С. Н. Артемов, Неарифметичность истинностных предикатных логик доказуемости, *Докл. АН СССР*, 1985, том 284, номер 2, 270–271

УДК 510.65 МАТЕМАТИКА

С.Н. АРТЕМОВ

НЕАРИФМЕТИЧНОСТЬ ИСТИННОСТНЫХ ПРЕДИКАТНЫХ ЛОГИК ДОКАЗУЕМОСТИ

(Представлено академиком А.Н. Колмогоровым 17 V 1985)

Работа посвящена исследованию средствами модальных логик свойств доказуемости в достаточно сильных теориях (см. обзоры [1, 2]). Всюду ниже под T понимает теорию, удовлетворяющую следующим условиям: T в арифметическом языке; в T выводимы аксиомы арифметики Робинсона; T перечислима; все теоремы T истинны в стандартной модели арифметики. Этим условиям удовлетворяет, например, пеановская арифметика PA. Пусть $Pr_T(x)$ означает гёделевскую формулу доказуемости в T. Формулы языка модальной логики естественно рассматривать как схемы арифметических формул, где пропозициональные и предикатные буквы являются метапеременными по арифметическим формулам, а модальность $\Box$ понимается как $Pr_T(\cdot)$. Назовем *истинностной логикой доказуемости* в T множество модальных формул, задающих схемы истинных (в стандартной модели арифметики) арифметических формул. Как показано в [3], истинностная пропозициональная логика доказуемости в T не зависит от выбора T; она задается разрешимым исчислением S. В предикатном случае истинностные логики L_T доказуемости в T могут быть различны при разных T [4].

В настоящей работе показано, что ни одна из L_T не является арифметическим (и, тем самым, перечислимым) множеством; также не является арифметическим множеством $L = \bigcap\limits_T L_T$. Таким образом, предикатные истинностные логики доказуемости не имеют эффективного описания. Заметим, что в каждой из L_T и L множество тех формул, которые не содержат модальности, совпадает с логикой предикатов и, следовательно, перечислимо.

1. Считаем, что предикатный модальный язык получен из языка предикатов 1-го порядка без равенства и функциональных символов добавлением дополнительной одноместной связки $\Box$ (модальность). Всюду ниже $\alpha(t)$ – арифметическая σ-формула, нумерующая аксиомы некоторой теории T, и пусть $Pr_\alpha(x)$ – стандартная гёделевская формула доказуемости в T, построенная из α. Назовем *оценкой* всякое отображение f^α, ставящее в соответствие каждой атомарной формуле P арифметическую формулу $f^\alpha P$, содержащую то же, что и P, множество свободных переменных. Считаем, что f^α коммутирует с операцией замены свободных переменных в P:

$$f^\alpha(\mathcal{P}(x_1,\ldots,x_n)) = A(x_1,\ldots,x_n) \Rightarrow f^\alpha(\mathcal{P}(y_1,\ldots,y_n)) = A(y_1,\ldots,y_n).$$

Как обычно, следует избегать коллизии переменных. Естественным образом оценка f^α продолжается до отображения, ставящего каждой предикатной модальной формуле R в соответствие арифметическую формулу $f^\alpha R$:

1) f^α коммутирует с булевыми связками и кванторами;

2) $f^\alpha \Box R(x_1,\ldots,x_n) = Pr_\alpha(\overline{f^\alpha R}(x_1,\ldots,x_n))$, где для каждой арифметической формулы $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ через $\overline{\varphi}(x_1,\ldots,x_n)$ обозначен терм для примитивно-рекурсивной функции $\lambda x_1,\ldots,x_n \ulcorner \varphi(x_1,\ldots,x_n)\urcorner$.

Положим

$L_\alpha = \{R \mid R$ – предикатная модальная формула и для каждой оценки f^α арифметическая формула $f^\alpha R$ истинна$\}$;

$$L = \bigcap_\alpha L_\alpha.$$

Теорема. *Ни одна из логик L_α и L не является арифметическим множеством.*

2. Изложим схему доказательства. Обозначим через *EAM* язык логики предикатов, содержащий только двуместный предикатный символ E и трехместные предикатные символы A и M. Один из вариантов известной теоремы Тенненбаума утверждает существование конечного множества X формул языка *EAM* таких, что:

1) все формулы из X истинны в стандартной модели арифметики при интерпретации τ такой, что $\tau E(x, y)$ есть $x = y$, $\tau A(x, y, z)$ есть $x + y = z$, $\tau M(x, y, z)$ есть $x \cdot y = z$;

2) любая модель множества формул X с областью ω такая, что E интерпретируется как тождество на ω, а A и M интерпретируются рекурсивными предикатами, изоморфна стандартной модели арифметики. Считаем, что X содержит аксиомы арифметики Робинсона, включая аксиомы равенства, записанные на *EAM*-языке. Пусть B означает конъюнкцию формул из X; через $D \models$ обозначаем истинность в модели D, символом $\models$ истинность в стандартной модели арифметики.

Пусть H – произвольная *EAM*-формула. Положим

$$C = B \wedge \forall x, y (\Box E(x, y) \vee \Box \neg E(x, y)) \wedge \forall x, y, z (\Box A(x, y, z) \vee$$

$$\vee \Box \neg A(x, y, z)) \wedge \forall x, y, z (\Box M(x, y, z) \vee \Box \neg M(x, y, z)) \text{ и } H' = C \to H.$$

Основная лемма. *Для всякой L_α и всякой EAM-формулы H $\models H$ (при интерпретации τ) $\Leftrightarrow H' \in L_\alpha$.*

Изложим схему доказательства основной леммы. Пусть $\models H$, f^α – произвольная оценка и $\models f^\alpha C$, следовательно, $\models f^\alpha B$. Определим интерпретацию D с областью ω такую, что для всех $k, m, n \in \omega$

$$D \models E(k, m) \Leftrightarrow \models f^\alpha E(k, m),$$

$$D \models A(k, m, n) \Leftrightarrow \models f^\alpha A(k, m, n),$$

$$D \models M(k, m, n) \Leftrightarrow \models f^\alpha M(k, m, n).$$

Нетрудно заметить, что для каждой *EAM*-формулы P $D \models P \Leftrightarrow \models f^\alpha P$, в частности, $D \models B$.

Лемма 1. *Отношения, задаваемые на ω формулами $f^\alpha E$, $f^\alpha A$ и $f^\alpha M$, рекурсивны.*

Пользуясь леммой 1, можно перейти от D к интерпретации D' с областью ω такой, что D' элементарно эквивалентна D, формула E интерпретируется в D' отношением тождества, интерпретации A и M в D' рекурсивны. Таким образом, D' является рекурсивно определенной моделью множества X формул языка *EAM*, следовательно, D' изоморфна стандартной модели арифметики и $D' \models H$. Отсюда следует $D \models H$, $\models f^\alpha H$ и $\models f^\alpha H'$.

Пусть теперь $\not\models H$ при интерпретации τ. Пусть f^α на атомарных формулах E, A и M совпадает с τ. Из свойств формулы B и разрешимости в T отношений $x = y$, $x + y = z$ и $x \cdot y = z$ следует $\models f^\alpha C$. Таким образом, $\not\models f^\alpha H$ и основная лемма доказана.

Основная лемма дает алгоритмическую сводимость множества всех истинных арифметических формул к каждой из L_α и L, что доказывает теорему.

Математический институт им. В.А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
27 V 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. *Boolos G.* The unprovability of consistensy; essay in modal logic. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1979. 2. *Артемов С.Н.* В сб.: Неклассические логики и их применение. Вопросы кибернетики. М.: Наука, 1982, с. 3–22. 3. *Solovay R.M.* – Israel J. Math., 1976, vol. 25, p. 287–304. 4. *Montagna F.* – Notre Dame J. Form. Log., 1984, vol. 25, № 2, p. 179–189.