\right)\ \text{при}\ s\geqslant 0. \tag{37}$$

Заметим сразу, что на основании (9), (21) и (35)

$$\sum_{\substack{s\geqslant 0\\ \psi^{n-s}\sim\psi^n}}\frac{1}{2^s s!}\,\frac{|\psi_j^{n-s}(x)|}{|\mu_n|^s}=O(1)\|\psi^n\|_{L_p^m(K)}. \tag{38}$$

Следовательно, осталось доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\overset{s}{I}(\mu,\mu_n,R_0)|\,\|\psi^n\|_{L_p^m(K)}\left|\int_a^c\bar{\hat{\varphi}}^n(y)dy\right|=O\left(\frac{1}{\mu}\right). \tag{39}$$

Принимая во внимание оценки (9), (16) и (27), можно утверждать, что доказательство оценки (39) фактически повторяет доказательство, приведенное в нашей работе [1] для случая скалярных операторов (1), основанное на оценках, полученных в работе [7], а именно:

а) при всех $|\mu_n|\ |\overset{s}{I}(\mu,\mu_n,R_0)|=O(1),\ s\geqslant 0;$ (40)

б) при $|\mu_n|\geqslant 1$ и $|\mu-|\mu_n||>1$

$$|\overset{s}{I}(\mu,\mu_n,R_0)=O(|\mu-|\mu_n||^{-2}),\quad s\geqslant 0; \tag{41}$$

и оценке, полученной в работе [1]: при $|\mu_n|\leqslant 1$ и $|\mu-|\mu_n||>1$

$$|\overset{s}{I}(\mu,\mu_n,R_0)=O(\mu^{-1}),\quad s\geqslant 0. \tag{42}$$

Обозначим

$$\overset{s}{K}(\mu,\mu_n,t,R)=\frac{1}{\sqrt{\mu_n}}\int_t^R\frac{\sin\mu r}{r}(r-t)^{s+1/2}J_{s+1/2}[\mu_n(r-t)]dr,$$

$$s=1,2,\ldots,[C_2],$$

$$\overset{0}{K}(\mu, \mu_n, t, R) = \frac{1}{\mu_n} \int_t^R \sin(\mu_n(r-t)) \frac{\sin(\mu r)}{r} dr.$$

Докажем, что при всех $s \geqslant 0$

$$\Big| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{s \geqslant 0 \\ \psi^{n-s} \sim \psi^n}} \frac{1}{2^s s!} S_{R_0} \int_0^R \overset{s}{K}(\mu, \mu_n, t, R) \times$$

$$\times \Big[\sum_{l=1}^{m} \mu_n^{-s} (U_{jl}(x+t) \psi_l^{n-s}(x+t) + U_{jl}(x-t) \psi_l^{n-s}(x-t)) \Big| \times$$

$$\times \int_a^c \bar{\hat{\psi}}^n(y)\, dy \Big| = O(\mu^{-1} \ln \mu). \qquad (43)$$

Заметим сразу, что на основании (9), (21) и (35), а также того факта, что элементы матрицы $U(x)$ являются суммируемыми функциями, имеем

$$\Big| \sum_{\substack{s \geqslant 0 \\ \psi^{n-s} \sim \psi^n}} \frac{1}{2^s s!} S_{R_0} \int_0^R \Big[\sum_{l=1}^{m} \mu_n^{-s} (U_{jl}(x+t) \psi_l^{n-s}(x+t) + U_{jl}(x-t) \psi_l^{n-s}(x-t)) \Big] \Big| =$$

$$= O(1) \|\psi^n\|_{L_p^m(K)}. \qquad (44)$$

Следовательно, осталось доказать, что при всех $s \geqslant 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{\substack{t \in [0, R] \\ R \in [R_0, 2R_0]}} |\overset{s}{K}(\mu, \mu_n, t, R)| \, \|\psi^n\|_{L_p^m(K)} \Big| \int_a^c \bar{\hat{\psi}}^n(y)\, dy \Big| = O\Big(\frac{\ln \mu}{\mu}\Big). \qquad (45)$$

В работе [8] для величин $\overset{s}{K}(\mu, \mu_n, t, R)$ установлены оценки:

а) при $1 \leqslant |\mu_n| \leqslant \mu/2$ и при всех $s = 0, 1, \ldots, [C_2]$

$$|\overset{s}{K}(\mu, \mu_n, t, R)| = O(\mu^{-1}); \qquad (46)$$

б) при $3\mu/2 \leqslant \mu_n$ и при всех $s = 0, 1, \ldots, [C_2]$

$$|\overset{s}{K}(\mu, \mu_n, t, R)| = O(\mu |\mu_n|^{-2}); \qquad (47)$$

в) при $|\mu - |\mu_n|| \leqslant \mu/2$ и при всех $s = 1, 2, \ldots, [C_2]$

$$|\overset{s}{K}(\mu, \mu_n, t, R)| = O(\mu^{-1}); \qquad (48)$$

г) при $|\mu - |\mu_n|| < 2$

$$|\overset{0}{K}(\mu, \mu_n, t, R)| = O(\mu^{-1} \ln \mu); \qquad (49)$$

д) при $2 \leqslant |\mu - |\mu_n|| \leqslant \mu/2$

$$|\overset{0}{K}(\mu, \mu_n, t, R)| = O(\mu^{-1} \ln(\mu / |\mu - |\mu_n||)). \qquad (50)$$

Кроме того, в нашей работе [1] получено, что при $|\mu_n| \leqslant 1$ и при всех $s = 0, 1, \ldots, [C_2]$

$$|\overset{s}{K}(\mu, \mu_n, t, R)| = O(\mu^{-1}). \qquad (51)$$

Как и в предыдущем случае, с учетом (9), (16) и (27), доказательство оценки (45) текстуально повторяет доказательство аналогичной оценки для скалярных операторов (1), приведенное в нашей работе [1] и основанное на оценках (46)—(51).

Таким образом, мы доказали, что

$$\Big| \int_a^c (S_{R_0} v^j(x, y, \mu, R) - \theta_j(x, y, \mu))\, dy \Big| = O\Big(\frac{\ln \mu}{\mu}\Big). \qquad (52)$$

Аналогично доказывается оценка

$$\left| \int_a^c (S_{R_0} v^j(x, y, \mu, R) - \tilde{\theta}_j(x, y, \mu))\, dy \right| = O\left(\frac{\ln \mu}{\mu}\right). \qquad (53)$$

Из (52) и (53), применяя неравенство треугольника, получаем (29). Оценка (30) доказывается абсолютно аналогично.

Однако для полного завершения доказательства леммы 2 следует убедиться в законности почленного усреднения обеих частей равенства (33), а после этого почленного интегрирования по переменной y в пределах от a до c ($a \leqslant c \leqslant b$). Нетрудно убедиться (см. работу [3]), что n-й коэффициент Фурье $v_n^j(x, R, \mu)$ биортогонального разложения функции $v^j(x, y, \mu, R)$ по системе $\{\bar{\hat{\psi}}_n(y)\}$ связан с аналогичным коэффициентом $\hat{v}_n^j(x, R_0, \mu)$ функции $S_{R_0}[v^j(x, y, \mu, R)]$ соотношением

$$\hat{v}_n^j(x, R_0, \mu) = S_{R_0}[v_n^j(x, R, \mu)]. \qquad (54)$$

Следовательно, почленное усреднение не нарушает сходимости ряда, что, принимая во внимание конечность интервала G, оправдывает почленное интегрирование по y.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Пусть $f(x)$ — произвольная m-компонентная вектор-функция, все компоненты которой монотонны на $G = [a, b]$. Применяя формулу Боннэ (см., например, [9, с. 353—356]) и используя оценки (29) и (30), получаем, что между a и b найдется такая точка ξ, что справедливо равенство

$$|\sigma_j^\mu(x, f) - \tilde{\sigma}_j^\mu(x, f)| = \int_a^b f(y)\,[\theta_j(x, y, \mu) - \tilde{\theta}_j(x, y, \mu)]\, dy =$$

$$= f(a) \int_a^\xi [\theta_j(x, y, \mu) - \tilde{\theta}_j(x, y, \mu)]\, dy + f(b) \int_\xi^b [\theta_j(x, y, \mu) - \tilde{\theta}_j(x, y, \mu)]\, dy =$$

$$= O\left(\frac{\ln \mu}{\mu}\right). \qquad (55)$$

Таким образом, теорему 1 можно считать доказанной.

Очевидно, что для доказательства теоремы 2 достаточно установить, что если все элементы матрицы $U(x)$ являются функциями из класса $L_p[G]$ при некотором $p > 1$, то при всех $s \geqslant 0$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{s \geqslant 0 \\ \psi^{n-s} \sim \psi^n}} \frac{1}{2^s s!} S_{R_0} \int_0^R \overset{s}{K}(\mu, \mu_n, t, R) \times \right.$$

$$\times \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_{jl}(x+t)\psi_l^{n-s}(x+t) + U_{jl}(x-t)\psi_l^{n-s}(x-t)}{\mu_n^s} \right] dt \times$$

$$\left. \times \int_a^c \bar{\hat{\psi}}^n(y)\, dy \right| = O\left(\frac{1}{\mu}\right). \qquad (56)$$

Для получения оценки (56) в силу неравенств (9), (12), (35) достаточно для некоторого малого $\delta > 0$ установить оценки

$$\max_{\substack{t \in [0, R] \\ R \in [R_0, 2R_0]}} |t^\delta \overset{s}{K}(\mu, \mu_n, t, R)| = O(\mu^{-1} |\mu_n|^{\delta/2}) \qquad (57)$$

для всех $s = 0, 1, \ldots, [C_2]$. Действительно, если оценки (57) будут установлены, то для получения (56) в силу леммы 1 достаточно учесть, что при $U_{jl}(x) \in L_p(G)$ при $p > 1$ для достаточно малого $\delta > 0$

$$\int_0^R t^{-\delta} |U_{jl}(x \mp t)|\, dt \leqslant C = \text{const}.$$

Доказательство оценок (57) можно найти в нашей работе [2]. Таким образом, теорема 2 тоже доказана.

Замечание. Оценки (14) и (15) справедливы и для вектор-функций, все компоненты которых абсолютно непрерывны. Это следует из того, что абсолютно непрерывная функция является функцией с ограниченным изменением, а функция с ограниченным изменением в свою очередь представима в виде разности двух возрастающих функций.

Автор выражает глубокую благодарность В. А. Ильину за предложенную тему и непосредственное руководство работой.

Литература

1. Никольская Е. И. // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 4. С. 598—612.
2. Никольская Е. И. // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 1. С. 118—127.
3. Ильин В. А. // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 11. С. 1862—1879.
4. Ильин В. А., Мальков К. В., Моисеев Е. И. // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 25, № 12. С. 2133—2143.
5. Ильин В. А., Моисеев Е. И. // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 4. С. 702—705.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., 1974. Т. 2.
7. Ильин В. А. // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 6. С. 980—1010.
8. Ильин В. А. // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 4. С. 577—597.
9. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х. Математический анализ. М., 1985. Т. 1.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 17 августа 1993 г.