А. Л. Вольберг, Ф. Л. Назаров, Тепловое расширение оператора Бёрлинга и оценки его нормы, *Алгебра и анализ*, 2003, том 15, выпуск 4, 142–158

Алгебра и анализ
Том 15 (2003), вып. 4

ТЕПЛОВОЕ РАСШИРЕНИЕ ОПЕРАТОРА БЁРЛИНГА И ОЦЕНКИ ЕГО НОРМЫ

© А. Вольберг, Ф. Назаров

В этой работе получена новая оценка нормы преобразования Бёрлинга $T\varphi(z) := \frac{1}{\pi}\int\int \frac{\varphi(\zeta)dA(\zeta)}{(\zeta-z)^2}$ в $L^p(dA)$. А именно, доказывается, что $\|T\|_{L^p\to L^p} \leqslant 2(p-1)$ для всех $p \geqslant 2$. Применяется метод функции Беллмана; однако точную функцию Беллмана задачи найти не удалось. Вместо нее используется некоторая аппроксимация функции Беллмана, дающая справа коэффициент, равный 2 (вместо предполагавшейся единицы).

§0. Введение

Обозначения.

- $:=$ означает равенство по определению;
- $x := (x_1, x_2)$;
- $D(x,R)$ — круг радиуса R с центром в точке x;
- $k(x,t) := \frac{1}{4\pi t}e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}$ является ядром оператора теплопроводности на плоскости;
- $\mathcal{D}$ — это совокупность диадических интервалов.

Основные понятия и результаты. Основным предметом данной статьи является оператор Бёрлинга, задаваемый следующей формулой:

$$T\varphi(z) := -\frac{1}{\pi}\int\int \frac{\varphi(\zeta)dA(\zeta)}{(\zeta-z)^2}.$$

Здесь dA — плоская мера Лебега на $\mathbb{C}$. Цель статьи состоит в получении новой оценки нормы оператора T. Эта оценка все же не дотягивает до широко известной гипотезы, утверждающей, что

$$\|T\|_{L^p\to L^p} = p-1, \quad p \geqslant 2. \tag{0.1}$$

В данной работе показано, что $\|T\|_{L^p\to L^p} \leqslant 2(p-1)$ для всех $p \geqslant 2$, что в два раза хуже, чем (0.1). Однако это в два раза лучше предыдущей оценки

$\|T\|_{L^p \to L^p} \leqslant 4(p-1)$, установленной в работе [3]. После того как была опубликована первая препринтная версия настоящей работы, Родриго Банюэлос и Педро Мендес-Хернандес [9] сообщили нам, что им также удалось улучшить оценку с 4 до 2 при помощи модификации методов, опубликованных в работе [3].

В действительности у этой задачи длинная история, и она многократно обсуждалась в статьях по регулярности квазиконформных гомеоморфизмов и квазирегулярных отображений. По существу L^p-теория квазирегулярных отображений началась с исследований Б. Боярского, представленных в [5–6]. Впоследствии эта тема стала объектом активных исследований. В частности, во многих работах обсуждались наилучшая интегрируемость K-квазиконформных отображений и (в некотором смысле двойственная, см. [28]) задача минимальной регулярности квазирегулярных отображений. Упомянем здесь работы [18, 15–17, 19, 22, 23, 24, 27, 28]. В конце концов неулучшаемый результат по интегрируемости был получен в [2]. Неулучшаемый результат по минимальной регулярности был недавно получен в [30]. В настоящей статье метод из работы [30] будет использован для доказательства неравенства

$$\|T\|_{L^p \to L^p} \leqslant 2(p-1), \quad p \geqslant 2. \tag{0.2}$$

С помощью этого же метода можно показать, что

$$\left\| \left(\sum_{j,k=1}^{2} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leqslant \sqrt{2}\, p \|\Delta f\|_p, \quad f \in W_2^p, \ p \geqslant 2, \tag{0.3}$$

что лучше, чем в работе [24].

§1. Следствия из „$(p-1)$-оценки"

Сформулируем аналитические и геометрические следствия, которые имели бы место, если бы удалось избавиться от коэффициента 2 в формуле (0.2).

Рассмотрим решения (локальные) уравнения Бельтрами

$$f_{\bar z} - \mu f_z = 0. \tag{1.1}$$

Зададимся двумя вопросами:

1) Предположим, что $\|\mu\|_\infty = k < 1$. Если *a priori* решение находится локально в W_1^2, какова будет гарантированная гладкость этого локального

решения? Классический результат состоит в том, что функция f должна принадлежать $W_1^{2+\varepsilon(k)}$ локально, где $\varepsilon(k) > 0$. Вопрос о нахождении наилучшей константы $\varepsilon(k)$ был основным моментом в задаче Ф. Геринга, решенной К. Астала [2]. Наилучшее значение величины $\varepsilon(k)$ оказалось равным $\frac{1-k}{k}$. В общем случае это значение не достигается.

2) Предположим, что $\|\mu\|_\infty = k < 1$. Если *a priori* решение находится в W_1^q локально (теперь $q < 2$), каково наименьшее q, гарантирующее гладкость $f \in W_1^2$ локально (и тогда в соответствии с [2] гарантирующее $f \in W_1^{1+1/k-\tau}$ для любого положительного τ). Оказывается, что наименьшее q равно $1+k$. И это значение достигается [30].

Упомянутые два вопроса тесно связаны с оценкой (0.1). Объясним причину этой взаимосвязи. Рассмотрим уравнение (1.1) в окрестности W начала координат и положим $V = \frac{1}{2}W$. Пусть φ — C^∞-функция с носителем W и равная 1 на V. Положим $g := \varphi f_{\bar z}$ и рассмотрим функцию $f - \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{g(\zeta)}{z-\zeta} dA(\zeta)$. Здесь dA обозначает плоскую меру Лебега. Применение оператора $\bar\partial$ к последнему выражению (в смысле обобщенных функций) дает нуль на V. Таким образом, мы имеем аналитическую на V функцию h такую, что $f = h + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{g(\zeta)}{z-\zeta} dA(\zeta)$. Следовательно,

$$f_z = h' + Tg$$

на V. Если умножить уравнение (1.1) на φ, а затем воспользоваться обозначением $g := \varphi f_{\bar z}$ и предыдущим выражением для f_z, мы получим

$$g - \mu\varphi Tg = r := \mu\varphi h'$$

на V. На $U := \frac{1}{2}V$ функция r ограничена, и поэтому она лежит в любом пространстве $L^p(U, dA)$. Обозначим символом M оператор умножения на $\mu\varphi$ в $L^p(U, dA)$, $\|M\| \leqslant k$. Положим еще $t(p) := \|T\|_{L^p(U,dA)\to L^p(U,dA)}$ и рассмотрим равенство

$$(I - MT)g = r,$$

чтобы убедиться в том, что из неравенства

$$kt(p) < 1 \tag{1.2}$$

вытекает включение $g \in L^p$ на U. Последнее как раз и означает, что функция f локально принадлежит пространству W_1^p. Теперь понятно, что неравенство (0.1) означало бы, что для каждого p, подчиненного условию

$$p < 1 + \frac{1}{k},$$

обсуждаемое решение уравнения (1.1) локально лежит в $L^p(dA)$.

Приведенные выше соображения обеспечивают также *оценку снизу нормы оператора T в L^p*. Это рассуждение позаимствовано из работы [19]. Предположим, что $t(p)$ строго меньше, чем $p-1$. Используя неравенство (1.2) точно так же, как и выше, мы видим, что если $\|\mu\|_\infty = k < 1$, то любое решение уравнения (1.1), которое *a priori* локально находится в W_1^2, в действительности попадает в $W_1^{1+1/k+\varepsilon}$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Однако легко вычислить, что функция $f(z) := z|z|^{-\frac{2k}{1+k}}$ удовлетворяет уравнению (1.1) при $\mu(z) = -k\frac{z}{\bar z}$. Таким образом, L^∞-норма функции μ равна k. Однако функция f не принадлежит пространству $W_1^{1+1/k+\varepsilon}$ в окрестности нуля. Она не попадает даже в пространство $W_1^{1+1/k}$. Действительно, легко вычисляется, что $|f_z| = C(k)|z|^{-\frac{2k}{1+k}}$, и эта функция не принадлежит никакому $L^p(dA)$ при $p \geqslant 1 + 1/k$. Таким образом, $\|T\|_p \geqslant p - 1$.

Надеемся, что мы достаточно убедительно аргументировали свой интерес к оценке L^p-нормы такого специального мультипликатора Фурье, как T, и связанных с ним мультипликаторов, которые будут рассмотрены в этой работе.

§2. Тождество Литтлвуда—Пэли для тепловых продолжений

Для оператора Бёрлинга T можно написать тождество $T = R_1^2 - R_2^2 + 2iR_1R_2$, где R_i — плоские преобразования Рисса. Возьмем, например, R_1^2 и две комплекснозначные пробные функции $\varphi, \psi \in C_0^\infty$. Мы будем использовать тепловые продолжения. Для функции f, заданной на плоскости, тепловое продолжение дается формулой

$$f(y,t) := \frac{1}{4\pi t} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x) \exp\Big(-\frac{|x-y|^2}{4t}\Big)\, dx_1 dx_2, \qquad (y,t) \in \mathbb{R}^3_+.$$

Как правило, для обозначения функции и ее теплового продолжения будет использоваться одна и та же буква.

Лемма 2.1. *Пусть $\varphi, \psi \in C_0^\infty$. Тогда интеграл $\iiint \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\, dx_1 dx_2 dt$ сходится абсолютно и*

$$\iint R_1^2\varphi \cdot \psi \, dx_1 dx_2 = 2 \iiint \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\, dx_1 dx_2 dt. \tag{2.1}$$

Доказательство. В действительности доказательство этой леммы тривиально. Оно основывается на том, что функция является интегралом своей производной, и использует формулу Парсеваля. Рассмотрим комплекснозначные функции $\varphi, \psi \in C_0^\infty$ и напишем следующую цепочку равенств

$$\begin{aligned}
\iint \psi R_1^2 \varphi dx_1 dx_2 &= \iint \frac{\xi_1^2}{\xi_1^2+\xi_2^2}\hat{\varphi}(\xi_1,\xi_2)\hat{\psi}(-\xi_1,-\xi_2)d\xi_1 d\xi_2 \\
&= 2\iint \int_0^\infty e^{-2t(\xi_1^2+\xi_2^2)}\xi_1^2\hat{\varphi}(\xi_1,\xi_2)\hat{\psi}(-\xi_1,-\xi_2)dt d\xi_1 d\xi_2 \\
&= -2\int_0^\infty \iint i\xi_1\hat{\varphi}(\xi_1,\xi_2)e^{-t(\xi_1^2+\xi_2^2)}\cdot i\xi_1\hat{\psi}(-\xi_1,-\xi_2)e^{-t(\xi_1^2+\xi_2^2)}d\xi_1 d\xi_2 dt \\
&= 2\int_0^\infty \iint \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x_1,x_2,t)\frac{\partial\psi}{\partial x_1}(x_1,x_2,t)dx_1 dx_2 dt \\
&= 2\iiint_{\mathbb{R}^3_+} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x_1,x_2,t)\frac{\partial\psi}{\partial x_1}(x_1,x_2,t)dx_1 dx_2 dt.
\end{aligned}$$

Мы дважды воспользовались формулой Парсеваля, а также абсолютной сходимостью интегралов

$$\iiint_{\mathbb{R}^3_+} e^{-2t(\xi_1^2+\xi_2^2)}\xi_1^2\hat{\varphi}(\xi_1,\xi_2)\hat{\psi}(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2 dt$$

и

$$\iiint_{\mathbb{R}^3_+} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x_1,x_2,t)\frac{\partial\psi}{\partial x_1}(x_1,x_2,t)dx_1 dx_2 dt.$$

Для первого интеграла это очевидно и просто доказывается для второго. Оставляем это доказательство читателю в качестве упражнения. •

§3. Доказательство неравенства (0.2) с использованием функции Беллмана

Предупредим читателя, что иногда будет удобно рассматривать $\mathbb{C}$ как $\mathbb{R}^2$, тогда абсолютное значение $|\cdot|$ — это норма вектора в $\mathbb{R}^2$, $\|\cdot\|$.

Пусть φ, ψ — комплекснозначные пробные функции из $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Обозначим их тепловые продолжения на $\mathbb{R}^3_+$ теми же буквами и воспользуемся леммой 2.1. Легко убедиться в том, что оценка комбинаций $\langle R_i^2\varphi, \psi\rangle$ сводится к оценке интегралов, возникающих в следующей теореме. Отметим также, что если через U_ρ обозначить оператор $U_\rho\varphi(z) := f(e^{i\rho}z)$, то $2R_1R_2 = U^*_{\pi/4}(R_1^2 - R_2^2)U_{\pi/4}$. Поэтому доказательство неравенства (0.2) немедленно следует из теоремы 3.1 и леммы 2.1.

Теорема 3.1. *Для любых комплекснозначных функций $\varphi, \psi \in C_0^\infty$ справедливо неравенство*

$$2\iiint\limits_{\mathbb{R}^3_+} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right| \left|\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right| dx_1\,dx_2\,dt + 2\iiint\limits_{\mathbb{R}^3_+} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right| \left|\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right| dx_1\,dx_2\,dt \leqslant (p-1)\|\varphi\|_p\|\psi\|_q.$$

В частности,

$$\|R_1^2 - R_2^2\|_p \leqslant p-1, \quad \|2R_1R_2\|_p \leqslant p-1 \quad \text{для всех } p,\ 2\leqslant p<\infty.$$

В доказательстве теоремы 3.1 нами используется следующий ключевой результат. (Далее, символом $d^2 f$ обозначен гессиан, т.е. вторая дифференциальная форма функции f.)

Теорема 3.2. *Для любого $p \geqslant 2$ определим область $D_p := \{0 < (X, Y, \xi, \eta) \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 : \|\xi\|^p < X,\ \|\eta\|^q < Y\}$. Пусть K — произвольное компактное подмножество области D_p и пусть ε — произвольное положительное число. Тогда существует функция $B = B_{\varepsilon,p,K}(X, Y, x, y)$, бесконечно дифференцируемая в достаточно малой окрестности множества K и такая, что*

$$\begin{aligned} &1)\quad 0 \leqslant B \leqslant (1+\varepsilon)(p-1)X^{1/p}Y^{1/q},\\ &2)\quad -d^2B \geqslant 2\|d\xi\|\|d\eta\|. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 3.2 будет приведено позднее. А сейчас воспользуемся ею для доказательства теоремы 3.1.

Доказательство. Рассмотрим две функции $\varphi, \psi \in C_0^\infty$ и возьмем $B = B_{\varepsilon,p,K}$, где компакт K будет выбран позднее.

Рассмотрим функцию

$$b(x,t) := B(|\varphi|^p(x,t), |\psi|^q(x,t), \varphi(x,t), \psi(x,t)).$$

Эта функция корректно определена, поскольку неравенство Коши гарантирует, что четырехкомпонентный вектор v,

$$v := (|\varphi|^p(x,t), |\psi|^q(x,t), \varphi(x,t), \psi(x,t)),$$

лежит в D_p для любой точки $(x,t) \in \mathbb{R}^3_+$. Кроме того, выбирая любое компактное подмножество M открытого множества $\mathbb{R}^3_+$, можно гарантировать, что для $(x,t) \in M$ вектор v лежит в некотором компактном множестве K. Действительно, для функций φ, ψ с компактным носителем отображение $(x,t) \mapsto v(x,t)$ переводит компактные множества из $\mathbb{R}^3_+$ в компактные множества в D_p. Теперь просто возьмем достаточно большое K, соответствующее некоторому множеству M, которое будет пробегать (в наших последующих рассуждениях) исчерпывающее семейство компактных множеств в $\mathbb{R}^3_+$.

Мы намереваемся применить к функции $b(x,t)$ формулу Грина. Для этого введем функцию Грина $G(x,t)$, как это сделано в работе [13]. Взяв достаточно большой цилиндр $\Omega := \Omega_l := D(0,l) \times (0,l)$, положим $\partial'\Omega = \partial D(0,l) \times (0,l)$ и рассмотрим следующую функцию Грина:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \Delta\right) G_\Omega = -\delta_{0,1} & \text{в } \Omega, \\ G_\Omega = 0 & \text{на } \partial'\Omega, \\ G_\Omega = 0 & \text{при } t = l. \end{cases}$$

Здесь $\delta_{0,1}$ — это δ-функция, сосредоточенная в точке $(0,1)$.

Пусть $k(x,t) := \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}$ — ядро оператора теплопроводности в $\mathbb{R}^3_+$. Величину $k(0,t)$ можно трактовать как значение температуры на плоскости в точке $(0,0)$ в момент времени $t > 0$, если изначально (при $t = 0$) распределение температуры было дельтообразным, с особенностью в точке $(0,0)$. Важно иметь в виду, что

$$G_\Omega(0,0) \to k(0,1) \quad \text{при } l \to \infty. \tag{3.1}$$

Действительно, достаточно приведенную трактовку величины $k(0,1)$ сравнить с тем, что $G_\Omega(0,0)$ представляет собой температуру в момент времени 1 при задании того же самого исходного распределения, но при условии, что температура на границе $\partial'\Omega_l$ поддерживается равной 0. Однако если l велико, очевидно, что эти две величины очень близки.

Кроме этого нам нужна функция Грина в цилиндре $\Omega(R,R^2) = D(0,lR) \times (0,lR^2)$:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \Delta\right) G^R_\Omega = -\delta_{0,R^2} & \text{в } \Omega(R,R^2) = D(0,lR) \times (0,lR^2), \\ G^R_\Omega = 0 & \text{на } \partial'\Omega(R,R^2) = \partial D(0,lR) \times (0,lR^2), \\ G^R_\Omega = 0 & \text{при } t = lR^2. \end{cases}$$

Легко получить следующее утверждение.

Лемма 3.3. $G^R_\Omega(x,t) = \frac{1}{R^2} G_\Omega(x/R, t/R^2)$.

Теперь все готово для применения формулы Грина к функции $b(x,t)$. Сначала получим оценку для $b(0,R^2) = B(|\varphi|^p(0,R^2), \cdots, \psi(0,R^2))$. Воспользовавшись первым свойством функции B из теоремы 3.2, мы получаем (как всегда $x = (x_1, x_2)$ и $1/p + 1/q = 1$):

$$b(0,R^2) \leqslant (1+\varepsilon)(p-1)(|\varphi|^p(0,R^2))^{1/p}(|\psi|^q(0,R^2))^{1/q}.$$

Таким образом,

$$b(0,R^2) \leqslant (1+\varepsilon)(p-1)\left(\frac{1}{4\pi R^2}\iint |\varphi|^p(x)e^{-\frac{|x|^2}{4R^2}}\right)^{1/p}\left(\frac{1}{4\pi R^2}\iint |\psi|^q(x)e^{-\frac{|x|^2}{4R^2}}\right)^{1/q}.$$

Теперь положим $M := \operatorname{clos}\Omega(R,R^2) \cap \{t \geqslant \delta\}$ и применим формулу Грина в области $\Omega(R,R^2)$:

$$\begin{aligned}
b(0,R^2) &= -\iiint_M b(x,t)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\right) G^R_\Omega(x,t)\,dx_1dx_2dt \\
&= \iiint_M G^R_\Omega(x,t)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) b(x,t)\,dx_1dx_2dt \\
&\quad + \iint_{D(0,lR)} b(x,\delta)G^R_\Omega(x,\delta)\,dx_1dx_2 \\
&\quad + \iint_{\partial'\Omega(R,R^2)\cap\{t>\delta\}} \left(\frac{\partial b}{\partial n_{\mathrm{outer}}}G^R_\Omega - \frac{\partial G^R_\Omega}{\partial n_{\mathrm{outer}}} b\right) dsdt \\
&= \iiint_M G^R_\Omega(x,t)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) b(x,t)\,dx_1dx_2dt \\
&\quad + \iint_{D(0,lR)} b(x,\delta)G^R_\Omega(x,\delta)dx_1dx_2 + \iint_{\partial'\Omega(R,R^2)\cap\{t>\delta\}} \frac{\partial G^R_\Omega}{\partial n_{\mathrm{inner}}} b\,dsdt \\
&\geqslant \iiint_M G^R_\Omega(x,t)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) b(x,t)\,dx_1dx_2dt.
\end{aligned}$$

Последнее неравенство очевидно: оба двойных интеграла являются неотрицательными, поскольку функция b неотрицательна, а функция G^R_Ω неотрицательна и равна нулю на боковой границе. Объединим оценки для $b(0,R^2)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\iiint_M G^R_\Omega(x,t)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) b(x,t) \\
&\quad \leqslant \frac{(1+\varepsilon)(p-1)}{4\pi R^2}\left(\iint |\varphi|^p(x)e^{-\frac{|x|^2}{4R^2}}\right)^{1/p}\left(\iint |\psi|^q(x)e^{-\frac{|x|^2}{4R^2}}\right)^{1/q}. \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Зафиксируем R и $\delta > 0$ и возьмем определенное выше компактное множество M. Векторнозначная функция v отображает M на компактное подмножество области D_p. Обозначим это компактное подмножество через K и возьмем $B = B_{\varepsilon,p,K}$, как в теореме 3.2.

Следующее несложное вычисление является ключевым для доказательства. Здесь

$$v = (|\varphi|^p(x,t), |\psi|^q(x,t), \varphi(x,t), \psi(x,t)).$$

Лемма 3.4. *Если* $(x,t) \in M$, *то*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) b(x,t) = \left((-d^2B)\,\frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_1}\right)_{\mathbb{R}^6} + \left((-d^2B)\,\frac{\partial v}{\partial x_2}, \frac{\partial v}{\partial x_2}\right)_{\mathbb{R}^6}.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} b &= (\nabla B, \frac{\partial v}{\partial t})_{\mathbb{R}^6},\\
\Delta b &= \left((d^2B)\frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_1}\right)_{\mathbb{R}^6} + \left((d^2B)\frac{\partial v}{\partial x_2}, \frac{\partial v}{\partial x_2}\right)_{\mathbb{R}^6} + (\nabla B, \Delta v)_{\mathbb{R}^6}.
\end{aligned}$$

(Мы просто воспользовались правилом дифференцирования суперпозиции.) Теперь

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) b = (\nabla B, \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v)_{\mathbb{R}^6} - \left((d^2B)\frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_1}\right)_{\mathbb{R}^6} - \left((d^2B)\frac{\partial v}{\partial x_2}, \frac{\partial v}{\partial x_2}\right)_{\mathbb{R}^6}.$$

Однако первый член равен нулю, поскольку все компоненты вектора v являются решениями уравнения теплопроводности. •

По теореме 3.2 на компакте M выполняется неравенство

$$-d^2B(X, Y, \xi, \eta) \geqslant 2\|d\xi\|\|d\eta\|. \tag{3.3}$$

Для $(x,t) \in M$ лемма 3.4 дает

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) b(x,t) \geqslant 2\left(\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right|\left|\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right|\left|\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right|\right). \tag{3.4}$$

Объединяя (3.2) и (3.4), получаем

$$2\iiint_M G^R_\Omega(x,t)\left(\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right|\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right|+\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right|\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right|\right)$$
$$\leqslant \frac{(1+\varepsilon)(p-1)}{4\pi R^2}\left(\iint|\varphi|^p(x)\right)^{1/p}\left(\iint|\psi|^q(x)\right)^{1/q}. \qquad (3.5)$$

Теперь настал момент воспользоваться леммой 3.3. Итак, неравенство (3.5) означает, что

$$2\iiint_M G_\Omega\left(\frac{x}{R},\frac{t}{R^2}\right)\left(\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right|\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right|+\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right|\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right|\right)$$
$$\leqslant \frac{(1+\varepsilon)(p-1)}{4\pi}\left(\iint|\varphi|^p(x)\right)^{1/p}\left(\iint|\psi|^q(x)\right)^{1/q}. \qquad (3.6)$$

Но $M=\{(x,t): x\in \operatorname{clos}(D(0,lR)),\ \delta\leqslant t\leqslant lR^2\}$. Зафиксируем произвольное компактное в $\mathbb{R}^3_+$ множество M_0 и выберем R и $\delta>0$ таким образом, чтобы $M_0\subset M$. Далее, ограничимся в формуле (3, 6) интегрированием по M_0 и перейдем к пределу при $R\to\infty$. Принимая во внимание, что

$$G_\Omega(x/R,t/R^2)\to G_\Omega(0,0),$$

получаем

$$2G_{\Omega_l}(0,0)\iiint_{M_0}\left(\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right|\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right|+\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right|\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right|\right)$$
$$\leqslant \frac{(1+\varepsilon)(p-1)}{4\pi}\left(\iint|\varphi|^p(x)\right)^{1/p}\left(\iint|\psi|^q(x)\right)^{1/q}. \qquad (3.7)$$

Теперь нужно расширить область $\Omega=\Omega_l$ до пространства $\mathbb{R}^3_+$, устремляя l к бесконечности. Соотношение (3.1) дает $G_{\Omega_l}(0,0)\to\frac{1}{4\pi}$. Таким образом, неравенство (3.7) превращается в

$$2\iiint_{M_0}\left(\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right|\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right|+\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right|\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right|\right)$$
$$\leqslant (1+\varepsilon)(p-1)\left(\iint|\varphi|^p(x)\right)^{1/p}\left(\iint|\psi|^q(x)\right)^{1/q}. \qquad (3.8)$$

Но M_0 является произвольным компактным множеством в верхнем полупространстве, а ε — произвольно малым положительным числом. Следовательно,

$$2\iiint_{\mathbb{R}^3_+}\left(\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right|\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right|+\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right|\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right|\right) \\ \leqslant (p-1)\Big(\iint|\varphi|^p(x)\Big)^{1/p}\Big(\iint|\psi|^q(x)\Big)^{1/q}. \tag{3.9}$$

Это доказывает теорему 3.1. •

§4. Существование функции Беллмана. Доказательство теоремы 3.2

Начнем с простого „модельного“ оператора T_σ. Чтобы определить его, обозначим символом $\mathcal{D}$ семейство диадических интервалов на прямой. Каждому интервалу $I\in\mathcal{D}$ сопоставим соответствующую функцию Хаара: $h_I=1/\sqrt{|I|}$ на I_+ и $h_I=-1/\sqrt{|I|}$ на I_-, где I_+ и I_- — соответственно левая и правая половины интервала I. Каждая хорошая комплекснозначная функция (непрерывная с компактным носителем на одном из интервалов I, например на $[0,1]$, и со средним, равным нулю) может быть записана в виде своего ряда Хаара: $f=\sum_I(f,h_I)h_I$. Рассмотрим оператор $T_\sigma f=\sum_I\sigma_I(f,h_I)h_I$, где σ_I — произвольная последовательность комплексных чисел, по модулю равных 1. Мы используем обозначение $\langle f\rangle_I$ для величины $\frac{1}{|I|}\int_I f\,dx$.

Будем действовать по следующей схеме. Мы хотим получить точную оценку нормы оператора $\|T_\sigma\|_{L^p\to L^p}$ как функцию от p. Эта задача была решена Буркхольдером. В работе [10] он доказал, что при $p\geqslant 2$ справедливо неравенство

$$\sup_\sigma\|T_\sigma\|_p\leqslant p-1. \tag{4.1}$$

Буркхольдер получил неравенство (4.1) с помощью построения специальной функции двух вещественных переменных (фактически другой функции Беллмана), обладающей некоторой выпуклостью и удовлетворяющей определенным ограничениям на рост. Желающие изучить этот подход могут найти его описание в работах Буркхольдера [10, 11] или книге Д. Струка [32]. В частности, в книге [32] на с. 344 по поводу неравенства (4.1) написано следующее: „Совсем недавно Буркхольдер нашел *правильную логическую конструкцию*: она совершенно элементарна. К сожалению, она и абсолютно непрозрачна. Действительно, его рассуждения — попросту элементарная проверка правильности ответа; в них нет ни малейших намеков на то, как именно был найден этот ответ“. Далее „для тех, кто хочет ознакомиться с секретом его доказательства, Буркхольдер представил объяснения в своей статье“ [10]. Вот функция Буркхольдера ($p \geqslant 2$):

$$b(x, y) = (|x| - (p-1)|y|)(|x| + |y|)^{p-1}.$$

В действительности с помощью схемы Беллмана оптимального управления стохастическим дифференциальным уравнением легко объясняется способ получения этой функции, и это было сделано, например, в работе [33].

В нашей задаче мы хотели бы воспользоваться функцией Беллмана, сконструированной Буркхольдером. Но мы не в состоянии этого сделать. Причина проста. Переменными в функции Буркхольдера являются некоторые мартингалы, которые в его случае являются взаимосвязанными: один является подчиненным по отношению к другому. В нашем случае мы заменим эти переменные не мартингалами, а функциями: одна из них — $R_1^2\varphi$, а вторая — φ, где φ — пробная функция. В этом случае нет никакой подчиненности. Между этими двумя функциями существует только следующая дифференциальная связь (на самом деле между их тепловыми продолжениями):

$$\frac{\partial}{\partial t} R_1^2 \varphi = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \varphi.$$

Это дифференциальное тождество второго порядка, и, как таковое, оно не связано со свойством подчиненности, которое так существенно взаимодействует с очень специальным свойством выпуклости функции Буркхольдера [10]. Оно имело бы отношение к свойству подчиненности (и вследствие этого к выпуклости), если бы оно было дифференциальным тождеством первого порядка. То, что мы имеем в виду, можно проиллюстрировать следующим крайне упрощенным примером. Очевидно, что композиция выпуклой функции a с линейной функцией l является выпуклой, но композиция выпуклой функции a и выпуклой функции l может оказаться уже невыпуклой. ($a(x) = e^{-x}$, $l(x) = x^2$). Это как раз и является препятствием для использования функции Буркхольдера, для подстановки в нее нашего преобразования Рисса второго порядка.

Мы не видим путей для преодоления этой трудности и предпочитаем другой подход. Этот подход является развитием метода из работы [30].

Идея: перепишем неравенство Буркхольдера в эквивалентной форме (просто в двойственном виде). Получающееся в результате неравенство порождает другую функцию Беллмана. Это будет наша функция B из теоремы 3.2.

Как уже было сказано, мы будем использовать следующую лемму Буркхольдера.

Лемма 4.1. *Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Пусть (X_n, F_n, P) и (Y_n, F_n, P) — H-значные мартингалы. Если для почти всех ω и любом n выполняются неравенства*

$$\|X_0(\omega)\|_H \leqslant \|Y_0(\omega)\|_H, \quad \|X_n(\omega) - X_{n-1}(\omega)\|_H \leqslant \|Y_n(\omega) - Y_{n-1}(\omega)\|_H,$$

то для любого p, $p \in (1, \infty)$, справедлива оценка

$$\|X_n\|_{L^p(P,H)} \leqslant \max(p-1, 1/(p-1))\|Y_n\|_{L^p(P,H)}.$$

Из этой леммы мы можем с легкостью вывести следующую теорему.

Теорема 4.2. *Предположим, что $J \in \mathcal{D}$, $f \in L^p(J)$ и $g \in L^{p'}(J)$, $1/p + 1/p' = 1$. Пусть $p \geqslant 2$. Тогда*

$$\frac{1}{4}\frac{1}{|J|}\sum_{I \in \mathcal{D},\, I \subset J} |\langle f\rangle_{I_+} - \langle f\rangle_{I_-}||\langle g\rangle_{I_+} - \langle g\rangle_{I_-}||I| \leqslant (p-1)\langle |f|^p\rangle_J^{1/p}\langle |g|^{p'}\rangle_J^{1/p'}.$$

Доказательство. Без потери общности можно взять $J = [0,1]$. Пусть F_n — σ-алгебра, порожденная всеми диадическими интервалами, содержащимися в J, длина которых не меньше, чем 2^{-n}. Считая $\omega \in [0,1]$, положим

$$Y_n(\omega) := \sum_{I \subset J, |I| \geqslant 2^{-n}} (f, h_I) h_I(\omega).$$

Возьмем любую последовательность комплексных чисел $\sigma_I = e^{i\alpha_I}$, $\alpha_I \in \mathbb{R}$, и рассмотрим

$$X_n(\omega) := \sum_{I \subset J, |I| \geqslant 2^{-n}} \sigma_I (f, h_I) h_I(\omega).$$

и (X_n, F_n, dx), и (Y_n, F_n, dx) являются мартингалами. Ясно, что $Y_n - Y_{n-1} = \sum_{I\subset J, |I|=2^{-n}}(f, h_I)h_I$, а также $X_n - X_{n-1} := \sum_{I\subset J,|I|=2^{-n}} \sigma_I(f, h_I)h_I$. Эти мартингалы удовлетворяют условиям леммы Буркхольдера. Гильбертово пространство $H = \mathbb{R}^2$ естественным образом отождествляется с $\mathbb{C}$. Теперь $\|f\|_{L^p} = \lim_{n\to\infty} \|Y_n\|_{L^p(H)}$, $\|T_\sigma f\|_{L^p} = \lim_{n\to\infty} \|X_n\|_{L^p(H)}$, и лемма Буркхольдера дает оценку

$$\|T_\sigma f\|_{L^p} \leqslant (p-1)\|f\|_{L^p} \tag{4.2}$$

для $p \geqslant 2$ и для любой последовательности σ, описанной выше.

Переформулируем неравенство (4.2) следующим образом: $|(T_\sigma f, g)| \leqslant (p-1)\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}$. Теперь из определения T_σ следует неравенство

$$\frac{1}{|J|}\Big|\sum_I \sigma_I(f, h_I)\overline{(g, h_I)}\Big| \leqslant (p-1)\langle|f|^p\rangle_J^{1/p}\langle|g|^{p'}\rangle_J^{1/p'}, \quad \sigma_I = e^{i\alpha_I}. \tag{4.3}$$

Отметим, что $(f, h_I) = \frac{1}{2}\sqrt{|I|}(\langle f\rangle_{I_+} - \langle f\rangle_{I_-})$. Кроме того, мы можем менять σ_I. Таким образом, теорема доказана. •

Теорема 4.3. *В области* $G = \{(\Phi, \Psi, \phi, \psi) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C} : |\phi|^p < \Phi, |\psi|^{p'} < \Psi\}$ *существует функция* $B(\Phi, \Psi, \phi, \psi)$ *такая, что для любых четверок* $a = (\Phi, \Psi, \phi, \psi)$, $a_- = (\Phi_-, \Psi_-, \phi_-, \psi_-)$, $a_+ = (\Phi_+, \Psi_+, \phi_+, \psi_+)$, *связанных соотношением* $a = \frac{a_- + a_+}{2}$, *справедливо неравенство*

$$B(a) - \frac{1}{2}(B(a_-) + B(a_+)) \geqslant \frac{1}{4}|\phi_- - \phi_+||\psi_- - \psi_+|.$$

Кроме того, всюду в G *справедлива оценка*

$$0 \leqslant B(a) \leqslant (p-1)\Phi^{1/p}\Psi^{1/p'}.$$

Для любого компактного подмножества K *из* G *можно найти бесконечно гладкую функцию* B_K, *заданную на* K, *для которой справедлива первая оценка. Рассмотрим* $\phi = \xi_1 + i\eta_1, \psi = \xi_2 + i\eta_2$, *где* ξ *и* η *вещественны. Если смотреть на* B_K *как на функцию шести вещественных переменных, то мы можем рассмотреть ее матрицу Якоби размера* 6×6 *и соответствующую дифференциальную форму, т.е. гессиан. Тогда гессиан функции* B_K *должен удовлетворять следующему неравенству:*

$$-d^2B_K \geqslant 2|d\phi||d\psi| = 2((d\xi_1)^2 + (d\eta_1)^2)^{1/2}((d\xi_2)^2 + (d\eta_2)^2)^{1/2}.$$

В то же время для любого положительного ε функцию B_K можно выбрать так, чтобы она удовлетворяла оценке

$$0 \leqslant B_K(a) \leqslant (1+\varepsilon)(p-1)\Phi^{1/p}\Psi^{1/p'}.$$

Доказательство. Возьмем $(\Phi, \Psi, \phi, \psi) \in G$. Рассмотрим все комплекснозначные функции f, g, заданные на J, такие, что $\Phi = \langle |f|^p \rangle_J$, $\Psi = \langle |g|^{p'} \rangle_J$, $\phi = \langle f \rangle_J$, $\psi = \langle g \rangle_J$. Пусть

$$B(\Phi, \Psi, \phi, \psi) := \sup\Big\{\frac{1}{4}\frac{1}{|J|} \sum_{I \in \mathcal{D},\, I \subset J} |\langle f \rangle_{I_+} - \langle f \rangle_{I_-}||\langle g \rangle_{I_+} - \langle g \rangle_{I_-}||I|\Big\},$$

где супремум берется по всем f и g, описанным выше. Этот супремум не зависит от интервала J. Данное наблюдение помогает доказать первое неравенство $B(a) - \frac{1}{2}(B(a_-) + B(a_+)) \geqslant \frac{1}{4}|\phi_- - \phi_+||\psi_- - \psi_+|$ точно так же, как это делается в любой из работ по функциям Беллмана. С другой стороны, второе неравенство $0 \leqslant B(a) \leqslant (p-1)\Phi^{1/p}\Psi^{1/p'}$ уже было доказано — это утверждение теоремы 4.2.

Если мы возьмем компактное множество K, мы можем также взять очень маленькое ε (гораздо меньше, чем расстояние от K до границы области G) и рассмотреть функцию $\frac{1}{\varepsilon^6}S(a/\varepsilon)$, где S — C_0^∞-функция, носителем которой является единичный шар пространства $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C} = \mathbb{R}^6$ с центром в нуле. Остается сгладить функцию B, свернув ее с $\frac{1}{\varepsilon^6}S(a/\varepsilon)$. Условие вогнутости будет верно в прежнем виде и для новой функции. Оценка сверху может ухудшиться в $(1 + C_K\varepsilon)$ раз. •

Список литературы

[1] Astala K., Iwaniec T., Saksman E., *Beltrami operators in the plane*, Duke Math. J. **107** (2001), no. 1, 27–56.

[2] Astala K., *Area distortion of quasiconformal mappings*, Acta Math. **173** (1994), 37–60.

[3] Bañuelos R., Wang G., *Sharp inequalities for martingales with applications to the Beurling-Ahlfors and Riesz transforms*, Duke Math. J. **80** (1995), no. 3, 575–600.

[4] Bañuelos R., Méndez-Hernández P., *Sharp inequalities Riesz transforms and space time Brownian motion*, Indiana Univ. Math. J. (в печати).

[5] Боярский Б. В., *Гомеоморфные решения систем Бельтрами*, Докл. АН СССР **102** (1955), №4, 661–664.

[6] Боярский Б. В., *Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами*, Мат. сб. **43** (1957), №4, 451–503.

[7] Bojarski B. V., *Quasiconformal mappings and general structural properties of systems of nonlinear equations elliptic in the sense of Lavrent'ev*, Sympos. Math., vol. 18, Academic Press, London, 1976, pp. 485–499.

[8] Bojarski B. V., Iwaniec T., *Quasiconformal mappings and non-linear elliptic equations in two variables*. I,II, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **22** (1974), 473–484.

[9] Bañuelos R., Méndez-Hernández P., *Sharp inequalities for heat kernels of Schrödinger operators and applications to spectral gaps*, J. Funct. Anal. **176** (2000), no. 2, 368–399.

[10] Burkholder D. L., *Explorations in martingale theory and its applications*, École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIX–1989, Lecture Notes in Math., vol. 1464, Springer, Berlin, 1991, pp. 1–66.

[11] Burkholder D. L., *Boundary value problems and sharp inequalities for martingale transforms*, Ann. Probab. **12** (1984), 647–702.

[12] Buckley S., *Estimates for operator norms on weighted spaces and reverse Jensen inequalities*, Trans. Amer. Math. Soc. **340** (1993), no. 1, 253–272.

[13] Fefferman R., Kenig C., Pipher J., *The theory of weights and the Dirichlet problem for elliptic equations*, Ann. of Math. (2) **134** (1991), no. 1, 65–124.

[14] Garcia-Cuerva J., Rubio de Francia J., *Weighted norm inequalities and related topics*, North-Holland Math. Stud., vol. 116, North-Holland Publishing Co., Amsterdam etc., 1985.

[15] Gehring F. W., *Open problems*, Proceedings of Roumanian-Finnish Seminar on Teichmuller Spaces and Quasiconformal Mappings, 1969, p. 306.

[16] Gehring F. W., *The L^p-integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping*, Acta Math. **130** (1973), 265–277.

[17] Gehring F. W., *Topics in quasiconformal mappings*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, CA, 1986), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, pp. 62–80.

[18] Gehring F. W., Reich E., *Area distortion under quasiconformal mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser A I No. 388 (1966), 1–15.

[19] Iwaniec T., *Extremal inequalities in Sobolev spaces and quasiconformal mappings*, Z. Anal. Anwendungen **1** (1982), 1–16.

[20] Iwaniec T., *The best constant in a BMO-inequality for the Beurling-Ahlfors transform*, Michigan Math. J. **33** (1986), 387–394.

[21] Iwaniec T., *Hilbert transform in the complex plane and area inequalities for certain quadratic differentials*, Michigan Math. J. **34** (1987), 407–434.

[22] Iwaniec T., *L^p-theory of quasiregular mappings*, Quasiconformal Space Mappings, Lecture Notes in Math., vol. 1508, Springer, Berlin, 1992, pp. 39–64.

[23] Iwaniec T., Martin G., *Quasiregular mappings in even dimensions*, Acta Math. **170** (1993), no. 1, 29–81.

[24] Iwaniec T., Martin G., *Riesz transforms and related singular integrals*, J. Reine Angew. Math. **473** (1996), 25–57.

[25] Petermichl St., Wittwer J., *A sharp weighted estimate on the norm of Hilbert transform via invariant A_2 characteristic of the weight*, Preprint, Michigan State Univ., 2000.

[26] Wittwer J., Thesis, Univ. Chicago, 2000.

[27] Lehto O., *Quasiconformal mappings and singular integrals*, Sympos. Math., vol. 18, Academic Press, London, 1976, pp. 429–453.

[28] Lehto O., Virtanen K., *Quasiconformal mappings in the plane*, Grundlehren Math. Wiss., vol. 126, Springer-Verlag, New York etc., 1973.

[29] Nazarov F., Treil S., Volberg A., *The Bellman functions and two-weght inequalities for Haar multipliers*, J. Amer. Math. Soc. **12** (1999), 909–928.

[30] Petermichl S., Volberg A., *Heating of the Ahlfors-Beurling operator: weakly quasiregular maps on the plane are quasiregular*, Duke Math. J. **112** (2002), no. 2, 281-305.

[31] Stein E., *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton Math. Ser., vol. 43, Monogr. Harmon. Anal., vol. III, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.

[32] Stroock D. W., *Probability theory, an analytic view*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

[33] Volberg A., *Bellman approach to some problems in harmonic analysis*, Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles, École Polytech., 2002, Exp. No. XX.

Поступило 20 декабря 2002 г.

Michigan State University
East Lansing, Michigan, USA

Équipe d'Analyse Université Paris VI
4, place Jussien,
75 252 Paris cédex 05 France
E-mail: volberg@math.msu.edu

Michigan State University
East Lansing, Michigan, USA
E-mail: fedja@math.msu.edu