Функциональный анализ и его приложения
1993, т. 27, вып. 1, с. 60–64

УДК 517.53/57

О локальной эргодичности гиперболических систем с особенностями

© 1993. Н. И. Чернов

В теории динамических систем одно из центральных мест занимает исследование эргодических свойств биллиардных и близких к ним гамильтоновых систем. В последние годы это направление развивается весьма интенсивно — см. [1–10]. Одним из его ключевых результатов является теорема о «локальной эргодичности», сформулированная в наиболее общем виде в [5, 6] для систем с двумя степенями свободы. В настоящей заметке мы усиливаем эту теорему, отбрасывая одно из ее условий, причем делаем это для систем произвольной размерности.

Пусть M — гладкое d-мерное многообразие с краем ∂M и $T\colon M \to M$ — отображение, гладкое всюду, кроме множества $S_- = (T^{-1}\partial M) \cup \partial M$. Пусть $S_n = T^n(\partial M)$, и при $m \leqslant n$ положим $S_{m,n} = S_{n,m} = S_m \cup \ldots \cup S_n$. Для конечных n множество $S_{0,n}$ (это множество особых точек для T^{-n}) предполагается состоящим из конечного числа подмногообразий с краем размерности не выше $d-1$. Удобно считать, что все итерации отображения T определены только на множестве $M_0 = M \setminus S_{-\infty,\infty}$.

На M задана абсолютно непрерывная вероятностная мера ν с ограниченной плотностью, инвариантная относительно отображения T.

Мы предполагаем выполненными весьма общие условия, касающиеся множества разрывов S_-, введенные в [11] (отметим, что им удовлетворяют все известные примеры [1–9]).

По теореме Оселедца [12] для ν-почти любой точки $x \in M$ и для любого вектора $v \in \mathcal{T}_x M$ существует предел

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \ln \|DT^n v\| = \chi(v), \tag{1}$$

называемый характеристическим показателем Ляпунова. Поэтому определено DT-инвариантное разложение $\mathcal{T}_x M = E_x^u \oplus E_x^s \oplus E_x^0$ такое, что $\chi(v)$ положительно на E_x^u, отрицательно на E_x^s и равно нулю на E_x^0. Мы предполагаем, что отображение T гиперболическое (или стохастическое). Это означает что $\dim E_x^0 = 0$ для ν-почти каждой точки x. Для простоты мы предположим, что размерности $\dim E_x^u = d^+$ и $\dim E_x^s = d^-$ постоянны на M (и $d^+ + d^- = d$). Пространство E_x^u и его векторы называются неустойчивыми, а E_x^s и его векторы — устойчивыми.

Соотношение (1) гарантирует асимптотически экспоненциальное растяжение и сжатие векторов $v \in E_x^{u,s}$. Для дальнейшего также важно, чтобы это растяжение и сжатие происходило монотонно. Мы предположим, что в $\mathcal{T}M$ существует метрика (или псевдометрика, являющаяся метрикой по крайней мере на E_x^u и E_x^s), в которой $\|DTv\| \geqslant \|v\|$ при всех $v \in E_x^u$ и $\|DTv\| \leqslant \|v\|$ при всех $v \in E_x^s$, $x \in M$. Далее используется только эта («монотонная») метрика. В реальных приложениях [1–10] такая метрика строится тем или иным способом.

Согласно теории Песина, для ν-почти каждой точки $x \in M$ существует d^+-мерное локальное неустойчивое многообразие (сокращенно ЛНМ) $\gamma^u(x) \subset M$ и d^--мерное локальное устойчивое многообразие (ЛУМ) $\gamma^s(x) \subset M$, проходящие через точку x. Первое из них экспоненциально сжимается под действием T^n при $n \to -\infty$ (в «прошлом»), а второе — при $n \to +\infty$ (т.е. в «будущем»). Для любой точки $y \in \gamma^{u,s}(x)$ пространство $E^{u,s}_y$ является касательным к $\gamma^{u,s}(x)$. В случае гиперболических систем с особенностями (когда $S_- \neq \varnothing$) многообразия $\gamma^{u,s}$ построены в [11]. Они имеют конечные размеры и края. В последнем случае можно определить функции $r^{u,s}(x) = \{$расстояние от точки x до края $\partial\gamma^{u,s}(x)$ во внутренней метрике многообразия $\gamma^{u,s}(x)$, порожденной метрикой $\|\cdot\|\}$. Кроме того, края $\partial\gamma^u(x)$ лежат на многообразиях разрыва S_n, $n \geqslant 0$, а края $\partial\gamma^s(x)$ — на S_n, $n \leqslant 0$. В этой связи мы введем обозначения

$$k^u(x) = \min\{k \geqslant 0 : \partial\gamma^u(x) \cap S_k \neq \varnothing\},$$
$$k^s(x) = \min\{k \geqslant 0 : \partial\gamma^s(x) \cap S_{-k} \neq \varnothing\}.$$

Определение. Точка $x \in M$ называется u-существенной, если для любого $\Lambda > 1$ найдутся $n \geqslant 0$ и окрестность $V(x)$ такие, что для любой точки y из $V(x)$ и любого вектора $v \in E^u_y$ (если пространство E^u_y определено) имеет место оценка $\|DT^n v\| \geqslant \Lambda\|v\|$.

Иначе говоря, в окрестности $V(x)$ любое ЛНМ за n шагов растягивается по всем направлениям не менее чем в Λ раз. Аналогично определяется s-существенная точка с заменой E^u на E^s и при $n \leqslant 0$.

Определение. Точка $x \in M$ называется достаточной, если найдутся $\Lambda > 1$ и целые числа $n_1 < n_2$, а также окрестность V точки $T^{n_1}x$ такие, что для любой точки $y \in V$ и для любых векторов $v_1 \in E^u_y$ и $v_2 \in E^s_y$ (если пространства $E^{u,s}_y$ определены) имеют место оценки

$$\|DT^{n_2-n_1}v_1\| \geqslant \Lambda\|v_1\| \quad \text{и} \quad \|DT^{n_2-n_1}v_2\| \geqslant \Lambda^{-1}\|v_2\|.$$

Иначе говоря, на траектории достаточной точки x найдется отрезок времени $[n_1, n_2]$, в течение которого любое ЛНМ, близкое к точке $T^{n_1}x$, растягивается по всем направлениям не менее чем в Λ раз, а любое ЛУМ, близкое к этой точке, сжимается не менее чем в Λ раз.

Наши определения существенной и достаточной точки отличаются от принятых в [2, 3, 7], но они сформулированы в наиболее слабом виде, достаточном для дальнейшего. В конкретных приложениях существенность и достаточность определяется иначе — через систему инвариантных конусов [12], квадратичных форм [6], условий выпуклости [2, 7] и т.д., что удобнее для проверки.

Ниже сформулированы условия, используемые в доказательстве теоремы о локальной эргодичности.

Условие 1 («двойные разрывы»). Для любого конечного $n \geqslant 1$ пересечение $S_{1,n} \cap S_{-1,-n}$ (это точки разрыва для T^n и одновременно для T^{-n}) является объединением конечного числа многообразий размерности не выше $d-2$.

Условие 2 («непрерывность»). Системы пространств E^u_x и E^s_x непрерывно зависят от точки x во всех достаточных точках. В каждой достаточной точке x предельные пространства $\lim_{y\to x} E^u_y$ и $\lim_{y\to x} E^s_y$ не должны пересекаться.

Условие 3 («толщина области разрывов»). Для $\varepsilon > 0$ обозначим ε-окрестность множества $S_{-1,1}$ через U_ε. Тогда $\nu(U_\varepsilon) \leqslant \mathrm{const}\,\varepsilon$.

Условие 4 («анзатц»). На многообразии S_1 почти каждая точка (по отношению к внутренней римановой метрике на нем) является u-существенной, а на S_{-1} соответственно s-существенной.

Условие 5 («параллелизация»). Углы, образованные многообразием S_n с примыкающими к нему ЛНМ (ЛУМ), равномерно стремятся к нулю при $n \to +\infty$ (соответственно при $n \to -\infty$).

Отметим, что условие 3 далеко не тривиально, поскольку в нем речь идет о «монотонной», а не об обычной метрике. Если «монотонная» метрика является псевдометрикой, то окрестность U_ε может быть весьма обширной и тогда выбор псевдометрики должен производиться с особой тщательностью — см. например, [10].

Условие 3 необходимо для вывода следующих двух оценок на распределение длин ЛНМ и ЛУМ по мере ν. Пусть x — достаточная точка и $V(x)$ — ее малая окрестность. Тогда [2, 7] для любого $\delta > 0$

$$\nu\{y \in V(x) : r^{u,s}(y) < \delta\} \leqslant C(x)\delta. \tag{2}$$

Кроме того, если $F(\delta)$ — такая функция, что $F(\delta) \to \infty$ при $\delta \to 0$, то

$$\nu\{y \in V(x) : r^{u,s}(y) < \delta \text{ и } k^{u,s}(y) > F(\delta)\} \leqslant C(x)\delta\varphi(\delta), \tag{3}$$

где функция $\varphi(\delta)$ стремится к 0 при $\delta \to 0$. Оценка (2) означает, что «коротких» ЛНМ и ЛУМ не слишком много, а в силу оценки (3) большинство их оканчивается («рвется») на «недалеких» образах многообразия разрывов, т.е. на S_n при небольших по модулю значениях n.

Теорема 1 («о локальной эргодичности»). *Если гиперболическое отображение T удовлетворяет условиям 1–5, то у любой достаточной точки $x \in M_0$ найдется открытая окрестность $V(x)$, лежащая почти целиком (по мере ν) в одной эргодической компоненте отображения T.*

Доказательство теоремы 1 впервые появилось в [2] для биллиардных систем с полурассеивающей границей, а затем в более универсальном виде в [7, 6, 5]. В конкретных примерах [1–10] условия 1–5 обычно выполнены, хотя их проверка (особенно условий 4 и 5) бывает непроста. Лишь один пример — система «падающих шаров» [8, 9] (при трех и более шарах) не удовлетворяет одному из условий — пятому. А именно, многообразие S_n при сколь угодно больших $n > 0$ может далеко отклоняться от направлений ЛНМ и даже приближаться к направлению ЛУМ! Цель этой работы — усилить теорему 1, заменив условие 5 на более слабое:

Условие 5′. В почти каждой точке x многообразия S_1 (по отношению к внутренней римановой метрике) пространство E^s_x трансверсально S_1, т.е. $E^s_x \not\subset \mathcal{T}_x S_1$. Аналогично, $E^u_x \not\subset \mathcal{T}_x S_{-1}$ для почти каждой точки $x \in S_{-1}$.

Поясним, что пространство $\mathcal{T}_x S_1$ имеет коразмерность 1 в «полном» касательном пространстве $\mathcal{T}_x M$; поэтому пересечение $E^s_x \cap \mathcal{T}_x S_1$ либо имеет размерность $\dim E^s_x - 1$ (трансверсальность), либо E^s_x включено в $\mathcal{T}_x S_1$. Далее, в случае $E^s_x \not\subset \mathcal{T}_x S_1$ определим угол между пространствами E^s_x и $\mathcal{T}_x S_1$, равный углу между вектором $v \in E^s_x$, ортогональным к пересечению $E^s_x \cap \mathcal{T}_x S_1$, и пространством $\mathcal{T}_x S_1$.

Замена условия 5 на 5′ означает, что направления многообразий $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ могут сколь угодно отклоняться от направлений ЛНМ и даже как угодно приближаться к направлениям ЛУМ, но не могут быть параллельными последним! Если условие 5′ нарушается, то какой-либо участок многообразия S_1 расслаивается на отдельные ЛУМ. В этом случае данный участок действительно может

разделить фазовое пространство на две эргодические компоненты. Точнее говоря, основная идея доказательства теоремы 1 (построение «цепочки Хопфа», связывающей две произвольные точки окрестности $V(x)$) нереализуема, поскольку для таких цепочек есть непреодолимые барьеры — это описанные выше участки многообразия S_1 и их образы. Поэтому условие $5'$ есть фактически ослабление условия 5 «до предела».

Примером гиперболических отображений, удовлетворяющих условию $5'$, но не 5, кроме упомянутой системы «падающих шаров», может служить следующее. Рассмотрим гиперболический автоморфизм тора [14] и разрежем последний на части по нескольким гиперповерхностям, эти части сместим друг относительно друга, чтобы они вновь составили исходный тор, а потом применим гиперболический автоморфизм. Разрезы могут проходить произвольно, но с соблюдением условий 1 и $5'$, т.е. не захватывая целиком устойчивых и неустойчивых линейных подпространств.

Оставшаяся часть этой заметки посвящена доказательству теоремы 1 при условиях 1–4 и $5'$. Мы предполагаем, что читатель знаком с доказательством теоремы 1, изложенным в [2, 7]. Основной инструмент этого доказательства — построение семейства покрытий окрестности $V(x)$ системами параллелограммов $G_1^{(\delta)}, \dots, G_{I(\delta)}^{(\delta)}$, где $\delta > 0$ — параметр семейства (впервые эта конструкция появилась в [1]). В доказательстве параллелограммы делятся на «хорошие», в которых достаточно много участков ЛНМ и ЛУМ размера $> \delta$, и «плохие» — оставшиеся, суммарная мера которых не превышает $o(\delta)$, т.е. равна $\delta\cdot\varphi(\delta)$, где $\varphi(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. При замене условия 5 на $5'$ трудности возникают только с параллелограммами, пересекающими ровно одно из гладких многообразий, входящих в $S_{-N,N}$, где $N = F(\delta)$ — специально подобранное число [2, 7].

Рассмотрим параллелограмм $G = G_i^{(\delta)}$, пересекающий многообразие $R \subset S_n$ при некотором $|n| \leqslant N$. Пусть для определенности $n > 0$. Тогда, если угол между пространством E_y^s и касательным пространством $\mathcal{T}_y R$ в точках $y \in R \cap G$ больше ε_1 (где $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\delta)$ будет уточнено ниже), то такой параллелограмм «хороший». Действительно, так как $n > 0$, то в параллелограмме G имеется достаточно много «длинных» (размера $> \delta$) участков ЛУМ. Точнее, они заполняют подмножество $G' \subset G$ меры $\nu(G') > (1 - \varepsilon_2)\nu(G)$, где $\varepsilon_2(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ (доказательство этого проводится так же, как и в [2, 7]). Поэтому, выбрав $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2$ и такое, что $\varepsilon_1(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ (например, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2^{1/2}$), получим, что «длинные» ЛУМ «прошивают» участок R, лежащий в G, и связывают таким образом две части параллелограмма G, разделенные гиперповерхностью R. В каждой из этих частей найдется также достаточно много ЛНМ, оканчивающихся либо на R, либо на границе ∂G. Этого достаточно для дальнейшего использования параллелограмма в построении «цепочки Хопфа» — см., например, [7, лемма 3.11].

Предположим обратное: угол между E_y^s и касательным пространством $\mathcal{T}_y R$, $y \in R \cap G$, меньше ε_1. Отнесем такой параллелограмм к «плохим» и оценим их суммарную меру. Пусть G — один из таких параллелограммов, пересекающий $R \subset S_n$ при $0 < n \leqslant N$. Тогда в силу условия 2 угол между пространствами E_y^u, $y \in G$, и $\mathcal{T}_y R$, $y \in R \cap G$, больше некоторого $c_0(x) > 0$ и поэтому $r^u(y) < c_1(x)\delta$ для всех $y \in G$ и некоторого $c_1(x) > 0$. Комбинируя эту оценку с неравенствами (2), (3) и затем с условием $5'$ и условием $\varepsilon_1(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, приходим к выводу, что суммарная мера рассматриваемых «плохих» параллелограммов не превышает $o(\delta)$. Тем самым теорема 1 при условиях 1–4 и $5'$ доказана.

Как и в работах [2–7], доказанная теорема допускает непосредственное обобщение:

Теорема 2. *Если гиперболическое отображение T удовлетворяет условиям 1–4 и 5′, то у любой достаточной точки x, лежащей в M_0 или ровно на одном гладком многообразии, входящем в $S_{-\infty,\infty}$, найдется окрестность $V(x)$ в M, лежащая почти целиком в одной эргодической компоненте отображения T.*

Наконец, опишем, как теорема 2 позволяет доказывать эргодичность в конкретных примерах. Если множество точек x, о которых идет речь в этой теореме, имеет полную меру и линейно связно, то в силу простых соображений отображение T эргодично и даже обладает K-свойством [2–5]. Отметим также, что точки, лежащие на пересечении двух и более гладких компонент множества $S_{-\infty,\infty}$, не могут препятствовать линейной связности в силу условия 1. С другой стороны, множество недостаточных точек может быть как пустым (в случаях сильных свойств гиперболичности — см. [10]), так и довольно сложным множеством, исследование которого требует серьезных усилий, — см. [3, 4]. Можно надеяться, что опыт, накопленный при изучении конкретных систем (см. [1–10] и др.), будет развиваться и обобщаться в дальнейшем.

Литература

1. *Синай Я. Г.* Эргодические свойства газа Лоренца // Функц. анализ и его прил. – 1979. – Т. 13, вып. 3. – С. 46–59
2. *Синай Я. Г., Чернов Н. И.* Эргодические свойства некоторых систем двумерных дисков и трехмерных шаров // УМН. – 1987. – Т. 42, вып. 3. – С. 153–174
3. *Krámli A., Simányi N., Szasz D.* The K-property of three billiard balls // Annals of Mathematics. – 1991. – V. 133. – P. 37–72
4. *Bunimovich L. A., Liverani C., Pellegrinotti A., Sukhov Yu. M.* Ergodic systems of N balls in a billiard table. – Preprint, 1991
5. *Donnay V., Liverani C.* Potentials on the two-torus for which the Hamiltonian flow is ergodic // Comm. Math. Phys. – 1991. – V. 135, No. 2. – P. 267–302
6. *Markarian R.* The fundamental theorem of Sinai–Chernov for dynamical systems with singularities. – Preprint, 1991
7. *Krámli A., Simányi N., Szasz D.* A “transversal” fundamental theorem for semi-dispersing billiards // Comm. Math. Phys. – 1990. – V. 129. – No. 3. – P. 535–560
8. *Wojtkowski M.* A system of one-dimensional balls with gravity // Comm. Math. Phys. – 1990. – V. 126, No. 3. – P. 507–533
9. *Wojtkowski M.* The system of one-dimensional balls in an external field // Comm. Math. Phys. – 1990. – V. 127, No. 2. – P. 425–432
10. *Chernov N. I.* The ergodicity of a Hamiltonian system of two particles in an external field // Physica D. – (to appear)
11. *Katok A., Strelcyn J.-M.* Smooth maps with singularities: invariant manifolds, entropy and billiards. – Springer-Verlag, 1987. – (Lect. Notes Math. V. 1222)
12. *Оселедец В. И.* Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем // Труды ММО. – 1968. – Т. 19. – С. 179–210
13. *Wojtkowski M.* Invariant families of cones and Lyapunov exponents // Ergod. Theory Dyn. Syst. – 1985. – V. 5, No. 1. – P. 145–161
14. Динамические системы, Т. 2. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – М.: ВИНИТИ, 1985.

Объединенный институт
ядерных исследований

Поступило в редакцию
19 сентября 1991г.