Г. В. Кузьмина, Задачи об экстремальном разбиении и оценки коэффициентов в классе $\Sigma(r)$, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1991, том 196, 101–116

Г.В.Кузьмина

ЗАДАЧИ ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ РАЗБИЕНИИ И ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ В КЛАССЕ $\Sigma(\tau)$

Введение

Пусть Σ -класс функций $f(z)$, мероморфных и однолистных в области $U^*=\{z: |z|>1\}$ и имеющих в окрестности точки $z=\infty$ разложение вида

$$f(z) = z + \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \ldots \quad . \tag{I}$$

Через $\Sigma(\tau)$ обозначаем класс функций из Σ, обладающих следующим свойством: область $f(U^*)$ не содержит некоторой односвязной области, содержащей начало координат и имеющей конформный радиус τ, $0<\tau<1$, относительно этой точки, Класс $\Sigma(\tau)$ был введен в рассмотрение в монографии Дж.Дженкинса [I]. При этом в [I] была получена точная оценка модуля коэффициента α_0 в классе $\Sigma(\tau)$ в качестве одного из первых приложений "общей теоремы о коэффициентах", являющейся центральной темой монографии [I]. Позднее класс $\Sigma(\tau)$ исследовался в ряде работ других авторов. В работе А.Ю.Солынина [2], публикуемой в настоящем сборнике, даны оценки диаметров линий уровня в классе $\Sigma(\tau)$ и в виде следствия получена точная оценка для $|\alpha_1|$ в этом классе.

Данная работа посвящена исследованию связи задач об экстремальном разбиении с вопросами оценок коэффициентов в классах $\Sigma(\tau)$ и Σ. В теореме I на основании результатов в задачах об экстремальном разбиении получены точные неравенства для функционала $|f'(\rho)f'(-\rho)/[f(\rho)-f(-\rho)]^2|$, $\rho>1$, в классе $\Sigma(\tau)$. В качестве предельного результата из теоремы I вытекает точная оценка для $|\alpha_1|$ в классе $\Sigma(\tau)$ (теорема 2). При помощи соображений того же характера находится максимум $|\alpha_2|$ в этом же классе функций (теорема 3). Данная в [I] оценка для $|\alpha_0|$ в классе $\Sigma(\tau)$ может быть получена при помощи того же подхода.

Используемая в настоящей работе связь классических задач об экстремальном разбиении с вопросами оценок коэффициентов в классе $\Sigma(\tau)$ основывается на том факте что ассоциированные квадратичные дифференциалы в указанных задачах в классе $\Sigma(\tau)$ (в структуре траекторий этих дифференциалов присутствуют концевые области) можно рассматривать как предельные для квадратичных дифференциалов в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов односвязных областей и конформных модулей двусвязных областей в соответствующих семействах систем неналегающих областей.

В заключительной части данной работы демонстрируется возможность использования понятия приведенного модуля односвязной области, подобной в малом концевой области квадратичного дифференциала, для получения точных оценок коэффициентов в классах $\Sigma(\tau)$ и Σ.

В дальнейшем $U^*=\{z:|z|>1\}$, $\rho>1$. Через $\mathcal{D}(a_1,\dots,a_n)$ обозначаем семейство систем неналегающих односвязных областей $D_1,\dots,D_n$ на $\overline{\mathbb{C}}$, $a_k\in D_k$. Соответствующее семейство систем областей в области U^* обозначаем через $\mathcal{D}_{U^*}(a_1,\dots,a_n)$. Через $R(D,a)$ обозначаем конформный радиус односвязной области D относительно точки $a\in D$, через $M(\Delta)$ - конформный модуль двусвязной области Δ.

§ I. Задачи об экстремальном разбиении и оценки для $\left|f'(\rho)f'(-\rho)/[f(\rho)-f(-\rho)]^2\right|$ в классе $\Sigma(\tau)$

I°. Пусть $B_1^{(z)}=\{z:z\in U^*, \operatorname{Re} z>0\}$, $B_2^{(z)}=\{z:z\in U^*, \operatorname{Re} z<0\}$. Эта пара областей реализует максимум произведения $R(D_1,\rho)\cdot R(D_2,-\rho)$ в семействе $\mathcal{D}_{U^*}(\rho,-\rho)$. Пусть

$$G(z)=\frac{1}{2}(z-z^{-1}),\quad H=G(\rho)=\frac{1}{2}(\rho-\rho^{-1}).$$

При отображении $Z=G(z)$ области $B_1^{(z)}$ соответствует правая полуплоскость $\mathbb{H}=\{Z:\operatorname{Re} Z>0\}$ и из равенства

$$R(\mathbb{H},H)=2H=G'(\rho)\,R(B_1^{(z)},\rho)$$

получаем

$$R(B_1^{(z)},\rho)\,R(B_2^{(z)},-\rho)=\left[\frac{2\rho(1-\rho^{-2})}{1+\rho^{-2}}\right]^2. \qquad (2)$$

Пусть $f(z)\in\Sigma(\tau)$ и пусть D_0^f -область, не принадлежащая $f(U^*)$, $0\in D_0^f$, $R(D_0^f,0)=\tau$. Обозначим через D_1^f, D_2^f f-образы областей $B_1^{(z)},B_2^{(z)}$ и пусть $a_1=f(\rho)$, $a_2=f(-\rho)$. Система областей D_0^f, D_1^f, D_2^f принадлежит семейству $\mathcal{D}(0,a_1,a_2)$. Пусть μ - параметр, $0<\mu<2$, и пусть $D_0^{(w)}, D_1^{(w)}, D_2^{(w)}$ - система областей, реализующая максимум произведения

$$R(D_0,0)^{\mu^2}R(D_1,a_1)\,R(D_2,a_2)$$

в семействе $\mathcal{D}(0,a_1,a_2)$. Тогда

$$R(D_0^f,0)^{\mu^2}R(D_1^f,a_1)R(D_2^f,a_2) \leqslant R(D_0^{(w)},0)^{\mu^2}R(D_1^{(w)},a_1)R(D_2^{(w)},a_2). \quad (3)$$

При отображении

$$w \to W(w) := \frac{(a_1-a_2)w}{(a_1+a_2)w-2a_1a_2} \quad (4)$$

$0, a_1, a_2 \to 0, 1, -1$ и областям $D_K^{(w)}$, $K=0,1,2$, соответствуют области $D_K^{(W)}$, реализующие максимум произведения

$$R(D_0,0)^{\mu^2}R(D_1,1)R(D_2,-1) \quad (5)$$

в семействе $\mathcal{D}(0,1,-1)$. Имеем равенство

$$\frac{R(D_0^{(w)},0)^{\mu^2}R(D_1^{(w)},a_1)R(D_2^{(w)},a_2)}{|a_1-a_2|^{2-\mu^2}|a_1a_2|^{\mu^2}} = \frac{R(D_0^{(W)},0)^{\mu^2}R(D_1^{(W)},1)R(D_2^{(W)},-1)}{2^{2-\mu^2}}$$

и потому неравенство (3) можем записать в виде

$$\frac{R(D_0^f,0)^{\mu^2}R(D_1^f,1)R(D_2^f,-1)}{|f(\rho)-f(-\rho)|^{2-\mu^2}|f(\rho)f(-\rho)|^{\mu^2}} \leqslant \frac{R(D_0^{(W)},0)^{\mu^2}R(D_1^{(W)},1)R(D_2^{(W)},-1)}{2^{2-\mu^2}}. \quad (6)$$

Неравенство (6) справедливо для любой функции $f(z)\in\sum(\tau)$. Равенство в (6) реализуется только в том случае, когда области D_K^f, $K=0,1,2$, являются прообразами областей $D_K^{(W)}$ при преобразовании (4). Из единственности системы областей, реализующей максимум произведения (5) в семействе $\mathcal{D}(0,1,-1)$ и соображений симметрии следует, что каждая из областей $D_K^{(W)}$ симметрична относительно вещественной оси W-плоскости, область $D_0^{(W)}$ симметрична относительно мнимой оси, области $D_1^{(W)}$ и $D_2^{(W)}$ симметричны друг с другом относительно мнимой оси и их общая граница $\gamma^{(W)}$ принадлежит замыканию $\mathbb{I}^{(W)}$ этой прямой. Поэтому равенство в (6) может достигаться только в том случае, когда общая граница γ^f областей D_1^f и D_2^f принадлежит окружности $\Gamma^{(w)}$, являющемуся образом $\mathbb{I}^{(W)}$ при отображении $w = w(W)$, обратном к (4), и области D_1^f, D_2^f симметричны друг с другом относительно $\Gamma^{(w)}$. Так как $D_K^f = f(B_K^{(z)})$, $K=1,2$, то $\infty\,\overline{\in}\, D_1^f \cup D_2^f$ следовательно, $\infty \in \Gamma^{(w)}$, т.е. $\Gamma^{(w)}$ является замыканием некоторой прямой. Наконец, поскольку $f(z)=z+O(1)$ при $z\to\infty$, то из вида общей границы $\gamma^{(z)}$ областей $B_1^{(z)}$ и $B_2^{(z)}$ следует, что $\Gamma^{(w)}$ – замыкание мнимой оси w-плоскости. Таким образом, равенство в (6) может достигаться для функции $f(z)\in\sum(\tau)$ только в том случае, когда $f(z)$ – нечетная функция, при этом $f(z)$ – функция с вещественными коэффициентами. Поэтому при доказательстве существования экстремального отображения будем считать, что $f(z)$ – нечетная функция. В этом случае отображение (4) сводится к линейному преобразованию:

$$W = \frac{w}{f(\rho)}, \qquad f(\rho) > 0 \, . \tag{7}$$

Так как равенство в (3) может достигаться для $f(z) \in \sum(\tau)$ только в случае $R(D_0^{(w)}, 0) = \tau$, то равенство в (6) возможно только при условии $R(D_0^{(W)}, 0) = |W'(0)|\tau$, т.е.

$$R(D_0^{(W)}, 0) = \frac{\tau}{f(\rho)} \, . \tag{8}$$

Области $D_K^{(W)}$, $K = 0, 1, 2$, являются круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(W)\,dW^2 = -\frac{H^2}{\pi^2(1+h^2)}\,\frac{W^2+h^2}{W^2(W^2-1)^2}\,dW^2, \quad h = \frac{\mu}{2(1-\mu^2/4)^{1/2}} \tag{9}$$

(имея в виде последующий предельный переход при $\rho \to \infty$, мы рассматриваем квадратичные дифференциалы, траектории которых в их круговых областях имеют в определяемых этими дифференциалами метриках длины, равные соответственно μH и H). Имеем равенства

$$R(D_0^{(W)}, 0) = F_0(\mu), \quad R(D_1^{(W)}, 1) = R(D_2^{(W)}, -1) = F_1(\mu), \tag{10}$$

где

$$F_0(\mu) = \frac{\mu}{(1-\mu^2/4)^{1/2}}\left(\frac{1-\mu/2}{1+\mu/2}\right)^{1/\mu}, \quad F_1(\mu) = \frac{2}{1-\mu^2/4}\left(\frac{1-\mu/2}{1+\mu/2}\right)^{\mu/2}.$$

Так как $F_0(\mu)$ – монотонная функция от μ, то уравнение

$$f(\rho) = \frac{\tau}{F_0(\mu)} \tag{11}$$

определяет μ при фиксированных $f(\rho)$ и τ.

2^0. Найдем условие, при котором существует экстремальная функция $f(z) \in \sum(\tau)$. Пусть $\zeta = g_1(W)$ – отображение области $D_1^{(W)}$ на круг $|\zeta| < F_1(\mu)$, $g_1(1) = 0$, $g_1'(1) = 1$. Функция $g_1(W)$ удовлетворяет в $D_1^{(W)}$ уравнению

$$H^2\left(\frac{dg_1(W)}{g_1(W)}\right)^2 = -4\pi^2 Q(W)\,dW^2, \tag{12}$$

где $Q(W)\,dW^2$ – дифференциал (9). Так как длина в Q-метрике общей границы $\gamma_0^{(W)}$ областей $D_0^{(W)}$ и $D_1^{(W)}$ равна $1/2\,H\mu$, то при отображении $\zeta = g_1(W)$ образом дуги $\gamma_0^{(W)}$ является круговая дуга $\{\zeta = e^{i\varphi}F_1(\mu) : |\varphi-\pi| \leqslant \pi\mu/2\}$. Поэтому функция

$$\eta(W) = \frac{1+g_1(W)/F_1(\mu)}{1-g_1(W)/F_1(\mu)},$$

аналитически продолженная на $\overline{\mathbb{C}}^{(W)} \setminus \overline{D}_0^{(W)}$, отображает указанную область на внешность отрезка $[-i\,\mathrm{tg}\,\pi\mu/4,\ i\,\mathrm{tg}\,\pi\mu/4]$. Из уравнения (12) находим

$$g_1(W) = F_1(\mu)(1 + AW^{-1} + o(W^{-1})) \text{ при } W \to \infty, \quad A^2 = -4,$$

откуда

$$\eta(W) = W(1 + O(W^{-1})) \quad \text{при} \quad W \to \infty.$$

Следовательно,

$$\mathrm{cap}\, D_0^{(w)} = f(\rho)\,\mathrm{cap}\, D_0^{(W)} = \frac{1}{2} f(\rho)\,\mathrm{tg}\,\pi\mu/4.$$

Итак, при $0 < \mu \leqslant \mu^*$, где

$$\mu^* = \frac{4}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2}{f(\rho)}, \tag{13}$$

существует функция $f(z) \in \sum(\tau)$, для которой в (6) реализуется равенство. При $\mu = \mu^*$ функция $f(z)$ отображает U^* на внешность $\overline{D}_0^{(w)}$, при $\mu < \mu^*$ указанная функция отображает U^* на область, получающуюся из $\overline{\mathbb{C}}^{(w)} \setminus \overline{D}_0^{(w)}$ проведением разрезов по отрезкам мнимой оси, имеющих своими концами граничные точки области $D_0^{(w)}$.

Пусть теперь $\mu^* < \mu < 2$. В этом случае рассмотрим задачу о максимуме произведения

$$R(B_1, \rho)\, R(B_2, -\rho)\, M(\Delta)^{\mu^2}$$

в семействе $\mathcal{D}_{U^*}$ всех систем неналегающих областей $\{B_1, B_2, \Delta\}$ на U^*, где B_1 и B_2 – односвязные области, содержащие соответственно точки ρ и $-\rho$, Δ –двусвязная область, отделяющая точки $\pm\rho$ от окружности $|z| = 1$. Пусть $\{B_1^{(z)}, B_2^{(z)}, \Delta^{(z)}\}$ – экстремальная система областей этой задачи. При отображении $Z = F(z)$ этой системе областей соответствует система $\{B_1^{(Z)}, B_2^{(Z)}, \Delta^{(Z)}\}$, где $B_k^{(Z)}$ – круговые области, $\Delta^{(Z)}$ – кольцевая область для квадратичного дифференциала

$$q(Z)\,dZ^2 = -\frac{H^2(H^2+1)}{\pi^2(k^2H^2+1)}\,\frac{(1+k^2Z^2)\,dZ^2}{(Z^2-H^2)^2\,(Z^2+1)}\,, \tag{14}$$

где $k,\ 0<k<1$, – функция от μ и ρ, определяемая условием $\mu H = 2\,q\ell._q[-i,i]$, т.е. уравнением

$$\mu H = \frac{4H}{\pi}\left(\frac{H^2+1}{k^2H^2+1}\right)^{1/2}\int_0^1\left(\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}\right)^{1/2}\frac{dt}{H^2+t^2}\,. \tag{15}$$

Для конформного модуля $M(\Delta^{(Z)})$ области $\Delta^{(Z)}$ имеем равенство $\mu H \log M(\Delta^{(Z)}) = 2\pi\,q\ell._q[i, i/k]$, следовательно,

$$\log M(\Delta^{(Z)}) = \frac{\pi}{2}\left\{\int_1^{1/k}\left(\frac{1-k^2t^2}{t^2-1}\right)^{1/2}\frac{dt}{H^2+t^2}\Big/\int_0^k\left(\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}\right)^{1/2}\frac{dt}{H^2+t^2}\right\}. \tag{16}$$

Далее, для отображения $\zeta_1 = q_1(Z)$ области $B_1^{(Z)}$ на круг $|\zeta_1| < R(B_1^{(Z)}, H)$, $q_1(H)=0$, $q_1'(H)=1$, имеем уравнение $H\,d\log\zeta_1 = 2\pi[-q(Z)]^{1/2}dZ$, откуда после замены переменной и выделения особенности в соответствующем интеграле приходим к равенству

$$\log R(B_1^{(Z)}, H) =$$

$$= 2\left(\frac{H^2+1}{k^2H^2+1}\right)^{1/2}\int_0^1\left[\left(\frac{k^2H^2+t^2}{H^2+t^2}\right)^{1/2} - \left(\frac{k^2H^2+1}{H^2+1}\right)^{1/2}\right]\frac{dt}{1-t^2} + \log 2H\,. \tag{17}$$

Пусть теперь D_0^f имеет тот же смысл, как и выше, D_1^f, D_2^f, Δ^f – f-образы областей $B_1^{(z)}, B_2^{(z)}, \Delta^{(z)}$. Тогда

$$R(D_1^f, f(\rho))R(D_2^f, f(-\rho)) = |f'(\rho)f'(-\rho)|\cdot 4(1+\rho^{-2})^{-2}R^2(B_1^{(Z)}, H), \tag{18}$$
$$M(\Delta^f) = M(\Delta^{(Z)})\,.$$

Рассматривая экстремальную конфигурацию $D_0^{(w)}, \Delta^{(w)}, D_1^{(w)}, D_2^{(w)}$ задачи о максимуме произведения

$$\{R(D_0,0)\,M(\Delta)\}^{\mu^2}R(D_1,a_1)\,R(D_2,a_2)$$

в соответствующем семействе систем областей на $\overline{\mathbb{C}}^{(w)}$ и систему областей $D_0^{(W)}, \Delta^{(W)}, D_1^{(W)}, D_2^{(W)}$, соответствующую указанной конфигурации при отображении (4), приходим к однопараметрическому семейству неравенств, аналогичному (6) :

$$\frac{[R(D_0^f,0)M(\Delta^f)]^{\mu^2}R(D_1^f,f(\rho))R(D_2^f,f(-\rho))}{|f(\rho)-f(-\rho)|^{2-\mu^2}|f(\rho)f(-\rho)|^{\mu^2}} \leqslant \frac{[R(D_0^{(W)},0)M(\Delta^{(W)})]^{\mu^2}R(D_1^{(W)},1)R(D_2^{(W)},-1)}{2^{2-\mu^2}}. \tag{19}$$

Из известных фактов в задачах об экстремальном разбиении следует, что $\widetilde{D}_0^{(w)} = \overline{D_0^{(w)}} \cup \Delta^{(w)}$ - круговая область квадратичного дифференциала, определяющего экстремальную систему областей на $\overline{\mathbb{C}}^{(w)}$, при этом $R(\widetilde{D}_0^{(w)}, 0) = R(D_0^{(w)}, 0)\, M(\Delta^{(w)})$. Поэтому необходимым для равенства в (I9) является условие $|W'(0)|\, R(D_0^{f}, 0)\, M(\Delta^{(w)}) = F_0(\mu)$, т.е.

$$|W'(0)|^{-1} = \frac{\tau M(\Delta^{(w)})}{F_0(\mu)} . \tag{20}$$

Далее, рассуждение п.I^0 показывает, что равенство в (I9) реализуется для функции $f(z) \in \sum(\tau)$ только в том случае, когда $f(z)$ - нечетная функция с вещественными коэффициентами, $f(\rho) > 0$. В этом случае из (20) получаем условие, аналогичное (II):

$$f(\rho) = \frac{\tau M(\Delta^{(z)})}{F_0(\mu)} . \tag{2I}$$

3^0. Возвращаясь к случаю произвольной функции $f(z) \in \sum(\tau)$, на основании неравенств (6),(I9) и установленных выше необходимых условий достижения равенства в этих неравенствах приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА I. Пусть $f(z) \in \overline{\sum(\tau)}$, $0<\tau<1$; $\rho>1$. Пусть $0<\mu<2$, μ^* удовлетворяет равенству

$$\left| \frac{f(\rho) f(-\rho)}{f(\rho) - f(-\rho)} \right| \operatorname{tg} \pi\mu^*/4 = 1, \quad 0<\mu^*<2 .$$

I) Пусть $\mu \leqslant \mu^*$ и пусть

$$\left| \frac{2 f(\rho) f(-\rho)}{f(\rho) - f(-\rho)} \right| = \frac{\tau}{F_0(\mu)} . \tag{22}$$

Тогда в классе $\sum(\tau)$ справедливо неравенство

$$\frac{|f'(\rho) f'(-\rho)|}{|f(\rho) - f(-\rho)|^2} \leqslant \frac{F_1^2(\mu)\,(1+\rho^{-2})^2}{16\rho^2 (1-\rho^{-2})^2} . \tag{23}$$

Пусть $D_\mu(\tau)$, $0 \in D_\mu(\tau)$, - круговая область квадратичного дифференциала

$$Q_\mu(w,\tau)\, dw^2 = -C\, \frac{w^2 + \tau^2\mu^2/[(4-\mu^2)F_0^2(\mu)]}{w^2 (w^2 - \tau^2 F_0^{-2}(\mu))^2}\, dw^2, \quad C>0 . \tag{24}$$

Равенство в (23) реализуется в классе $\sum(\tau)$ только для нечетных функций вида $f(z) = \varepsilon f_0(\varepsilon^{-1} z), |\varepsilon| = 1$, где функция $f_0(z)$, $f_0(\rho) > 0$, отображает U^* в случае $\mu = \mu^*$ на область $\overline{\mathbb{C}}^{(w)} \setminus \overline{D_\mu(\tau)}$, в случае $\mu < \mu^*$ - на область, получающуюся из

$\overline{\mathbb{C}}^{(w)} \setminus \overline{D_\mu(\tau)}$ проведением разрезов по отрезкам мнимой оси w-плоскости, оканчивающимся в граничных точках области $D_\mu(\tau)$.

2) Пусть теперь $\mu > \mu^*$ и пусть $B_1^{(Z)}$, $B_2^{(Z)}$ – круговые области, а $\Delta^{(Z)}$ кольцевая область для квадратичного дифференциала (I4), где κ, $0 < \kappa < 1$, удовлетворяет равенству (I5). Для величин $M(\Delta^{(Z)})$ и $R(B_1^{(Z)}, H)$ имеем равенства (I6) и (I7). Пусть

$$\left| \frac{2f(\rho) f(-\rho)}{f(\rho) - f(-\rho)} \right| = \frac{\tau M(\Delta^{(Z)})}{F_0(\mu)} . \tag{25}$$

Тогда справедливо неравенство

$$\frac{|f'(\rho) f'(-\rho)|}{|f(\rho) - f(-\rho)|^2} \leqslant \frac{F_1^2(\mu)\,(1+\rho^{-2})^2}{16\, R^2(B_1^{(Z)}, H)} . \tag{26}$$

Равенство в (26) реализуется только для нечетной функции вида $f(z) = \varepsilon f_0(\varepsilon^{-1} z)$, $|\varepsilon| = 1$, где функция $f_0(z)$, $f_0(\rho) > 0$, отображает U^* на внешность подобласти $\hat{D}_\mu(\tau)$ круговой области $D_\mu(\tau)$ дифференциала (24), ограниченной траекторией этого дифференциала в области $D_\mu(\tau)$, $R(\hat{D}_\mu(\tau), 0) = \tau$.

§ 2. Оценки начальных коэффициентов в классе $\Sigma(\tau)$

I°. При $\rho \to \infty$ из теоремы I вытекает точная оценка для модуля коэффициента α_1 в классе $\Sigma(\tau)$. Именно, српведлива

ТЕОРЕМА 2. В классе $\Sigma(\tau)$, $0 < \tau < 1$, имеет место точное неравенство

$$|\alpha_1| \leqslant P_1(\tau) , \tag{27}$$

где функция $P_1(\tau)$ определяется следующими условиями. При $\tau \leqslant 8/(\pi e)$

$$P_1(\tau) = 1 - \tfrac{1}{8} e^2 \tau^2 ,$$

при $\tau > 8/(\pi e)$

$$P_1(\tau) = 1 - \frac{2}{\kappa^2} \left[\frac{4}{\pi^2} E^2(\kappa) - \kappa'^2 \right] ,$$

где κ, $0 < \kappa < 1$, – решение уравнения

$$\tau = \frac{8}{\pi e} \frac{E(\kappa)}{\kappa} \exp\left\{ -\frac{\pi}{2} \frac{K'(\kappa) - E'(\kappa)}{E(\kappa)} \right\} . \tag{28}$$

Равенство в (27) реализуется в классе $\Sigma(\tau)$ только нечетными функциями вида $f(z) = \varepsilon f_1(\varepsilon^{-1} z)$, $|\varepsilon| = 1$, где $f_1(z)$ – функция с вещественными коэффициентами, определяемая следующими условиями. В случае $\tau = 8/(\pi e)$ функция $f_1(z)$ отображает U^* на внешность круговой области $D(\tau)$, $0 \in D(\tau)$, квадратичного дифференциала

$$Q(w,\tau)\,dw^2 = -C_1\,\frac{w^2 + e^2\tau^2/4}{w^2}\,dw^2, \quad C_1 > 0, \tag{29}$$

в случае $\tau < 8/(\pi e)$ – на область, получающуюся из $\mathbb{C}^{(w)} \setminus D(\tau)$ проведением разрезов по отрезкам мнимой оси w-плоскости с концами в граничных точках области $D(\tau)$. При $\tau > 8/(\pi e)$ функция $f_1(z)$ отображает U^* на внешности подобласти области $D(\tau)$, ограниченной траекторией дифференциала (29) в $D(\tau)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим предельный переход в неравенствах теоремы I при $\rho \to \infty$. Пусть α_k -коэффициенты разложения (I) функции $f(z)$, $\tilde{\alpha}_k = \operatorname{Re}\alpha_k$.

Пусть сначала $\mu \leqslant \mu^*$. В этом случае

$$\mu \leqslant \frac{8}{\pi\rho} + O(\rho^{-2}). \tag{30}$$

Так как для $F_0(\mu)$ справедливо разложение

$$F_0(\mu) = e^{-1}\mu\left(1 - \frac{1}{24}\mu^2 + \ldots\right),$$

а условие (22) имеет вид

$$F_0(\mu) = \frac{\tau}{\rho}\left(1 - \frac{\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0^2}{\rho^2} + \ldots\right),$$

то $\mu = e\tau/\rho$ и, в силу (30),

$$\tau \leqslant \frac{8}{\pi e}.$$

Далее, для $F_1(\mu)$ имеем разложение

$$F_1(\mu) = 2\left(1 - \frac{1}{4}\mu^2 + \ldots\right) = 2\left(1 - \frac{e^2\tau^2}{4\rho^2} + \ldots\right).$$

Из равенства (23) теперь получаем

$$\frac{1 - 2\tilde{\alpha}_1\rho^{-2} + O(\rho^{-4})}{4\rho^2\left[1 + 2\alpha_1\rho^{-2} + O(\rho^{-4})\right]} \leqslant \frac{4\left(1 - \frac{1}{2}e^2\tau^2\rho^{-2} + \ldots\right)}{16\rho^2\left(1 - 4\rho^{-2} + \ldots\right)},$$

откуда

$$-\tilde{\alpha}_1 \leqslant 1 - \frac{1}{8}e^2\tau^2.$$

Следовательно, для произвольной функции из $\sum(\tau)$ имеем неравенство

$$|\alpha_1| \leqslant 1 - \frac{1}{8} e^2 \tau^2 .$$

Пусть $\mu > \mu^*$. Тогда

$$\mu > \frac{8}{\pi\rho} + \ldots$$

Из (I5) и (I6) находим

$$\mu = \frac{8}{\pi\rho} \frac{E(\kappa)}{\kappa} + O(\rho^{-2}),$$

$$\log M(\Delta^{(Z)}) = \frac{\pi}{2} \frac{K'(\kappa) - E'(\kappa)}{E(\kappa)} + O(\rho^{-2}).$$

Равенство (25) теперь можем записать в виде

$$\frac{1}{\rho} + O(\rho^{-2}) = \frac{F_0(\mu)}{\tau M(\Delta^{(Z)})} = \frac{\frac{8}{\pi e} \frac{1}{\rho} \frac{E(\kappa)}{\kappa} + \ldots}{\tau M(\Delta^{(Z)})} .$$

Отсюда вытекает условие

$$\tau > \frac{8}{\pi e}$$

и уравнение (28), определяющее κ как функцию от τ. Наконец, из (I7) получаем

$$\log R(B_1^{(Z)}, H) = \log 2H - \frac{\kappa'^2}{\kappa^2} H^{-2} + \ldots ,$$

следовательно,

$$R(B_1^{(Z)}, H) = \rho \left[1 - \left(1 + \frac{4\kappa'^2}{\kappa^2}\right) \rho^{-2} + \ldots\right].$$

Неравенство (2I) теперь приводит к оценке

$$\frac{1 - 2\tilde{\alpha}_1 \rho^{-2} + O(\rho^{-4})}{4\rho^2 [1 + 2\tilde{\alpha}_1 \rho^{-2} + O(\rho^{-4})]} \leqslant \frac{4\left(1 - \frac{32}{\pi^2} \frac{E^2(\kappa)}{\kappa^2} \rho^{-2} + \ldots\right)}{16\rho^2 \left[1 - 2\left(1 + \frac{4\kappa'^2}{\kappa^2}\right)\rho^{-2} + \ldots\right]},$$

откуда получаем неравенство для $|\alpha_1|$, указанное в формулировке теоремы 2.

Из теоремы I следует, что функции $f(z) \in \sum(\tau)$, отображающие U^* на области, характеризующиеся указанными в теореме 2 геометрическими свойствами в терминах квадратичного дифференциала (29), соответствующего дифференциалу (24) теоремы I при $\mu \to 0$, являются экстремальными функциями теоремы 2. Из известных рассуждений метода экстремальных метрик вытекает утверждение теоремы 2 об единственности экстремальных функций этой теоремы.

2^0. Некоторое видоизменение приведенного выше доказательства теоремы 2 позволяет получить точную оценку коэффициента α_2 в классе $\sum(\tau)$. Именно, справедлива

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f(z)\in\sum(\tau), 0<\tau<1$. Тогда справедливо точное неравенство

$$|\alpha_2|\leqslant P_2(\tau), \tag{31}$$

где $P_2(\tau)=\frac{2}{3}P_1(\tau^{3/2}), P_1(\tau)$ – функция теоремы 2.

Равенство в (31) реализуется только функциями вида $f(z)= =\varepsilon f_2(\varepsilon^{-1}z), |\varepsilon|=1$, где $f_2(z)$ связана с функцией $f_1(z)$ теоремы I равенством: $f_2(z)=\{f_1(z^{3/2})\}^{2/3}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку доказательство теоремы 2 во многих отношениям аналогично доказательству теоремы I, то мы остановимся лишь на некоторых моментах этого доказательства, приводящих к установлению симметрии экстремального отображения. Пусть $\rho>1$, $\omega=exp\{2\pi i/3\}$,

$$B_k^{(z)}=\{z: z\in U^*, |arg(z/\omega^{k-1})|<\pi/3\}, \quad k=1,2,3.$$

Очевидно, $\rho\omega^{k-1}\in B_k^{(z)}$. Пусть $f(z)\in\sum(\tau)$ и $f(U^*)$ не содержит области D_0^f, $0\in D_0^f$, $R(D_0^f,0)=\tau$. Пусть $D_k^f=f(B_k^{(z)})$, $a_k=f(\rho\omega^{k-1})$, $k=1,2,3$. Пусть μ – параметр, $0<\mu<3$, $D_k^{(w)}$, $k=0,1,2,3$, – система областей реализующих максимум произведения

$$R(D_0,0)^{\mu^2}\prod_{k=1}^{3}R(D_k,a_k) \tag{32}$$

в семействе $\mathcal{D}(0,a_1,a_2,a_3)$. Тогда справедливо неравенство

$$R(D_0^f,0)^{\mu^2}\prod_{k=1}^{3}R(D_k^f,a_k)\leqslant R(D_0^{(w)},0)^{\mu^2}\prod_{k=1}^{3}R(D_k^{(w)},a_k). \tag{33}$$

Рассмотрим теперь отображение $w\to w_1$, при котором a_k, $k=1,2,3$, переходят в равноотстоящие точки ω^{k-1} на окружности $|w_1|=1$, и отображение $w_1\to w_2$ круга $|w_1|<1$ на себя, при котором $w_1(0)$ переходит в $w_2=0$, $w_2(1)=1$. Обозначая через $D_k^{(W)}$, $k=0,1,2,3$, образы областей $D_k^{(w)}$ и через $1=\omega_1$, ω_2,ω_3 – образы точек a_k при отображении $W(w)=w_2\circ w_1(w)$, имеем

$$\frac{R(D_0^{(w)},0)^{\mu^2}\prod_{k=1}^{3}R(D_k^{(w)},a_k)}{|(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_2-a_3)|^{1-\frac{2}{3}\mu^2}|a_1a_2a_3|^{\mu^2}}=\frac{R(D_0^{(W)},0)^{\mu^2}\prod_{k=1}^{3}R(D_k^{(W)},a_k)}{|(1-\omega_2)(1-\omega_3)(\omega_2-\omega_3)|^{1-\frac{2}{3}\mu^2}}. \tag{34}$$

С другой стороны, для конформного инварианта в правой части (34) по крайней мере при всех достаточно малых $\mu>0$ справедливо неравенство

$$\frac{R(D_0^{(W)},0)^{\mu^2}\prod_{k=1}^{3}R(D_k^{(W)},a_k)}{|(1-\omega_2)(1-\omega_3)(\omega_2-\omega_3)|^{1-\frac{2}{3}\mu^2}} \leqslant \frac{R(\dot{D}_0^{(W)},0)^{\mu^2}\prod_{k=1}^{3}R(\dot{D}_k^{(W)},a_k)}{3^{\frac{3}{2}-\mu^2}}, \quad (35)$$

где $1,\omega,\omega^2$ - равностоящие точки на $|W|=1$, $\dot{D}_k^{(W)}$, $k=0,1,2,3$, - система областей, реализующая максимум произведения (32) в семействе $\mathcal{D}(0,1,\omega,\omega^2)$, и равенство в (35) реализуется только в том случае, когда $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ - равноотстоящие точки на $|W|=1$, а системы областей $D_k^{(W)}$ и $\dot{D}_k^{(W)}$, $k=0,1,2,3$, соответствуют друг другу при преобразовании поворота вокруг начала координат. Доказательство этого факта нетрудно получить, рассматривая разбиение W-плоскости на систему углов

$$S_k=\{W:\ \arg\omega_k<\arg W<\arg\omega_{k+1}\},\quad k=1,2,3$$

$(\omega_4=\omega_1)$, построения в углах S_k—систем двуугольников с вершинами в точках $0,\omega_k,\omega_{k+1}$ и использования теоремы о связи двух задач об экстремальном разбиении, доказанной Е.Г.Емельяновым [3] и автором [4]; примеры использования указанной теоремы для установления симметризационных результатов сходного характера приводятся, например, в [4]. Из (34) и (35) получаем неравенство

$$\frac{R(D_0^f,0)^{\mu^2}\prod_{k=1}^{3}R(D_k^f,f(\rho\omega^{k-1}))}{\prod\limits_{1\leqslant k<\ell\leqslant 3}|f(\rho\omega^{k-1})-f(\rho\omega^{\ell-1})|^{1-\frac{2}{3}\mu^2}\prod_{k=1}^{3}|f(\rho\omega^{k-1})|^{\mu^2/3}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{R(\dot{D}_0^{(W)},0)^{\mu^2}\prod_{k=1}^{3}R(\dot{D}_k^{(W)},\omega^{k-1})}{3^{\frac{3}{2}-\mu^2}}.$$

Это неравенство аналогично неравенству (6). Таким же путем получаем неравенство, аналогичное (19), и доказательство теоремы 3 завершается также как доказательство теоремы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ. Точкая оценка модуля коэффициента α_0 в классе $\sum(\tau)$ с описанием всех экстремальных отображений была получена в монографии Дж.Дженкинса [1] (см.теорему 7.3 в [1]) при помощи "общей теоремы о коэффициентах" (теорема 4.1 в [1]). Теоремы 2 и 3 распространяют указанный результат Дж.Дженкинса, при этом оценку для $|\alpha_0|$ в [1] и полученные выше оценки для $|\alpha_1|$ и $|\alpha_2|$ можно единообразно записать в виде где

$$P_K(\tau) = \frac{1}{K+1} P_0(\tau^{K+1}),$$

функция $P_1(\tau)$ определена в теореме 2. Экстремальные отображения оценок для $|\alpha_K|$, $K=0,1,2$, также находятся в простом соответствии. Отметим, что точную оценку для $|\alpha_0|$ в классе $\sum(\tau)$ и экстремальные функции этой оценки нетрудно получить при помощи рассуждения, по существу аналогичного доказательству теоремы 2, но более простого в техническом отношении.

3°. При доказательствах теорем 2 и 3 мы по существу имеем доело с приведенными модулями концевых областей ассоциированных квадратичных дифференциалов и областей, подобных в малом указанным областям (возможные определения этих понятий предложены в [5]). Проиллюстрируем это утверждение на примере доказательства теоремы 2 в случае $\tau \leqslant 8/(\pi e)$, в котором оно наиболее наглядно.

Области $B_1^{(z)}, B_2^{(z)}$, определенные в начале § I, являются круговыми областями квадратичного дифференциала

$$q(z,\rho)dz^2 = -\frac{H^2(\rho^2-1)^2}{\pi^2\rho^2}\,\frac{(z^2+1)^2}{(z^2-\rho^2)^2(z^2-\rho^{-2})^2}\,dz^2. \tag{36}$$

Пусть $U^*(\varepsilon)$ получается из U^* удалением ε-окрестностей точек $\pm\rho$, $B_K^{(z)}(\varepsilon) = B_K^{(z)} \cap U^*(\varepsilon)$. Рассмотрим отображение

$$\zeta(z) = \frac{H}{2\pi}\log g(z),$$

где $\zeta_1 = g(z)$ – функция, отображающая $B_1^{(z)}$ на круг $|\zeta_1| < R(B_1^{(z)},\rho)$, $g(\rho)=0$, $g'(\rho)=1$. Функция $\zeta(z)$ удовлетворяет в области $B_1^{(z)}$ уравнению

$$d\zeta(z) = [-q(z,\rho)]^{1/2}dz,$$

где ветвь корня выбрана надлежащим образом, $\zeta(\infty)=\infty$. При отображении $z \to \zeta(z)$ области $B_1^{(z)}(\varepsilon)$, разрезанной по отрезку $[\rho,\infty]$, соответствует четырехугольник $\tilde{P}(\rho,\varepsilon)$ площадь которого отличается от площади прямоугольника $P(\rho,\varepsilon)$ с основанием $\left[\frac{H}{2\pi}\log\varepsilon, \frac{H}{2\pi}\log R(B_1^{(z)},\rho)\right]$ и высотой H, на величину порядка $O(1)$:

$$\text{площ.}\,\widetilde{P}(\rho,\varepsilon)=\frac{H^2}{2\pi}\log\frac{R(B_1^{(z)},\rho)}{\varepsilon(1+O(\rho^{-2}))}=\text{площ.}\,P(\rho,\varepsilon)+O(1). \quad (37)$$

Используя равенство (2) для $R(B_1^{(z)},\rho)$, из (37) получаем:

$$\begin{aligned}&\text{площ.}_q U^*(\varepsilon)+2\cdot\frac{H^2}{2\pi}\log\varepsilon+O(1)=\\&=\frac{1}{4\pi}\left[(\rho^2-2)\log 2\rho-2\right]+O(\rho^{-2}\log\rho).\end{aligned}\quad (38)$$

Пусть теперь $D_K^{(w)}$, $K=1,2$, - образы областей $B_K^{(z)}$ при экстремальном отображении $w=f(z)$ теоремы I, нормированном условием $f(\rho)>0$. Области $D_K^{(w)}$ - круговые области для квадратичного дифференциала

$$Q(w,\rho)\,dw^2=-\frac{H^2f^2(\rho)}{\pi^2(1+\mu^2/(4-\mu^2))}\,\frac{w^2+f^2(\rho)\mu^2/(4-\mu^2)}{w^2(w^2-f^2(\rho))^2}\,dw^2;\ \mu=\frac{e\tau}{\rho}. \quad (39)$$

Пусть $D_K^{(w)}(\varepsilon)$ – образы областей $B_K^{(z)}(\varepsilon)$ при указанном отображении. Функция $Z(w)$, удовлетворяющая в области $D_1^{(w)}$ уравнению

$$dZ(w)=\left[-Q(w,\rho)\right]^{1/2}dw,\quad Z(\infty)=\infty,$$

отображает область $D_1^{(w)}(\varepsilon)$ с разрезом по отрезку $[f(\rho),\infty]$ на четырехугольник $\widetilde{\Pi}(\rho,\varepsilon)$, площадь которого связана с площадью прямоугольника $\Pi(\rho,\varepsilon)$ со сторонами длины $\frac{H}{2\pi}\log[R(D_1^{(w)},f(\rho))/(f'(\rho)\varepsilon)]$ и H, равенством

$$\text{площ.}\,\widetilde{\Pi}(\rho,\varepsilon)=\frac{H^2}{2\pi}\log\frac{R(D_1^{(w)},f(\rho))}{f'(\rho)\varepsilon(1+O(\rho^{-2}))}=\text{площ.}\,\Pi(\rho,\varepsilon)+O(1). \quad (40)$$

Имеем (пользуемся равенствами доказательства теоремы 2)

$$\begin{aligned}&\log\frac{R(D_1^{(w)},f(\rho))}{f'(\rho)}=\log\frac{f(\rho)}{f'(\rho)}+\log R(D_1^{(w)},1)=\\&=\log 2\rho+(2\alpha_1-\tfrac{1}{4}e^2\tau^2)\rho^{-2}+O(\rho^{-2}\log\rho).\end{aligned}$$

Следовательно, из (40) получаем

$$\begin{aligned}&\text{площ.}_Q(D_1^{(w)}(\varepsilon)+D_2^{(w)}(\varepsilon))+2\cdot\frac{H^2}{2\pi}\log\varepsilon+O(1)=\\&=\frac{1}{4\pi}\left[(\rho^2-2)\log 2\rho+(2\alpha_1-\tfrac{1}{4}e^2\tau^2)\right]+O(\rho^{-2}\log\rho).\end{aligned}\quad (4I)$$

Учитывая совпадение левых частей равенств (38) и (41) и используя экстремальное свойство областей, определяемых структурой траекторий ассоциированных квадратичных дифференциалов, в задачах об экстремальном разбиении, приходим к неравенству для $|\alpha_1|$ в классе $\sum(\tau)$, указанному в теореме 2.

Пусть теперь

$$q(z)dz^2 = -\frac{1}{4\pi^2}\frac{(z^2+1)^2}{z^2}dz^2, \quad Q(w)dw^2 = -\frac{1}{4\pi^2}\frac{w^2+e^2\tau^2/4}{w^2}dw^2$$

-квадратичные дифференциалы, соответствующие дифференциалам (36) и (39) при $\rho\to\infty$. Области $B_1^{(z)}, B_2^{(z)}$ и $D_1^{(w)}, D_2^{(w)}$ - концевые области этих дифференциалов. Пусть функции $\zeta(z)$ и $Z(w)$ удовлетворяют уравнениям

$$d\zeta(z) = [-q(z)]^{1/2}dz, \quad dZ(w) = [-Q(w)]^{1/2}dw.$$

Для сопоставления с предыдущими выражениями рассмотрим на z-плоскости четырехугольник $B_1^{(z)}(\rho)$, образом которого при отображении $\zeta(z)$ является прямоугольник $P(\rho)$ с основанием $\left[-\frac{H}{2\pi}\log(4H/(1+\rho^{-2}), \frac{H}{2\pi}\log(4H/(1+\rho^{-2})\right]$ и высотой H, что соответствует замене фигурирующего выше параметра ε на $[4H/(1+\rho^{-2})]^{-1}$,

$$\text{площ}.\,P(\rho) = \frac{1}{4\pi}\left[(\rho^2-2)\log 2\rho - 2\right] + O(\rho^{-2}\log\rho).$$

Нетрудно убедиться, что при отображении $Z(w)$ области $B_1^{(z)}(\rho)$ соответствует четырезугольник $\tilde{\Pi}(\rho)$, площадь которого связана с площадью соответствующего прямоугольника $\Pi(\rho)$ равенством

$$\text{площ}.\,\tilde{\Pi}(\rho) = \frac{1}{4\pi}\left[(\rho^2-2)\log 2\rho + 2\alpha_1 - \frac{1}{4}e^2\tau^2\right] + O(1) =$$
$$= \text{площ}.\,\Pi(\rho) + O(1).$$

Величины

$$\mathcal{M}(B_1^{(z)}) = \lim_{\rho\to\infty}\left[\text{площ}.\,P(\rho) - \frac{1}{4\pi}(\rho^2\log 2\rho - 2\log\rho)\right]$$

и

$$\mathcal{M}(D_1^{(z)}) = \lim_{\rho\to\infty}\left[\text{площ}.\,\Pi(\rho) - \frac{1}{4\pi}(\rho^2\log 2\rho - 2\log\rho)\right]$$

являются приведенными модулями концевых областей $B_1^{(z)}$ и $D_1^{(w)}$, соответствующими выбранному способу выделения окрестностей полюсов 4-го порядка дифференциалов $q(z)dz^2$ и $Q(w)dw^2$; приведенные модули областей $B_2^{(z)}$ и $D_2^{(w)}$ определяются точно также на основании соображений симметрии. Рассматривая приведенные модули областей $D_k, k=1,2$, являющихся образами областей $B_k^{(z)}$ при произвольном отображении $f(z)\in\sum(\tau)$, и пользуясь экстремальным свойством ассоциированного квадратичного дифференциала в задаче о максимуме функционала, содержащего приведенные модули областей, подобных в малом концевым областям этого дифференциала (по этому вопросу см. [5]), приходим к оценке для $|\alpha_1|$ в классе $\sum(\tau)$ в данном случае. Доказательство теоремы 2 в случае $\tau>8/(\pi e)$ и теоремы 3 может быть получено при помощи аналогичных соображений.

Отметим, что результаты в задачах об экстремальном разбиении в приведенных выше доказательствах теорем 2 и 3 позволили установить симметрию в расположении полюсов ассоциированного квадратичного дифференциала. Возможно, что благодаря полученным в последние годы новым результатам в задачах об экстремальном разбиении удастся получить продвижение в вопросе получения точных оценок начальных коэффициентов в классе $\sum$. Как известно, в настоящее время точные оценки для $|\alpha_4|$ и $|\alpha_5|$ во всем классе $\sum$ неизвестны: эти оценки получены в работах Ю.Куботы [6, 7] при некоторых дополнительных ограничениях.

Литература

1. Дженкинс Дж. Однолистные функции и конформные отображения. М., 1962, 265 с. (Перевод с англ.)
2. Солнынин А.Ю. Некоторые экстремальные задачи в классе $\sum(\tau)$. - В настоящем сборнике, с. 138-153.
3. Емельянов Е.Г. О связи двух задач об экстремальном разбиении. - В кн.: Аналитическая теоремя чисел и теория функций. 8. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1987, т.160, с.91-98.
4. Кузьмина Г.В. К вопросу об экстремальном разбиении римановой сферы. - В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 10. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1990, т.185, с.72-95.
5. Кузьмина Г.В. К вопросу об экстремальных свойствах квадратичных дифференциалов с концевыми областями в структуре траекторий. - В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 9. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1988. т.168, с,98-113.
6. Kubota Y. On the fourth coefficient of meromorphic univalent functions. - Kōdai Math.Semin.Rep., 1974/1975, vol.26, N 3-4, p.267-288.
77. Kubota Y. A coefficient inequality for certain meromorhic univalent functions. - Kōdai Math.Semin.Rep., 1974/1975, vol.26, N 1, p.85-94.