Алгебра и анализ
Том 5 (1993), вып. 1

© 1993 г.

К 80-летию А. Д. Александрова

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПОДМНОЖЕСТВА В ПРОСТРАНСТВАХ АЛЕКСАНДРОВА И ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА ЛИБЕРМАНА

Г. Я. Перельман, А. М. Петрунин

На основе понятия экстремального подмножества в работе строится естественная стратификация пространства Александрова, учитывающая как топологические, так и метрические его особенности, и устанавливается ряд ее свойств. Важнейшее из них — это квазигеодезичность страт, чем обобщается классическая теорема Либермана о кратчайших кривых на выпуклых гиперповерхностях в $\mathbb{R}^n$.

Введение

Настоящая работа продолжает исследование конечномерных пространств Александрова (с ограниченной снизу кривизной), начатое в [3]; она также тесно связана с работой [6]. Мы будем свободно использовать понятия, результаты и стандартные обозначения из упомянутых работ.

Как показано в [6], пространство Александрова обладает канонической топологической стратификацией, стратами которой являются топологические многообразия (теорема II). В то же время метрические особенности могут располагаться хаотично, не образуя страт. И все же „существенные“ метрические особенности часто образуют страты, — например, в случае, когда они возникают при факторизации по действию группы изометрий.

В этой статье мы описываем стратификацию пространства Александрова, учитывающую как топологические, так и метрические его особенности: замыканиями ее страт служат всевозможные примитивные экстремальные подмножества пространства Александрова (см. п. 3.8). Мы также устанавливаем ряд естественных свойств этой стратификации, важнейшим из которых является „вполне-квазигеодезичность“ страт (в некотором естественном смысле), см. теоремы 5.2 и 5.3. Это последнее свойство является естественным обобщением классической теоремы Либермана.

Ключевые слова: пространство Александрова, стратифицированное пространство, экстремальное множество, квазигеодезическая кривая.

Теоремы Либермана [4] описывают внешнегеометрические свойства кратчайших кривых на выпуклых гиперповерхностях в $\mathbb{R}^n$. В их основе лежит важное наблюдение: если цилиндр, направляющей которого служит такая кратчайшая, „трансверсален" к гиперповерхности, то кратчайшая является выпуклой кривой для (плоской) внутренней метрики этого цилиндра. Выпуклость сохраняется, если цилиндр заменить конусом с вершиной внутри выпуклого тела и с той же направляющей. Именно это последнее утверждение мы здесь называем теоремой Либермана.

Независимо от теорем Либермана в 50-х годах А. Д. Александров определил и изучил квазигеодезические кривые на выпуклой поверхности в $\mathbb{R}^3$ [1], см. также [2]. Квазигеодезические образуют в точности замыкание для класса геодезических (локально кратчайших). Определения и конструкции Александрова не допускают прямого обобщения по размерности. Для полиэдров попытку такого обобщения предпринял А. Д. Милка [5].

В дипломной работе второго из авторов (Квазигеодезические в многомерных пространствах Александрова ограниченной снизу кривизны. Ленгосуниверситет, 1991), далее именуемой [Пет], было дано принципиально иное определение квазигеодезической в пространстве Александрова (ограниченной снизу кривизны) любой размерности и изучены некоторые из основных свойств квазигеодезических. С точки зрения этого определения (см. п. 5.1 ниже) теорему Либермана можно переформулировать так: каждая геодезическая выпуклой гиперповерхности в $\mathbb{R}^n$ является квазигеодезической для соответствующего выпуклого тела, рассматриваемого как пространство Александрова неотрицательной кривизны. В настоящей статье дано обобщение этой формы теоремы Либермана (теоремы 5.2, 5.3). Доказательство использует только материал §1 и п. 3.1, 3.2(2).

Соглашение. На протяжении всей работы мы будем обозначать через M полное компактное n-мерное пространство Александрова с кривизной $\geqslant 0$, $n \geqslant 2$. (Все доказанные утверждения справедливы и для любой другой нижней грани кривизны, при этом доказательства или переносятся дословно, или нуждаются лишь в незначительных изменениях. Компактность, как правило, несущественна: в тех случаях, когда утверждение формально неверно для некомпактного пространства, оно остается верным для любой его ограниченной области). Через Σ обозначаются полные пространства кривизны $\geqslant 1$. При этом для упрощения базы индукционных рассуждений мы допускаем пространства размерности 1 (отрезок длины $\leqslant \pi$ и окружность длины $\leqslant 2\pi$) и даже размерности 0 (точка и пара точек на расстоянии π), причем отрезок и точка считаются пространствами с краем, а окружность и двоеточие — пространствами без края.

§1. Определение экстремальных подмножеств, простейшие свойства и примеры

1.1. **Определение.** Замкнутое подмножество $F \subset M$ называется *экстремальным*, если для любой дистанционной функции $f = \operatorname{dist}(a)$, $a \in M$, $f(a) = 0$, [illegible]

Если f имеет в точке $p \neq q$ локальный минимум на F, то p является *критической точкой типа максимума* для f на M, т.е.

$$\overline{\lim_{p_i \in M,\, p_i \to p}} \frac{(f(p_i) - f(p))}{|pp_i|} \leqslant 0.$$

В случае $M = \Sigma$, т.е. когда кривизна $\geqslant 1$, накладывается еще одно условие.

Если $F \subset \Sigma$ пусто или состоит из одной точки $p \in \Sigma$, то дополнительно требуем, чтобы выполнялось $\operatorname{diam}\Sigma \leqslant \pi/2$ или $\Sigma \subset \overline{B}_p(\pi/2)$ соответственно.

Очевидно, что само пространство является своим экстремальным подмножеством.

1.2. Примеры. Пусть $F \subset M$ — замкнутое подмножество, удовлетворяющее следующему условию: вместе с каждой своей точкой p оно содержит все точки q из конической окрестности $U_p \subset M$, коническая окрестность которых гомеоморфна U_p (при этом гомеоморфизм должен переводить q в p). Тогда F — экстремальное подмножество. В частности, край ∂M (см. препринт G. Perelman, Alexandrov's spaces with curvature bounded from below, II, 1991, п. 4.6) и замыкания страт канонической стратификации являются экстремальными подмножествами. (В самом деле, если для функции $f = \operatorname{dist}(q)$ точка $p \in F$ не является критической точкой типа максимума на M, то это регулярная точка для f. Поэтому по утверждению (A) основной теоремы 1.4 из [6] малая окрестность точки p топологически тривиализуема относительно f. Следовательно, мы можем найти последовательность точек $p_i \to p$ с $f(p_i) < f(p)$, конические окрестности которых гомеоморфны конической окрестности p. Но тогда $p_i \in F$, и точка p не является точкой локального минимума f на F, что и требовалось).

1.3. Определение. Назовем *касательным пространством* $\Sigma_p F$ в точке $p \in F$ к замкнутому множеству F множество предельных точек в Σ_p направлений кратчайших pp_i, когда $p_i \in F$, $p_i \to p$. (Очевидно, $\Sigma_p M = \Sigma_p$). Ниже мы увидим, что для экстремальных F это определение равносильно стандартному определению пространства направлений как множества направлений всех кривых с началом p, идущих по F (см. п. 3.3).

1.4. Предложение. *Пусть $F \subset M$ — экстремальное подмножество. Тогда для каждой точки $p \in F$, $\Sigma_p F \subset \Sigma_p$ — тоже экстремальное подмножество. Обратное верно, если F содержит хотя бы две точки.*

Доказательство. Оставляя в стороне тривиальные случаи, когда $\Sigma_p F$ пусто или одноточечно, предположим, что условие экстремальности для $\Sigma_p F$ нарушается в точке ξ. Тогда, очевидно, найдутся такие $\eta, \zeta \in \Sigma_p$, что функция $\operatorname{dist}(\eta)$ имеет в точке ξ строгий глобальный минимум на $\Sigma_p F$; $|\xi\zeta|$ и $|\xi\eta| < \pi/2$ и $\widetilde{\angle}\eta\xi\zeta > \pi/2$. Выпустим в направлениях η и ζ кривые $\eta(t)$ и $\zeta(t)$ соответственно и рассмотрим последовательность $p_i \to p$, $p_i \in F$, такую, что направления кратчайших pp_i сходятся к ξ. Для каждой p_i найдем точки q_i на $\eta(t)$ и r_i на $\zeta(t)$ такие, что

$$|pq_i| \cdot \cos|\eta\xi| = |pp_i| = |pr_i| \cdot \cos|\zeta\xi|.$$

Пусть s_i — точка минимума функции $\operatorname{dist}(q_i)$ на F. Заметим, что так как направления кратчайших pq_i стремятся к η, а направления кратчайших ps_i не могут

иметь предельных точек в $\overline{B}_\eta(\eta\xi) \setminus \{\xi\}$, то

$$\overline{\lim} \frac{|pq_i| \cdot \sin|\xi\eta|}{|q_i s_i|} \leqslant 1.$$

С другой стороны, $|q_i s_i| \leqslant |q_i p_i|$, а

$$\overline{\lim} \frac{|pq_i| \cdot \sin|\eta\xi|}{|q_i p_i|} = 1.$$

Поэтому $|q_i s_i|/|q_i p_i| \to 1$, и предельное множество направлений кратчайших ps_i лежит в $\overline{B}_\eta(|\eta\xi|)$, откуда получаем, что эти направления сходятся к ξ. Но тогда $\widetilde{\angle} q_i s_i r_i \to \widetilde{\angle}\eta\xi\zeta$, т.е. при достаточно большом i имеем $\widetilde{\angle} q_i s_i r_i > \pi/2$, что противоречит экстремальности F. Первая часть предложения 1.4 доказана.

Для доказательства обратного утверждения заметим, что условие экстремальности F в точке p означает запрещение такой ситуации, когда для некоторого $\xi \in \Sigma_p$ одновременно $|\xi\Sigma_p F| \geqslant \pi/2$ и $\max_{\eta\in\Sigma_p} |\xi\eta| > \pi/2$. Предположим, что такая ситуация все же имеет место, и пусть η — самая далекая от ξ точка в Σ_p, а ζ — самая близкая к ξ точка в $\Sigma_p F$. Если $\Sigma_p F$ состоит хотя бы из двух точек, то мы можем считать, что $\xi \neq \eta$, и тогда $\widetilde{\angle}\xi\zeta\eta > \pi/2$, что противоречит экстремальности $\Sigma_p F$ в ζ. Если же $\Sigma_p F = \varnothing$, или $\Sigma_p F$ одноточечно и $\eta = \zeta$, то, согласно нашему определению 1.1, должно быть $|\xi\eta| \leqslant \pi/2$ — противоречие. •

1.4.1. Доводы, которые доказывают вторую часть п. 1.4, позволяют также доказать следующее

Предложение. *Пусть $F \subsetneqq \Sigma$ собственное экстремальное подмножество, и пусть p — наиболее удаленная от F точка из Σ. Тогда каждая точка из Σ отстоит от p не более чем на $\pi/2$.*

Доказательство. Пусть q — любая точка Σ. Так как p — наиболее удаленная от F точка, мы можем найти точку $r \in F$ с $|pr| = |pF|$ и $\angle rpq \leqslant \pi/2$. С другой стороны, $\angle prq \leqslant \pi/2$, так как F — экстремальное. Из второй части доказательства п. 1.4 следует, что $|pF| \leqslant \pi/2$. Следовательно, $|pq| \leqslant \pi/2$, ч.т.д. •

1.5. Следующее утверждение является модификацией леммы 2.3 из [6]. Там же см. определение класса $\mathrm{DER}(\Sigma)$ (п. 2.1).

Предложение. *Пусть $F \subset \Sigma$ — экстремальное подмножество, $f_i \in \mathrm{DER}(\Sigma)$, $i = 0, \ldots, k+1$, $k \geqslant 0$, и предположим, что $\varepsilon = \min_{i\neq j}(-\langle f_i, f_j\rangle) > 0$. Тогда*

(1) *$\exists q \in F$ с $f_i(q) \geqslant \varepsilon$ при $0 \leqslant i \leqslant k$;*

(2) *$\exists p \in F$ с $f_i(p) = 0$ при $1 \leqslant i \leqslant k$, $f_0(p) \geqslant \varepsilon$, $f_{k+1}(p) \leqslant -\varepsilon$.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что $F \neq \varnothing$, так как условие $\operatorname{diam}\Sigma \leqslant \pi/2$ противоречило бы предположению $\langle f_0, f_{k+1}\rangle < 0$. Для доказательства (1) найдем сначала точку $\bar{q} \in \Sigma$, удовлетворяющую неравенствам (1) (это возможно по лемме 2.3 из [6]), и пусть $q \in F$ — ближайшая к $\bar{q}$ точка F. Ясно, что $|q\bar{q}| < \pi/2$ (см. 1.4.1). Также ввиду экстремальности F имеем $\langle f_i', \chi_{\bar{q}}'\rangle \geqslant 0$, откуда, согласно неравенству $\langle f', g'\rangle_q \leqslant \langle f, g\rangle - f(q)g(q)$ (см. [6], неравенство (2.3)), для $i = 0, \ldots, k$ получаем $f_i(q) \cdot (-\cos|q\widehat{A}|) \leqslant -\varepsilon$ и, следовательно, $f_i(q) \geqslant \varepsilon$.

Утверждение (2) доказывается так же, как утверждение (c) леммы 2.3 из [6], с использованием предыдущего предложения 1.4, только в качестве X надо взять множество $\{\xi \in F : f_i(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant i \leqslant k\}$. •

1.6. Следствие. *Пусть $F \subset M$ — экстремальное подмножество, $p \in F$, и f — липшицева функция на M с $f'_p \in \mathrm{DER}(\Sigma_p)$. Тогда если $\varepsilon = \max_{\xi \in \Sigma_p} f'(\xi) > 0$, то*

$$\max_{\xi \in \Sigma_p F} f'(\xi) = \varepsilon \quad \text{и} \quad \min_{\xi \in \Sigma_p F} f'(\xi) \leqslant -\varepsilon.$$

Достаточно применить 1.5 к случаю $\Sigma = \Sigma_p$. •

§2. Топологическое строение экстремальных подмножеств

Экстремальные подмножества, так же как и само пространство M, обладают канонической стратификацией, страты которой являются топологическими многообразиями. Для ее построения можно воспользоваться аналогом элементарной теории Морса, построенным в [6].

Пусть $F \subset M$ — экстремальное подмножество. Допустимыми отображениями будем считать сужения на F допустимых отображений из M в $\mathbb{R}^n$ (при этом мы различаем сужения различных отображений, даже если их значения на F совпадают). Точку $p \in F$ назовем регулярной для такого отображения, если она регулярна для соответствующего отображения в M. Тогда для F выполняются свойства 1.0–1.3 из [6]. (В самом деле, свойства 1.0 и 1.1 тривиальны; свойство 1.2 доказывается исходя из предложения 1.5 выше точно так же, как соответствующее свойство для M доказывалось в [6] исходя из леммы 2.3. Наконец, свойство 1.3 для F является формальным следствием этого свойства для M, за исключением условия непустоты пересечения $K_\rho \cap g_{k+1}^{-1}(0) \cap g^{-1}(v) \neq \varnothing$, которое можно было бы и не включать в формулировку 1.3 (c), так как оно следует из 1.3 (d) и свойства 1.2).

Тем не менее доказательство основной теоремы 1.4 из [6], §1 не проходит для F, так как $K_\rho \setminus g_{k+1}^{-1}(0)$ может оказываться пустым при разных значениях k. Все же его можно спасти следующим образом. Определим по аналогии с MCS-пространствами размерности n (см. [6], Введение) также и $\widetilde{\mathrm{MCS}}$-пространства размерности $\leqslant n$, требуя, чтобы окрестность точки в таком пространстве была гомеоморфна открытому конусу над компактным $\widetilde{\mathrm{MCS}}$-пространством размерности $\leqslant n-1$. Так же как в случае MCS-пространств, определяется каноническая стратификация на топологические многообразия, единственное отличие состоит в том, что в случае $\widetilde{\mathrm{MCS}}$-пространств страты младших размерностей могут быть открыты в пространстве, т.е. пространство может иметь разную размерность в разных точках. Если теперь модифицировать утверждение (C) основной теоремы 1.4 из [6], заменив MCS-пространства размерности $n-k$ на $\widetilde{\mathrm{MCS}}$-пространства размерности $\leqslant n-k$, то изложенное в [6] доказательство сможет охватить и случай экстремальных подмножеств. Таким образом, для экстремальных подмножеств справедливы утверждения (A), (B) основной теоремы 1.4, а также локальная теорема 1 и, наконец, интересующая нас теорема о стратификации 1 из [3].

Построенную стратификацию мы и будем называть канонической.

§3. Разные свойства экстремальных подмножеств. Разложение на примитивные составляющие. Стратификация пространства Александрова

Наша первая цель — доказать, что на экстремальном подмножестве локально индуцируется (конечная) внутренняя метрика.

3.1. Лемма. *Существует такое (зависящее только от M) число $\varepsilon > 0$, что*
(1) *если $p, q \in M$, $0 < |pq| < \varepsilon^2$, то либо*

$$\max_{\xi \in \Sigma_q} \big(\operatorname{dist}(p)\big)'_{(q)}(\xi) > \varepsilon,$$

либо

$$\max_{\xi \in \Sigma_p} \big(\operatorname{dist}(q)\big)'_{(p)}(\xi) > \varepsilon;$$

(2) *если $p \in M$, а $F \subset M$ — экстремальное подмножество с $0 < |pF| < \varepsilon^2$, то*

$$\max_{\xi \in \Sigma_p} \big(\operatorname{dist}(F)\big)'_{(p)}(\xi) > \varepsilon.$$

Доказательство. Для доказательства (1) достаточно заметить, что при малом $\varepsilon > 0$ и $0 < |pq| < \varepsilon^2$ мы можем, применяя оценки объемов (ср. [3, 8.6]), найти такую точку $x \in M$, что $|px| > 3\varepsilon^{-1}|pq|$ (и, следовательно, $\pi - \varepsilon < \widetilde{\measuredangle} xpq + \widetilde{\measuredangle} xqp$) и для направления $\xi \in \Sigma_p$ некоторой кратчайшей px выполняется неравенство $\big|\min_{\eta \in q' \subset \Sigma_p} \big(|\xi\eta| - \pi/2\big)\big| > 3\varepsilon$.

Утверждение (2) доказывается аналогично: одна из альтернатив п. (1) исключается, так как если $q \in F$ — одна из ближайших к p точек F, то $\max_{\xi \in \Sigma_q} \big(\operatorname{dist}(p)\big)'_{(q)}(\xi) \leqslant 0$ ввиду экстремальности F. •

3.2. Следствия. (1) *Пусть, в обозначениях леммы* 3.1, *точка p лежит в некотором экстремальном подмножестве G. Тогда утверждения остаются верными, если в них Σ_p заменить на $\Sigma_p G$.*

В самом деле, это вытекает из 1.6.

(2) *На всяком экстремальном подмножестве G локально индуцируется внутренняя метрика, превосходящая внешнюю не более чем в ε^{-1} раз.*

В самом деле, если $p, q \in G$, то мы можем применить лемму 3.1 (1), заменяя Σ_p и Σ_q на $\Sigma_p G$ и $\Sigma_q G$ соответственно, после чего доказательство завершается стандартно.

(3) *Если, в условиях* 3.1 (1), *имеем $p \in F$, $q \in G$, где F, G — экстремальные подмножества, то найдется такая точка $r \in F \cap G$, что* $\max\{\,|pr|, |qr|\,\} \leqslant \varepsilon^{-1}|pq|$.

Это следует из 3.2 (1).

(4) *Если, в условиях* 3.1 (2), *имеем $|pF| \leqslant \varepsilon^2/2$, G — экстремальное подмножество, содержащее p, и $0 < R < \varepsilon^2/2$, то можно построить такую точку $\widehat{p} \in G$, что $|p\widehat{p}| = R$ и $|\widehat{p}F| \geqslant \varepsilon R$.*

Это следует из 3.2 (1). •

3.3. Теперь мы в состоянии доказать эквивалентность двух естественных определений касательного пространства для экстремальных множеств, см. п. 1.3.

Предложение. *Пусть $F \subset M$ — экстремальное подмножество, $p \in F$, $\xi \in \Sigma_p F$. Тогда существует кривая, выходящая из p в направлении ξ и идущая по F.*

Доказательство. Достаточно для любого малого $\delta > 0$ найти такое $R(\delta) > 0$ (не зависящее от ξ), что для любого $R \in (0, R(\delta))$ найдется точка $z \in F$ такая, что $|pz| = R$ и $z' \subset B_\xi(\delta) \subset \Sigma_p$, после этого доказательство легко закончить, используя следствие 3.2(2).

Пусть $q \neq p$ — такая точка вблизи p, что $q' \subset B_\xi(\delta/4) \subset \Sigma_p$ и $\angle xpy - \tilde{\angle} xpy < \delta/4$ для любых $x, y \in B_p(|pq|)$. Положим $R(\delta) = |pq|/2$. Чтобы оправдать этот выбор, построим для сколь угодно малого ν последовательность $z_0, \dots, z_N \in F$ такую, что $z_0 = p$, $|pz_N| > |pq|/2$, $|z_i z_{i+1}| < \nu$ для всех $i > N$ и

$$\tilde{\angle} qpz_i \leqslant \frac{\delta}{4}(2 - |qz_i|/|pq|) \quad \text{для всех} \quad i > 0. \tag{3.1}$$

Добиться выполнения этих условий для z_1 легко, а если они выполнены для z_i, то для построения следующей точки z_{i+1} можно воспользоваться следствием 1.6. В самом деле, по 1.6 для сколь угодно малого $\mu > 0$ мы можем найти такую z_{i+1} вблизи z_i, что

$$\tilde{\angle} qz_i z_{i+1} \leqslant \pi - \tilde{\angle} qz_i p + \mu. \tag{3.2}$$

В частности,

$$|qz_{i+1}| \leqslant |qz_i| - (1 - \delta)|z_i z_{i+1}|. \tag{3.3}$$

Если бы μ равнялось нулю, то из (3.2) сразу следовало бы, что $\tilde{\angle} qpz_{i+1} \leqslant \tilde{\angle} qpz_i$. Легко видеть, что μ можно выбрать столь малым, что (3.1) будет выполнено для z_{i+1}, если оно выполнялось для z_i. Нам осталось обеспечить $pz_N > |pq|/2$ для подходящего N. Если $|z_i z_{i+1}|$ отделены от нуля, то это очевидно из (3.2), в противном случае можно воспользоваться стандартным приемом (см., например, п. 6.3 упомянутого в 1.2 препринта). •

3.4. Наша следующая цель — показать, что если F, G — экстремальные подмножества, то $F \cap G$ и $\overline{G \setminus F}$ — также экстремальные подмножества (при условии их непустоты).

Лемма. *Пусть F, G — экстремальные подмножества в M, $p \in F \cap G$. Тогда*

(1) $\Sigma_p(F \cap G) = \Sigma_p F \cap \Sigma_p G$,

(2) $\Sigma_p(\overline{G \setminus F}) = \overline{\Sigma_p G \setminus \Sigma_p F}$.

Доказательство. (1) Включение $\Sigma_p(F \cap G) \subset \Sigma_p F \cap \Sigma_p G$ тривиально. Для доказательства обратного включения зафиксируем $\xi \in \Sigma_p F \cap \Sigma_p G$ и построим, пользуясь предложением 3.3, последовательности $q_i \in F$, $q_i \to p$, и $r_i \in G$, $r_i \to p$ такие, что направления pq_i, pr_i стремятся к ξ и $pq_i = pr_i$. Тогда $|q_i r_i| = o(|pq_i|)$, и, применяя следствие 3.2(3), мы можем найти точки $s_i \in F \cap G$ такие, что $|q_i s_i| = o(|pq_i|)$. Поэтому при $i \to \infty$ направления кратчайших ps_i стремятся к ξ, что и требовалось.

(2) Здесь включение $\overline{\Sigma_p G \setminus \Sigma_p F} \subset \Sigma_p(\overline{G \setminus F})$ очевидно, так как $\Sigma_p(\overline{G \setminus F})$ замкнуто.

Для доказательства обратного включения зафиксируем $\xi \in \Sigma_p(\overline{G \setminus F})$ и последовательность $p_i \to p$ точек $p_i \in G \setminus F$ таких, что направления кратчайших

pp_i сходятся к ξ. Зафиксируем $\delta > 0$. Тогда, пользуясь следствием 3.2(4) и выбирая подходящие $R_i = \delta^2|pp_i|$, мы можем, считая $\delta < \varepsilon$, построить последовательность точек $\widehat{p}_i \in G \setminus F$, $\widehat{p}_i \to p$, такую, что любое предельное для направлений кратчайших $\widehat{pp}_i$ направление η удовлетворяет неравенствам $|\xi\eta| < \delta$ и $|\eta\Sigma_p F| > \delta^3$. (Здесь мы воспользовались предложением 3.3 для F). Таким образом, $\xi \in \Sigma_p G \setminus \Sigma_p F$, что и требовалось. •

3.5. Предложение. *Пусть F, G — экстремальные подмножества в M. Тогда*

(1) *$F \cap G$ тоже экстремальное подмножество в M;*

(2) *$\overline{G \setminus F}$ тоже экстремальное подмножество в M, если оно непусто.*

Доказательство. (1) Ввиду предложения 1.4 нам достаточно рассмотреть отдельно случай, когда $M = \Sigma$, а $F \cap G$ пусто или одноточечно, и применить индукцию по размерности (с очевидной базой), ссылаясь на 3.4(1). Итак, пусть $M = \Sigma$, $F \cap G \subset \{p\}$, и q — самая далекая от p точка Σ. Нам нужно доказать, что $|pq| \leqslant \pi/2$. Предположим, что это не так. Тогда функция $\operatorname{dist}(q)$ не имеет критических точек в $\overline{B}_q(|pq|)$, кроме самой точки q. Так как $q \notin F \cap G$, то мы можем считать, для определенности, что $q \notin F$, и, следовательно, $|qF| > \pi/2$. Но это противоречит экстремальности F (см. 1.4.1).

(2) И в этом случае предложение 1.4 и лемма 3.4(2) позволяют применить индукцию по размерности (с очевидной базой). (Заметим, что если $p \in \overline{G \setminus F} \cap F$, то по лемме 3.4(2) имеем $\Sigma_p G \setminus \Sigma_p F \neq \varnothing$). Отдельно надо рассмотреть случай, когда $M = \Sigma$ и $G \setminus F = \{p\}$. Нам нужно проверить, что $\Sigma \subset B_p(\pi/2)$. Предположим, что это не так, и пусть q — самая далекая от p точка Σ. Тогда $F \neq \varnothing$, $F \neq \{q\}$, поэтому существует отличная от p и q точка $r \in F$, ближайшая на F к p. Ввиду экстремальности F имеем $\widetilde{\angle}prq \leqslant \pi/2$, а так как p — изолированная точка экстремального множества G, то $\widetilde{\angle}rpq \leqslant \pi/2$. Но эти два неравенства несовместимы с тем, что $|pr| \leqslant |pq|$ и $|pq| > \pi/2$. •

3.6. Предложение. *Количество экстремальных подмножеств данного пространства M конечно.*

В самом деле, так как функция $\operatorname{dist}(p)$ не имеет критических точек в малой проколотой окрестности p, то всякое экстремальное подмножество, задевающее такую окрестность, проходит через p. С другой стороны, из леммы 3.4(2) следует, что два экстремальных подмножества, имеющие в p одинаковые касательные пространства, совпадают вблизи p. Поэтому наше предложение получается применением индукции по размерности. •

3.7. Теперь мы в состоянии разложить произвольное экстремальное подмножество на примитивные составляющие.

Определение. Назовем экстремальное подмножество *примитивным*, если оно не содержит собственных экстремальных подмножеств с непустой относительной внутренностью.

Предложение. *Всякое экстремальное подмножество единственным образом представляется в виде объединения примитивных экстремальных подмножеств с непустой относительной внутренностью.*

Это легко следует из 3.5 и 3.6. •

3.8. Стратификация пространства Александрова. Пусть F — примитивное экстремальное подмножество в M. Назовем *главной частью* $\overset{\circ}{F}$ подмножества F множество всех тех его точек, которые не лежат в других примитивных экстремальных подмножествах.

Ясно, что $\overset{\circ}{F}$ открыто и всюду плотно в F. Также легко видеть, что семейство главных частей примитивных экстремальных подмножеств M образует дизъюнктное покрытие M.

Наконец, можно показать, что для каждого F его главная часть $\overset{\circ}{F}$ является топологическим многообразием. (В самом деле, так как (см. §2) для экстремальных подмножеств справедливо утверждение (A) основной теоремы 1.4 из [6], то замыкание каждой страты канонической стратификации F является экстремальным подмножеством (ср. 1.2). Поэтому ввиду примитивности F только у одной страты замыкание имеет непустую внутренность в F, а все остальные страты покрываются меньшими примитивными подмножествами. Таким образом, $\overset{\circ}{F}$ содержится в одной страте, что и требовалось).

Покрытие M главными частями примитивных экстремальных подмножеств и является той стратификацией, более тонкой чем топологическая, о которой шла речь во введении.

§4. Факторизация и экстремальные подмножества

4.1. Предложение. *Пусть Γ — компактная группа, действующая на M изометриями, $F \subset M$ — экстремальное подмножество, $\pi\colon M \to M/\Gamma$ — естественная проекция. Тогда $\pi(F)$ — экстремальное подмножество в M/Γ (которое является пространством Александрова, см.* [3, 4.6]).

Доказательство просто и предоставляется читателю. •

4.2. Предложение. *Пусть Δ — компактная группа, действующая на M изометриями, $\Gamma \subset \Delta$ — замкнутая подгруппа, F — множество неподвижных точек Γ, $\pi\colon M \to M/\Delta$ — естественная проекция. Тогда $\pi(F)$ — экстремальное подмножество в M/Δ.*

Доказательство. Рассмотрим сначала исключительный случай, когда $M = \Sigma$, а F — точка. Тогда $\overline{B}_F(\pi/2) = \{\, x \in \Sigma\colon |Fx| \leqslant \pi/2 \,\} \supset \Sigma$, так как в противном случае функция $\operatorname{dist}(F)$ была бы строго выпукла в $\Sigma \backslash \overline{B}_F(\pi/2)$, и, следовательно, имела бы единственную точку максимума, которая должна была бы быть Γ-инвариантной.

Перейдем теперь к общему случаю и предположим, что нашлись такие точки $\overline{p} \in \pi(F)$, $\overline{q}, \overline{r} \in M/\Delta$, что $|\overline{pq}| = |\overline{q}\pi(F)| > 0$, но $\widetilde{\measuredangle} qpr > \pi/2$. Найдем точки $p \in F$, $q \in \pi^{-1}(\overline{q})$, $r \in \pi^{-1}(\overline{r})$ такие, что $|pq| = |\overline{pq}|$, $|pr| = |\overline{pr}|$. Очевидно, что для любой точки s из орбиты $\Gamma \cdot q$ имеем $\widetilde{\measuredangle} rps > \pi/2$. Таким образом, для (абсолютно) выпуклой оболочки Ω множества $(\Gamma \cdot q)' \subset \Sigma_p$ можно найти такое $\xi \in r' \subset \Sigma_p$, что $|\xi\Omega| > \pi/2$. Нетрудно показать, что в этом случае Ω, рассматриваемое как пространство Александрова, имеет непустой край. (Надо применить индукцию по размерности, при этом вместо условия $|\xi\Omega| > \pi/2$ предполагая $|\xi\Omega| \geqslant \pi/2$

и $\max_{\omega\in\Omega}|\xi\omega| > \pi/2$; для доказательства индукционного перехода следует рассмотреть $\Sigma_{\omega_0}\Omega \subset \Sigma_{\omega_0}$, где $\omega_0 \in \Omega$ — ближайшая к ξ точка из Ω).

Таким образом (ср. упомянутый в 1.2 препринт, п. 6.3), Ω имеет точечную душу ω, и $\Omega \subset \overline{B}_\omega(\pi/2)$. Так как $\Sigma_p \setminus B_\omega(\pi/2)$ абсолютно выпукло, то найдется такая точка $s \in \Gamma\cdot q$, что $|s'\omega| < \pi/2$. Очевидно, что Ω инвариантно относительно индуцированного действия Γ на Σ_p, следовательно, ω — неподвижная точка этого действия. Если бы в направлении ω выходила кратчайшая, то она также была бы неподвижна относительно действия Γ, и мы бы получили противоречие с тем, что $sF = sp$. Если такой кратчайшей нет, придется воспользоваться приведенной ниже леммой 4.3 о строго выпуклой оболочке.

4.3. Зафиксируем $\lambda > 0$ и для произвольного компактного множества K рассмотрим семейство всех 1-липшицевых функций f, для которых множество $f^{-1}([0,+\infty))$ абсолютно выпукло, содержит K и функция f λ-вогнута на этом множестве. Пусть f_K обозначает минимум всех функций этого семейства. (Ясно, что функция f_K сама ему принадлежит). Тогда множество $f_K^{-1}([0,+\infty))$ назовем λ-выпуклой оболочкой множества K, а (очевидно, единственную) точку максимума f_K — душой этой оболочки.

Лемма о строго выпуклой оболочке. *Существует зависящая только от λ и от M (точнее, от объема и нижней грани кривизны пространства M) константа $\varepsilon > 0$ такая, что любой компакт K диаметра $d < \varepsilon$ обладает λ-выпуклой оболочкой диаметра не более $\varepsilon^{-1}d$.* (Доказательство см. в п. 4.5).

4.4. Теперь доказательство предложения 4.2 можно закончить следующим образом. Возьмем вблизи p точку x, направление на которую очень близко к ω, и заметим, что диаметр $\operatorname{diam}(\Gamma\cdot x) = o(|px|)$. Поэтому направление кратчайшей $p\overline{x}$, где $\overline{x}$— душа λ-выпуклой оболочки $\Gamma\cdot x$, тоже будет близко к ω, следовательно, $|s\overline{x}| < |sp|$. Но, с другой стороны, $\overline{x}$, очевидно, неподвижная точка для Γ, а это противоречит тому, что $|sF| = |sp|$. Доказательство предложения 4.2 закончено. •

4.5. Доказательство леммы 4.3. Предположим, что такого $\varepsilon > 0$ не существует. Тогда найдется последовательность чисел $\varepsilon_i \to 0$ и компактов K_i с $\operatorname{diam} K_i = d_i < \varepsilon_i$, не имеющих λ-выпуклой оболочки диаметра $\leqslant \varepsilon_i^{-1}d_i$. Иначе говоря, компакты $\widetilde{K}_i = d_i^{-1}K_i$ диаметра 1 в $\widetilde{M}_i = d_i^{-1}M$ не имеют λd_i-выпуклой оболочки диаметра $\leqslant \varepsilon_i^{-1}$. Выберем в каждом $\widetilde{K}_i$ по точке $\widetilde{p}_i$ и рассмотрим предел по Громову–Хаусдорфу $(\overline{M},\overline{p})$ пространств $(\widetilde{M}_i,\widetilde{p}_i)$ вдоль некоторой подпоследовательности значений i. Ясно, что $\overline{M}$-мерное полное некомпактное пространство Александрова неотрицательной кривизны и его предельное множество $L\overline{M}$ $(n-1)$-мерно.

Зафиксируем малое число $\delta > 0$ и выберем на предельном множестве максимальную сеть точек l_α с попарными расстояниями $\geqslant \delta$. Мы будем считать, что этим точкам соответствуют лучи с началом $\overline{p}$ и функции Буземана b_α. Так как соответствующим образом нормированные сферы $R^{-1}S_{\overline{p}}(R)$ сходятся по Громову–Хаусдорфу к $L\overline{M}$, то найдутся такие $c > 0$ и $R > 0$, что каждой точке $x \in S_{\overline{p}}(\overline{R})$ можно поставить в соответствие множество $\mathcal{A}_x$ из по меньшей мере $c\delta^{1-n}$ значений α таких, что $b_\alpha(p) \geqslant b_\alpha(x) + \overline{R}/2$. Теперь мы можем

найти такое $R > 100\overline{R}$, что для соответствующих дистанционных функций точек $q_\alpha = r_\alpha \cap S_p(\widehat{R})$ выполнены аналогичные неравенства $|q_\alpha p| \geqslant |q_\alpha x| + \overline{R}/3$. Определим функцию h_x, полагая

$$h_x = (\#\mathcal{A}_x)^{-1} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_x} \varphi(\operatorname{dist}(q_\alpha)),$$

где φ определена условиями

$$\varphi'(t) = 1 \quad \text{при} \quad t \leqslant \widehat{R} - 2\overline{R},$$
$$\varphi'(t) = 1/2 \quad \text{при} \quad t \geqslant \widehat{R} + 2\overline{R},$$
$$\varphi''(t) = -\frac{1}{8\overline{R}} \quad \text{при} \quad \widehat{R} - 2\overline{R} < t < \widehat{R} + 2\overline{R}.$$

Тогда функция h_x 1-липшицева и $\overline{\lambda}$-вогнута в $B_p(2\overline{R})$ для некоторого $\overline{\lambda} > 0$, зависящего от c, $\overline{R}$, $\widehat{R}$, но не от x ($\overline{\lambda}$-вогнутость функции h_x доказывается так же, как лемма 3.6 из [6]). Кроме того, очевидно $h_x(p) \geqslant h_x(x) + \overline{R}/6$. Если теперь конструкцию функций h_x перенести в $\widetilde{M}$ (т.е. выбрать там точки, соответствующие точкам q_α по хаусдорфовой аппроксимации и использовать то же представление через дистанционные функции, что и для h_x), то полученные функции будут обладать аналогичными свойствами ($\overline{\lambda}$-вогнутость придется проверять заново, но эта проверка полностью аналогична доказательству леммы 3.6 из [6]).

Поэтому при достаточно больших i компакт K_i может быть „отделен“ от каждой точки $x \in S_p(\overline{R})$ при помощи $\overline{\lambda}$-вогнутой в шаре $B_{\widetilde{p}_i}(2\overline{R})$ 1-липшицевой функции. Таким образом, при достаточно больших i компакт $\widetilde{K}_i$ обладает λd_i-выпуклой оболочкой, лежащей в $B_{\widetilde{p}_i}(\overline{R})$, что противоречит сделанным предположениям. •

§5. Обобщенная теорема Либермана

5.1. Напомним, что если точки a, b, c лежат на кратчайшей в указанном порядке, то для произвольной точки p имеет место неравенство $|pb| \geqslant |\widetilde{pb}|$, где $\widetilde{b}$ — точка на стороне треугольника сравнения $\widetilde{pac}$, соответствующая b. Это неравенство может быть выражено аналитически в терминах функции $f = \operatorname{dist}(p)$. Для неотрицательной кривизны это соотношение выглядит следующим образом:

$$|ab|\big(f^2(c) - f^2(b)\big) - |bc|\big(f^2(b) - f^2(a)\big) \leqslant \big(|ab| + |bc|\big)|ab||bc|. \tag{5.1}$$

Такое же соотношение выполняется и для точек a, b, c, лежащих на геодезической (т.е. локально кратчайшей), если $|ab|$ и $|bc|$ заменить на $\overset{\smile}{|ab|}$ и $\overset{\smile}{|bc|}$ — длины соответствующих дуг геодезической. Поэтому естественным является следующее

Определение. Спрямляемая кривая γ в M называется *квазигеодезической*, если для любых a, b, c, лежащих на γ в указанном порядке, и любой точки $p \in M$ выполняется неравенство (5.1) с заменой расстояний $|ab|$ и $|bc|$ на длины $\overset{\smile}{|ab|}$ и $\overset{\smile}{|bc|}$ кривой γ.

Равносильное определение, выраженное в геометрических терминах, дано в упомянутой во Введении дипломной работе [Пет]; там же доказаны некоторые свойства квазигеодезических.

Следующая теорема 5.2 является основным шагом в доказательстве обобщенной теоремы Либермана 5.3.

5.2. Теорема. *Пусть $F \subset M$ — экстремальное подмножество, $p, q \in F$ — достаточно близкие точки. Тогда по крайней мере одна из кривых $\widetilde{pq}$, кратчайших во внутренней метрике F, является квазигеодезической в M.*

Доказательство. Для произвольного натурального m рассмотрим всевозможные ломаные $a_0a_1\dots a_m$ с $a_i \in F$, $a_0 = p$, $a_m = q$ и выберем из них ту, для которой величина

$$S = m\sum_{i=0}^{m-1} |a_ia_{i+1}|^2$$

минимальна. Заметим, что предельные (при $m \to \infty$) кривые для таких экстремальных ломаных — это кратчайшие $\widetilde{pq}$ в F, и S стремится к $|\widetilde{pq}|^2$. (В самом деле, с одной стороны, рассматривая ломаные с вершинами a_i, делящими некоторую кратчайшую $\widetilde{pq}$ на равные части, мы видим, что для экстремальной ломаной $S \leqslant |\widetilde{pq}|^2$. В частности, для экстремальных ломаных $\max_{0\leqslant i\leqslant m-1} |a_ia_{i+1}| \to 0$ при $m \to \infty$, и, значит, предельные кривые лежат на F. С другой стороны, по неравенству Шварца, $\sum_{i=0}^{m-1} |a_ia_{i+1}| \leqslant S$, поэтому предельная кривая имеет длину не более $\lim_{m\to\infty}\sqrt{S} \leqslant |\widetilde{pq}|$, т.е. она является кратчайшей). Заметим еще, что длины звеньев экстремальных ломаных приближаются к своему среднему значению. Точнее, пусть $|a_ia_{i+1}| = \alpha_i + |\widetilde{pq}|/m$. Тогда так как $\sum_{i=0}^{m-1} |a_ia_{i+1}| \to |\widetilde{pq}|$, то $\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i \to 0$, а так как

$$S = |\widetilde{pq}|^2 + 2|\widetilde{pq}|\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i + \sum_{i=0}^{m-1} m\alpha_i^2 \to |\widetilde{pq}|^2,$$

то получаем

$$\sum_{i=0}^{m-1} m\alpha_i^2 \to 0, \tag{5.2}$$

и по неравенству Шварца

$$\sum_{i=0}^{m-1} |\alpha_i| \to 0. \tag{5.3}$$

Чтобы проверить условие квазигеодезичности для предельной кратчайшей $\widetilde{pq}$, установим похожее условие для приближающих ее экстремальных ломаных $a_0a_1\dots a_m$ и затем перейдем к пределу. Пусть $r \in M \setminus F$ — произвольная точка. Из экстремальности ломаной $a_0a_1\dots a_m$, экстремальности множества F и следствия 1.6 (примененного к $f = S$) следует, что для любого направления $\xi \in \Sigma_{a_i}$ выполняется неравенство

$$|a_{i-1}a_i| \cdot \cos|a'_{i-1}\xi| + |a_ia_{i+1}| \cdot \cos|a'_{i+1}\xi| \geqslant 0.$$

В частности, это верно для $\xi \in r' \subset \Sigma_{a_i}$, откуда по теореме сравнения получаем неравенство

$$\Delta_{i+1} \dot{-} \Delta_i \leqslant |a_{i-1}a_i|^2 + |a_i a_{i+1}|^2, \quad \text{где} \quad \Delta_j = |ra_j|^2 - |ra_{j-1}|^2. \tag{5.4}$$

Зафиксируем три номера $i_1 < i_2 < i_3$ и сложим неравенства (5.4) специальным образом:

$$\begin{aligned}
&(i_2 - i_1)\big(|ra_{i_3}|^2 - |ra_{i_2}|^2\big) - (i_3 - i_2)\big(|ra_{i_2}|^2 - |ra_{i_1}|^2\big) \\
&\quad = (i_2 - i_1)\Big(\sum_{i=i_2+1}^{i_3} \Delta_i\Big) - (i_3 - i_2)\sum_{i=i_1+1}^{i_2} \Delta_i \\
&\quad = \sum_{i_2+1}^{i_3} \sum_{j=i_1+1}^{i_2} (\Delta_i - \Delta_j) \\
&\quad = \sum_{i=i_1+1}^{i_2-1} (\Delta_{i+1} - \Delta_i)(i_3 - i_2)(i - i_1) + \sum_{i=i_2}^{i_2-1} (\Delta_{i+1} - \Delta_i)(i_2 - i_1)(i_3 - i) \\
&\quad \leqslant (i_3 - i_2)\sum_{i=1}^{i_2-1} |a_i a_{i+1}|^2 (2i + 1 - 2i_1) + (i_2 - i_1)\sum_{i=i_2}^{i_3-1} |a_i a_{i+1}|^2 (2i_3 - 2i - 1).
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Пусть теперь $x_1, x_2, x_3 \in \overset{\smile}{pq}$ и $a_{i_1(m)}$, $a_{i_2(m)}$, $a_{i_3(m)}$ стремятся к x_1, x_2, x_3 соответственно. Тогда

$$\begin{aligned}
|x_1\overset{\smile}{x}_2| &= \lim_{m\to\infty} \sum_{i=i_1(m)}^{i_2(m)-1} |a_i a_{i+1}| \\
&= \lim_{m\to\infty} \Big(\frac{i_2(m) - i_1(m)}{m}\overset{\smile}{pq} + \sum_{i=i_1(m)}^{i_2(m)-1} \alpha_i\Big) \\
&\overset{(5.3)}{=} \lim_{m\to\infty} \frac{i_2(m) - i_1(m)}{m} |\overset{\smile}{pq}|.
\end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty} \sum_{i=i_1(m)}^{i_2(m)-1} |a_i a_{i+1}|^2 \big(2i + 1 - 2i_1(m)\big) \\
&\quad = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=i_1(m)}^{i_2(m)-1} \alpha_i^2 \big(2i + 1 - 2i_1(m)\big) \\
&\qquad + 2\sum_{i=i_1(m)}^{i_2(m)-1} \alpha_i \frac{2i + 1 - 2i_1(m)}{m} |\overset{\smile}{pq}| + \frac{|pq|^2}{m^2} \sum_{i=i_1(m)}^{i_2(m)-1} \big(2i + 1 - 2i_1(m)\big) \\
&\quad \overset{(5.2,\,5.3)}{=} |\overset{\smile}{pq}|^2 \cdot \frac{(i_2 - i_1)^2}{m^2}.
\end{aligned}$$

Поэтому переходя в (5.5) к пределу (после деления на m и умножения на $|\widetilde{pq}|$), получаем неравенство

$$|x_1\widetilde{x}_2|(|rx_3|^2-|rx_2|^2)-|x_2\widetilde{x}_3|(|rx_2|^2-|rx_1|^2)$$
$$\leqslant |x_1\widetilde{x}_2||x_2\widetilde{x}_3|^2+|x_2\widetilde{x}_3||x_1\widetilde{x}_2|^2,$$

а это и есть условие квазигеодезичности (для случая неотрицательной кривизны), записанное аналитически. Теорема 5.2 доказана. •

5.3. Обобщенная теорема Либермана. *Любая кратчайшая $\widetilde{pq}$ во внутренней метрике экстремального подмножества $F\subset M$ является квазигеодезической для M.*

Доказательство. Разобьем $\widetilde{pq}$ на N равных частей точками $p=p_0,p_1,p_2,\dots,p_N=q$. Согласно теореме 5.2, существуют кратчайшие $p_i\widetilde{p_{i+1}}$ во внутренней метрике F, которые являются квазигеодезическими для M. Ломаная $(\widetilde{pq})_N$, составленная из этих кратчайших $p_i\widetilde{p_{i+1}}$, тоже является кратчайшей во внутренней метрике F, и для того чтобы она являлась квазигеодезической, достаточно проверить свойство I из работы [Пет] (см. Введение) для точек p_i, т.е. условие, что направление входа в p_i является полярным к направлению выхода из p_i.

Отступим от p_i к p_{i+1} (соотв. к p_{i-1}) по $p_i\widetilde{p_{i+1}}$ (соотв. $p_i\widetilde{p_{i-1}}$) на $\varepsilon>0$ и обозначим полученную точку r_ε (соответственно s_ε). Из вышесказанного ясно, что существует кратчайшая $r_\varepsilon\widetilde{s}_\varepsilon$ в F, которая является квазигеодезической в M. Устремим $\varepsilon\to 0$ по некоторой последовательности ε_i и рассмотрим хаусдорфов предел пространств $(\varepsilon^{-1}M,p_i)$. Это есть конус K_{p_i} над пространством, и $r_\varepsilon\widetilde{s}_\varepsilon$ в пределе перейдут в квазигеодезическую $\widetilde{rs}$, ср. [Пет], §2, так как $\dim K_{p_i}=\dim M$.

Расстояние в конусе K от точки x до вершины K будем обозначать $|x|$. Тогда $|\widetilde{rs}|=|r|+|s|$, $|r|=|s|$.

Лемма. *Пусть $\gamma(t)$ — квазигеодезическая в конусе K. Тогда*

$$|\gamma(t)|^2=t^2+2kt+C$$

при некоторых k, C.

Доказательство. Утверждение леммы эквивалентно тому, что $\frac{d^2}{dt^2}|\gamma(t)|^2=2$. Неравенство $\big(|\gamma(t)|^2\big)''\leqslant 2$ следует из определения квазигеодезической, если в качестве p брать центр конуса K. Далее, применив определение квазигеодезической к „бесконечно удаленной“ точке в направлении $\gamma(t)$, получаем $\big(|\gamma(t)|^2\big)''\geqslant 2$, что и требовалось. •

При $K=K_{p_i}$ из леммы следует, что

$$s^2=|\widetilde{rs}|^2+k|\widetilde{rs}|+|r|^2,$$

откуда ввиду $s^2=r^2$ следует равенство

$$0=|\widetilde{rs}|^2+k|\widetilde{rs}|$$

т.е. $k = -|\widetilde{rs}|$. Значит, середина $\widetilde{rs}$ находится на расстоянии

$$|\widetilde{rs}|^2/4 - |\widetilde{rs}|^2/2 + |\widetilde{rs}|^2/4 = 0$$

от вершины конуса K_{pi}, т.е. совпадает с ней.

Отсюда ясно, что направление входа $(\widetilde{pq})_N$ в p_i полярно к направлению выхода из p_i и, значит, $(\widetilde{pq})_N$ квазигеодезическая. При $N \to \infty$ $(\widetilde{pq})_N \to \widetilde{pq}$ и отсюда $\widetilde{pq}$ квазигеодезическая. •

Теорема 5.3 допускает также доказательство, связанное с модификацией вариационной задачи из доказательства теоремы 5.2.

§6. Открытые вопросы

6.1. Верно ли, что внутренняя метрика примитивного экстремального подмножества имеет ограниченную снизу кривизну?

Пока это не доказано даже для внутренней метрики края.

6.2. Пусть M является пределом по Громову–Хаусдорфу полных пространств M_i с равномерно ограниченными снизу кривизнами, которые имеют фиксированную, но бóльшую, чем у M, размерность. Верно ли, что если M не имеет собственных экстремальных подмножеств, то хаусдорфовы аппроксимации $\varphi_i\colon M_i \to M$ можно (при больших i) приблизить локально тривиальными расслоениями $\overline{\varphi}_i\colon M_i \to M$? До сих пор это доказано только при условии, что M и M_i имеют лишь очень слабые особенности, с радиусами пространств направлений, близкими к π.

Список литературы

[1] Александров А. Д., *Квазигеодезические*, ДАН СССР **69**, № 6 (1949), 717–720.
[2] Александров А. Д., Бураго Ю. Д., *Квазигеодезические*, Тр. МИАН **66** (1965), 49–63.
[3] Бураго Ю. Д., Громов М., Перельман Г. Я., *Пространства А. Д. Александрова с ограниченными снизу кривизнами*, Успехи мат. наук **47**, № 2, 3–51.
[4] Либерман И. М., *Геодезические линии на выпуклых поверхностях*, ДАН СССР **32**, № 5 (1941), 310–313.
[5] Милка А. Д., *Многомерные пространства с многомерной метрикой неотрицательной кривизны*, Укр. геом. сб., № 7 (1970), 68–77.
[6] Перельман Г. Я., *Начала теории Морса на пространствах Александрова*, Алгебра и анализ **5**, № 1 (1993).

С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН
191011, Санкт-Петербург, наб. Фонтанки, 27

Поступило
25 сентября 1992 г.