Ю. В. Матиясевич, Достаточное условие сходимости монотонных последовательностей, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1971, том 20, 97–103

Ю.В.Матиясевич

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ МОНОТОННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ *)

Широкое применение в классическом математическом анализе находит следующая теорема:

Каждая ограниченная сверху неубывающая последовательность вещественных чисел имеет конечный предел.

Эта теорема является чистой теоремой существования - ее доказательство не дает возможности фактически вычислять приближенные значения предела с заранее заданной степенью точности. Более того, в конструктивной математике эта теорема опровергается на конкретном примере, построенном Е.Шпеккером в [I] (см.также[2], разд. 8.3). Тем не менее, иногда удается, установив с помощью теоремы лишь факт сходимости последовательности, затем найти (эффективно) и сам предел. Рассмотрим один пример, который приводит Г.М.Фихтенгольц в[3], гл. I.§ 3.

Пусть c - положительное число. Определим последовательность $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ вещественных чисел следующим образом:

$$x_0=0, \qquad x_{k+1}=\sqrt{c+x_k} \qquad (k=0,1,\dots) \tag{I}$$

Нетрудно показать, что

$$x_0<x_1<\dots<x_k<x_{k+1}<\dots<\sqrt{c}+1. \tag{2}$$

Отсюда мы заключаем, что рассматриваемая последовательность имеет предел. Обозначим его через a. Переходя к пределу в рекуррентном соотношении (I), получаем, что

$$a=\sqrt{c+a},$$

*) Результаты настоящей заметки были доложены на Ленинградском семинаре по конструктивной математике 20 ноября 1969 года.

откуда

$$a^2 = c + a. \qquad (3)$$

Согласно (2) $a > 0$, а уравнение (3) имеет лишь один положительный корень, следовательно,

$$a = \frac{1+\sqrt{4c+1}}{2}.$$

Существенным обстоятельством, позволившим найти предел, является наличие рекуррентного соотношения между членами последовательности. Ниже будет показано, что и в конструктивной математике справедлива теорема о сходимости монотонной последовательности для случая, когда члены последовательности удовлетворяют рекуррентному соотношению некоторого (весьма общего) вида.

В классическом анализе такая теорема могла бы иметь следующий вид.

Пусть $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ - неубывающая последовательность вещественных чисел из сегмента $[u, v]$, F - непрерывная функция, определенная на всех таких τ-ках вещественных чисел $\langle y_1, \ldots, y_\tau \rangle$, что $u \leq y_1 \leq \ldots \leq y_\tau \leq v$. Если для каждого k

$$F(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+\tau-1}) = 0$$

и если уравнение

$$F(y, y, \ldots, y) = 0 \qquad (4)$$

имеет не более одного решения из сегмента $[u, v]$, то последовательность $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ имеет конечный предел.

Ясно, что в условиях теоремы пределом последовательности является единственный корень уравнения (4).

Условие "уравнение (4) имеет не более одного решения" может быть записано следующим образом:

$$\forall a_1 a_2 \Big[\mathop{\&}_{i=1}^{2} \left[u \leq a_i \leq v \;\&\; F(a_i, \ldots, a_i) = 0 \right] \Rightarrow \qquad (5)$$
$$\Rightarrow a_1 = a_2 \Big]$$

Как нетрудно показать, в классическом анализе это условие эквивалентно следующему[ж)]:

$$\forall\varepsilon\,\exists\delta\,\forall a_1 a_2\,\Big[\mathop{\&}_{i=1}^{2}\big[u \le a_i \le v\ \& \qquad (6)$$
$$\&\,|F(a_i,\ldots,a_i)|<\delta\big] \Rightarrow |a_1-a_2|<\varepsilon\Big].$$

Однако при конструктивном понимании утверждения (5) и (6) не эквивалентны друг другу - из (6) следует (5), но не наоборот. Таким образом, здесь имеет место обычное являние "расщепления" одного классического понятия на несколько неэквивалентных конструктивных понятий. Мы покажем, что если условие "уравнение (4) имеет не более одного решения" понимать как (6), то описанный выше классический метод нахождения пределов дословно переносится в конструктивную математику.

Замечание I. Отметим без доказательства, что утверждение (6) вытекает из утверждения (5) при следующем дополнительном предположении: функция F такова, что одноместная функция $|F(y,\ldots,y)|$ достигает своего инфимума на любом сегменте, содержащемся в $[u,v]$.

Теорема I. Пусть $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ - неубывающая последовательность вещественных чисел из сегмента $[u,v]$, F - равномерно непрерывная функция, определенная на всех таких τ-ках вещественных чисел $\langle y_1,\ldots,y_\tau\rangle$, что $u\le y_1\le\ldots\le y_\tau\le v$. Если для каждого k

$$F(x_k, x_{k+1},\ldots,x_{k+\tau-1})=0 \qquad (7)$$

и если для любого ε существует

[ж)] Здесь и ниже греческие буквы используются в качестве переменных для положительных чисел.

такое δ, что каковы бы ни были числа a_1 и a_2 из сегмента $[u,v]$

$$|F(a_1,\dots,a_1)|<\delta \ \& \ |F(a_2,\dots,a_2)|<\delta \Rightarrow \qquad (8)$$

$$\Rightarrow |a_1-a_2|<\varepsilon,$$

то последовательность $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ имеет конечный предел.

<u>Замечание 2</u>. Все объекты в формулировке теоремы являются конструктивными, и все утверждения следует понимать с конструктивной точки зрения (см., например, [2], [4], [5], [6]).

<u>Замечание 3.</u> В классическом случае было бы естественнее требовать просто непрерывности функции F. Однако теорема о том, что непрерывная функция на компакте является равномерно непрерывной, не переносится в конструктивную математику и мы должны налагать формально более сильное условие равномерной непрерывности. В большинстве конструктивных аналогов классических теорем именно понятие равномерной непрерывности играет роль классической непрерывности.

<u>Доказательство</u> теоремы мы проведем (для упрощения записи) для случая $\tau=3$. Пусть последовательность $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ и функция F удовлетворяют условиям теоремы. Докажем, что последовательность $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ сходится в себе, т.е.

$$\forall\varepsilon\exists n\forall k_1 k_2[n\leq k_1\leq k_2 \Rightarrow |x_{k_1}-x_{k_2}|<\varepsilon]. \qquad (9)$$

Зафиксируем произвольное положительное число ε_0 и найдем согласно условию такое число δ_0, что для любых двух чисел a_1 и a_2 из сегмента $[u,v]$

$$\mathop{\&}_{i=1}^{2}|F(a_i,\dots,a_i)|<\delta_0 \Rightarrow |a_1-a_2|<\varepsilon_0 \qquad (10)$$

Так как функция F равномерно непрерывна, то найдется такое число γ_0, что для любых шести чисел $y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3$ из сегмента $[u,v]$

$$[|y_1 - z_1| < \gamma_0 \;\&\; |y_2 - z_2| < \gamma_0 \;\&\; |y_3 - z_3| < \gamma_0 \;\&$$

$$\& \; y_1 \leq y_2 \leq y_3 \;\; \& \;\; z_1 \leq z_2 \leq z_3] \Rightarrow \tag{II}$$

$$\Rightarrow |F(y_1, y_2, y_3) - F(z_1, z_2, z_3)| < \delta_0 .$$

Выберем четное число n_0 столь большим, чтобы

$$n_0 \gamma_0 > 4 (v - u) . \tag{I2}$$

Мы докажем, что

$$\forall k_1 k_2 [n_0 \leq k_1 \leq k_2 \Rightarrow |x_{k_1} - x_{k_2}| < \varepsilon_0] . \tag{I3}$$

Установим предварительно справедливость следующего вспомогательного утверждения: каковы бы ни были натуральные числа ℓ_1 и ℓ_2

$$(x_{\ell_1 + 2} - x_{\ell_1}) + (x_{\ell_2 + 2} - x_{\ell_2}) < \gamma_0 \Rightarrow |x_{\ell_1} - x_{\ell_2}| < \varepsilon_0 . \tag{I4}$$

Пусть числа ℓ_1 и ℓ_2 удовлетворяют посылке условия (I4). Так как последовательность $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ не убывает, то

$$|x_{\ell_i + j} - x_{\ell_i}| < \gamma_0 \quad (i = 1, 2 ;\; j = 0, 1, 2).$$

Полагая в (II) $y_1 = y_2 = y_3$, $z_1 = x_{\ell_i}$, $z_2 = x_{\ell_i + 1}$, $z_3 = x_{\ell_i + 2}$ и учитывая условие (7), получаем, что

$$|F(x_{\ell_i}, x_{\ell_i}, x_{\ell_i})| < \delta_0 \quad (i = 1, 2).$$

Согласно (I0) отсюда следует, что

$$|x_{\ell_1} - x_{\ell_2}| < \varepsilon_0 ,$$

тем самым утверждение (I4) доказано.

Переходим к доказательству утверждения (I3). Пусть k_1 и k_2 – такие натуральные числа, что $n_0 \leq k_1 \leq k_2$. Допустим, что

$$|x_{k_2} - x_{k_1}| \geq \varepsilon_0 \tag{I5}$$

Так как последовательность $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ не убывает, то отсюда следует, что

$$u \leq x_0 \leq \ldots \leq x_{k_1} < x_{k_1} + \varepsilon_0 \leq x_{k_2} \leq \ldots \leq x_{k_2 + n_0} \leq v ,$$

откуда согласно (I4) получаем, что для любого m, не превосходящего k_1, справедливо неравенство $(x_{m+2}-x_m)+(x_{k_2+m+2}-x_{k_2+m})\geqslant \gamma_0$. Используя это неравенство легко можно доказать с помощью индукции, что для любого s, не превосходящего $k/2$, справедливо неравенство

$$(x_{2s}-x_0)+(x_{k_2+2s}-x_{k_2})\geqslant s\gamma_0$$

и, следовательно, справедливо также неравенство

$$2(v-u)\geqslant s\gamma_0 .$$

Полагая здесь $s=n_0/2$ мы получаем, что $2(v-u)\geqslant n_0\gamma/2$ что противоречит выбору n_0 – неравенству (I2). Таким образом, допущение (I5) приводит к противоречию, поэтому $|x_{k_2}-x_{k_1}|<\varepsilon_0$. Тем самым доказано утверждение (I3), и, следовательно, утверждение (9). Теорема доказана.

Теорема I охватывает не все примеры, приведенные Г.М. Фихтенгольцем в [3], гл.I, § 3. Примеры, в которых рассматриваются сразу две монотонные последовательности, охватываются следующей теоремой.

Теорема 2. Пусть $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ – неубывающая последовательность вещественных чисел из сегмента $[u,v]$, $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ – невозрастающая последовательность вещественных чисел из сегмента $[s,t]$, G – равномерно непрерывная функция, определенная на всех таких наборах из 2τ вещественных чисел $\langle w_1,\ldots,w_\tau, z_1,\ldots,z_\tau\rangle$, что $u\leqslant w_1\leqslant\ldots\leqslant w_\tau\leqslant v$, $s\leqslant z_\tau\leqslant\ldots\leqslant z_1\leqslant t$. Если для каждого k

$$G(x_k,\ldots,x_{k+\tau-1},y_k,\ldots,y_{k+\tau-1})=0$$

~~и если для любого ε существует та~~кое δ, что каковы бы ни были число a_1 из сегмента $[u,v]$ и число a_2 из сегмента $[s,t]$.

$$|G(a_1,\dots,a_1,a_2,\dots,a_2)|<\delta \Rightarrow |a_1-a_2|<\varepsilon,$$

то последовательности $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ стремятся к одному и тому же пределу.

Замечание 4. Отметим, что в условии теоремы не требуется, чтобы для каждого k было справедливо неравенство $x_k \leq y_k$.

Доказательство теоремы основано на тех же идеях, что и доказательство теоремы I, и может быть проведено почти дословно так же.

Автор выражает благодарность В.А.Лифшицу и В.П.Оревкову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

I. Specker E. Nicht konstructiv beweisbare Sätze der Analysis. "Journ.Symb.Logic", 1949, I4, 3, I45–I58.

2. Шанин Н.А. Конструктивные вещественные числа и конструктивные числа и конструктивные функциональные пространства. "Труды Матем.ин-та им.В.А.Стеклова", 1962, 67, I5– 294.

3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, I. М., 1970.

4. Марков А.А. О конструктивной математике. "Труды Матем. ин-та им.В.А.Стеклова", 1962, 67, 8–I4.

5. Цейтин Г.С., Заславский И.Д., Шанин Н.А. Особенности конструктивного математического анализа. Тезисы докладов на Международном конгрессе математиков (Москва, 1966), М., 1966, I7I–I77.

6. Tseytin G.S., Zaslavsky I.D., Shanin N.A. Peculiarities of constructive mathematical analysis. Труды Международного конгресса математиков (Москва, 1966), М., 1968, 253–26I.