

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ж. О. Аслонов, Об одной негрубой динамической системе на торе T^n ,
Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 2008, выпуск 2, 9–11

<https://www.mathnet.ru/vuu57>

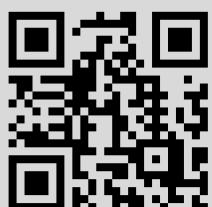
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.84

9 августа 2025 г., 12:37:45



УДК 517.934

© Ж. О. Аслонов

ОБ ОДНОЙ НЕГРУБОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ НА ТОРЕ T^n

На двумерном торе построена негрубая динамическая система.

Ключевые слова: динамическая система, векторное поле, тор.

Пусть M — гладкое (класса C^{r+1}) связное компактное многообразие размерности n , $V^r(M)$ — множество C^r -векторных полей, снабженное C^r -топологией.

Определение 1 (см. [1]). Векторные поля $X, Y \in V^r(M)$ называются (C^r -эквивалентными) топологически эквивалентными, если существует (C^r -диффеоморфизм) гомеоморфизм $h : M \rightarrow M$, который переводит траектории поля X в траектории поля Y , сохраняя их ориентации: последнее условие означает, что если $p \in M$ и $\delta > 0$, то существует такое $\varepsilon > 0$, что если $0 < t < \delta$, то $h(X_t(p)) = Y_{t'}(h(p))$ для некоторого $t' \in (0, \varepsilon)$.

В дальнейшем h будем называть топологической эквивалентностью между X и Y .

Определение 2. Векторное поле $X \in V^r(M)$ называется грубым, если существует такая окрестность V поля X в $V^r(M)$, что любое $Y \in V$ топологически эквивалентно полю X .

Пусть $X = \{a, b\}$ — постоянное векторное поле на $R^2(u, v)$. Векторное поле X можно рассмотреть на торе T^2 , так как его координаты являются периодическими. Тогда интегральные кривые векторного поля на T^2 являются образами интегральных кривых векторного поля в $R^2(u, v)$ при факторизации.

Определение 3. Числа a и b называются рационально независимыми, если из $ka + mb = 0$ с целыми k и m следует $k = m = 0$.

Если числа a и b рационально независимы, то каждая интегральная кривая поля X является всюду плотной на торе T^2 . В этом случае поле X называется иррациональной обмоткой.

Известно, что иррациональная обмотка на двумерном торе не является грубой [1].

В работе [2] доказано, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует динамическая система, имеющая конечное число замкнутых траекторий, порожденная гладким векторным полем X_ε , которое достаточно близко к X в C^r -компактно-открытой топологии, то есть $\|X - X_\varepsilon\|_r < \varepsilon$. Более того, векторное поле X_ε построено явным образом:

$$X_\varepsilon = \left\{ a' + \frac{\varepsilon(2\pi)^{-r}}{\sqrt{5} \cdot |k|^r \cdot |m|^r} \cdot \sin^2(n\pi(ku - mv)), b' \right\}, \quad a', b' \in Q, n \in N.$$

Доказано, что это векторное поле является динамической системой на торе T^2 .

Если рассмотреть прямую, проходящую через начало координат параллельно вектору $\{a', b'\}$, то она имеет уравнение

$$ku - mv = 0 \tag{1}$$

В точках этой прямой поле X_ε имеет вид $X_\varepsilon = \{a', b'\}$, причем прямая (1) является интегральной кривой поля X_ε .

Если рассмотрим прямые

$$ku - mv = \frac{l}{|k|n}, \quad \text{где } l = 1, 2, 3, \dots, |k|n, \tag{2}$$

то в точках этих прямых векторное поле имеет вид $X_\varepsilon = \{a', b'\}$.

Прямые (2) при факторизации переходят в замкнутые кривые. Причем прямые $ku - mv = 0$ и $ku - mv = \frac{l}{|k|n}$, ($l = |k|n$) переходят в одну замкнутую кривую.

Таким образом, показано, что прямые

$$ku - mv = \frac{l}{|k|n}, \quad \text{где } l = 0, 1, 2, 3, \dots, |k|n$$

задают $|k|n$ замкнутых траекторий поля X_ε на T^2 .

Далее доказано, что векторное поле X_ε не имеет других замкнутых траекторий.

В работе [2] также проверяется, что норма разности векторных полей и их частных производных до порядка r меньше чем ε . Следовательно, $\|X - X_\varepsilon\|_r < \varepsilon$. Таким образом, в работе [2] построена аналитическая динамическая система на двумерном торе, которая имеет конечное число замкнутых траекторий и сколь угодно близка к иррациональной обмотке в гладкой компактно-открытой топологии векторных полей.

В настоящей работе построена динамическая система на n -мерном торе T^n , которая сколь угодно близка к иррациональной обмотке тора и имеет конечное число замкнутых траекторий. То есть имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть X — иррациональная обмотка на торе T^n . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует векторное поле X_ε такое, что поле X_ε имеет конечное число замкнутых траекторий и $\|X - X_\varepsilon\|_r < \varepsilon$, где $\|\cdot\|_r$ — расстояние в пространстве $V^r(T^n)$ [1].*

* * *

1. Палис Ж., Ди Мелу В. Геометрическая теория динамических систем. М.: Мир, 1986.
2. Нарманов А. Я., Аслонов Ж. О. Об одной динамической системе на двумерном торе // Вестн. Нац. ун-та Узбекистана. Ташкент, 2006. №2. С. 38–41.

Поступила в редакцию 15.02.08

*G. O. Aslonov***About one sensitive dynamical system on torus T^n**

A sensitive dynamical system is built on the two-dimensional torus.

Аслонов Жасурбек Орзиевич
Национальный университет Узбекистана,
100174, Узбекистан, Ташкент
Вузгородок
E-mail: jasurbek05@mail.ru