



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Андриясян, И. В. Ильин, А. В. Малышев,
Применение ЭВМ к оценкам чеботаревского типа
в неоднородной гипотезе Минковского,
Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1986, том 151, 7–25

<https://www.mathnet.ru/zns14981>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.172

18 апреля 2025 г., 10:42:16



ПРИМЕНЕНИЕ ЭВМ К ОЦЕНКАМ ЧЕБОТАРЕВСКОГО ТИПА
В НЕОДНОРОДНОЙ ГИПОТЕЗЕ МИНКОВСКОГО

В этой статье мы приводим сводку результатов (и в некоторых случаях – наброски доказательств), полученных нами при исследовании неоднородной гипотезы Минковского. Подробное изложение этих исследований депонируется в ВИНТИ. Они используют метод Чеботарева [9] в том виде, как его развил Б.Ф.Скубенко [7], и существенно уточняют исследования, содержащиеся в статье Х.Х.Мухсинова [1], равно как (для $n \geq 17$) и все предыдущие исследования.

§ I. Введение

Пусть $n \geq 2$ – целое число,

$$L_k = L_k(x) = L_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} x_j \quad (k=1, \dots, n), \quad (I.1)$$

где $\alpha_{kj} \in \mathbb{R}$ ($k, j=1, \dots, n$), причем $\Delta = |\det(\alpha_{kj})| > 0$. Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}$. Наша цель – исследование известного в геометрии чисел предположения – неоднородной гипотезы (М) Минковского.

ГИПОТЕЗА (М). Для любых вещественных чисел α_{kj} ($k, j=1, \dots, n$), γ_k ($k=1, \dots, n$) с условием $\Delta = |\det(\alpha_{kj})| > 0$ найдется целый вектор $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$, для которого

$$\prod_{k=1}^n |L_k(x) + \gamma_k| \leq \frac{\Delta}{2^n}. \quad (I.2)$$

Это неравенство, вообще говоря, неулучшаемо, например, в случае $L_k(x) = x_k$, $\gamma_k = \frac{1}{2}$ ($k=1, \dots, n$). Для $n=2$ неравенство (I.2) было доказано Минковским [17]. На случай $n=3$ это неравенство *) было обобщено Ремаком [21]. В случае $n=4$

*) Заметим, что ни Минковский, ни Ремак не рассматривали явно свои результаты как частные случаи некоей гипотезы для любого n . По-видимому, впервые гипотеза (М) формулируется в известной монографии Кокса [15].

неоднородная гипотеза Минковского была доказана Дайсоном [13]. Наконец, для $n=5$ (и всех $n \leq 5$) гипотеза (M) была доказана Б.Ф.Скубенко [5], разработавшим для этого особый "метод паруса". Значительные технические упрощения доказательства теоремы Б.Ф.Скубенко (при сохранении метода) были даны в статьях [6, 10]. Там же, а также в монографии Леккеркеркера [16] см. ссылки на другие работы по неоднородной гипотезе Минковского для $n \leq 5$.

При $n \geq 6$ гипотеза (M) до сих пор не доказана (и не опровергнута). Оставляя в стороне интересный подход к неоднородной гипотезе Минковского, связанный с проблемой существования ДОТУ-матриц (см. [8] и цитированную там литературу), мы переходим к исследованиям, ведущим свое начало от замечательного результата (и метода) Н.Г.Чеботарева [9]. Но сначала переформулируем (несколько ослабив) гипотезу (M). В условиях (I.1) пусть

$$M_n = M(L_1, \dots, L_n; \gamma_1, \dots, \gamma_n) = \inf_{x \in \mathbb{Z}^n} \prod_{k=1}^n |L_k(x) + \gamma_k| \quad (I.3)$$

- неоднородный арифметический минимум произведения форм L_1, \dots, L_n ; здесь точная нижняя граница берется по всем целым точкам $x \in \mathbb{Z}^n$ пространства \mathbb{R}^n (она может не достигаться). Из гипотезы (M) очевидным образом вытекает следующее предположение.

ГИПОТЕЗА (M_0). Для всех $n \geq 2$

$$M_n \leq \frac{\Delta}{2^n} \quad (I.4)$$

Гипотеза (M), вообще говоря, не следует из гипотезы (M_0), ибо здесь возникает проблема существования $x \in \mathbb{Z}^n$ с условием, реализующим (I.2).

Н.Г.Чеботарев [9] доказал, что для всех $n \geq 2$

$$M_n \leq \frac{\Delta}{2^{n/2}} \quad (I.5)$$

(более того, он доказал разрешимость неравенства

$$\prod_{k=1}^n |L_k(x) + \gamma_k| \leq \frac{\Delta}{2^{n/2}}, \quad x \in \mathbb{Z}^n \quad (I.6)$$

В дальнейшем оценка Н.Г.Чеботарева (I.5) многократно усиливалась разными авторами, которые вместо оценки (I.5) получали оценки вида

$$M_n \leq \sigma_n^{-1} 2^{n/2} \Delta, \quad n \geq n_0, \quad (I.7)$$

где $\delta_n > 1$, $n_0 \geq 2$ (идеально: $n_0 = 2$; иногда число n_0 вычислялось или оценивалось; иногда авторы говорят лишь о существовании n_0).

Дадим сводку всех известных результатов по оценкам M_n в виде таблицы: имеет место оценка (I.7), где δ_n и n_0 содержатся в таблице (в последнем ее столбце – библиография и год публикации)

	δ_n	n_0	Библиография (год)
I	1	2	Н.Г.Чеботарев [9] (1934)
2	$1 + (\sqrt{2}-1)^n$	2	Морделл [18] (1940)
3	γ_n	2	Дэвенпорт [12] (1946)
4	$2 - (2 - \sqrt{2})^n$	2	Вудс [22] (1958)
5	$4 - 2(2 - \frac{3\sqrt{2}}{4})^n - 2^{\frac{n}{2}}$	2	Морделл [19] (1960)
6	$(3+10^{-4})(2e-1)$	существует n_0	Бомбиери [11] (1963)
7	$3(2e-1)$	существует n_0	Груббер [14] (1967)
8	$e^{-2} n^{1/3} \log^{-2/3} n$	существует n_0	Б.Ф.Скубенко [7] (1977)
9	$e^{-25.6} n^{3/7} \log^{-4/7} n$	существует n_0	Х.Н.Нарзуллаев, Б.Ф.Скубенко [4] (1979)
10	$\frac{\log(\sqrt{2}+1) - \frac{1.1535}{\log(n_0/2)}}{\sqrt{8e}} \frac{n^{1/2}}{\log(n/2)}$	любое $n_0 \geq 10^6$	Х.Х.Мухсинов [1] (1981)
11	$4.4455 - \frac{1.3545}{n-1}$	200	Х.Х.Мухсинов [3] (1983)

Здесь

$$\gamma_n = \gamma_n(\theta) = 1 + 2 \sum_{r=1}^n \frac{1}{r!} \sum_{l=0}^r (-1)^l \binom{r}{l} \left(1 - \frac{l\theta}{r}\right)^n,$$

где $\theta > 0$ – любое фиксированное число с условием $f((1+2\theta)\sqrt{2}) < 1$,

$f(x) = (2x+1)(x-1)^4 (x+1)^2$. Заметим, что в оценке Дэвенпорта

$$[16] \quad \delta_n = \gamma_n < 2e - 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 2e - 1 = 4.436564\dots$$

К исследованиям по оценкам типа (I.7) можно прибавить статью Х.Х.Мухсинова [2], к сожалению содержащую многочисленные ошибки как в доказательствах теорем, так и в их формулировках (теоремы 1 и 3 этой работы не верны; исправленная формулировка теоремы 2 приведена в [3]).

Мы улучшаем эти оценки (по крайней мере, для $n \geq 17$).

Во-первых, мы получили (см. §2) ряд общих предложений, содержащих оценки M_n сверху, зависящие от некоторых параметров и особенно эффективные для достаточно больших n . Оптимизация этих параметров приводит к оценкам M_n , более сильным, чем известные ранее. В частности, имеют место оценки (I.7) с

$$\delta_n = \begin{cases} 0.309973 \frac{n^{1/2}}{\log(n/3.042869)} & , \text{ если } n \geq 10^4, \\ 0.313538 \frac{n^{1/2}}{\log(n/3.111047)} & , \text{ если } n \geq 14221, \\ 0.327160 \frac{n^{1/2}}{\log(n/3.264949)} & , \text{ если } n \geq 10^5, \text{ (I.8)} \\ 0.330490 \frac{n^{1/2}}{\log(n/3.260979)} & , \text{ если } n \geq 2 \cdot 10^5, \\ 0.336627 \frac{n^{1/2}}{\log(n/3.198088)} & , \text{ если } n \geq 10^6. \end{cases}$$

В § 2 мы формулируем основные результаты этого исследования и приводим получаемые оценки δ_n , более точные, чем (I.7)-(I.8).

Во-вторых, в § 3 мы формулируем и даем набросок доказательства общих предложений, которые позволяют получать с помощью ЭВМ оценки M_n , более сильные для "средних" n , чем (I.7)-(I.8) и чем те, которые сформулированы в §2 этой статьи. В частности, имеет место оценка (I.7) с

$$\delta_n = \begin{cases} 3.3765123 & , \quad n \geq 17, \\ 9.2627251 & , \quad n \geq 200, \\ 13.3103848 & , \quad n \geq 700, \\ 15.9472184 & , \quad n \geq 1000, \\ 56.5057493 & , \quad n \geq 10000, \\ 159.2380010 & , \quad n \geq 100000. \end{cases} \quad (\text{I.9})$$

Результаты нашей работы (приведенные выше и сформулированные в §§ 2,3) сильнее ранее известных - по крайней мере, для $n \geq 17$. В частности, оценки (I.7)-(I.9) для $n \geq 17$ сильнее оценок (I.7) Морделла [19] и Дэвенпорта [12] (а тем более - их предшественников) с

$$\delta_n < 2e - 1 = 4.436564 \dots$$

Для $n \geq 700$ эти оценки сильнее *) оценок Бомбиери [II] с

$$\delta_n = (3 + 10^{-4})(2e - 1) = 13.310135.$$

Существенным в нашем исследовании является использование ЭВМ.

§ 2. Оценки для больших размерностей

Сформулируем результаты, уточняющие исследования [7, 4, I].

ТЕОРЕМА I. Пусть для некоторого целого числа $n \geq 2$ заданы вещественные числа $\lambda = \lambda(n)$, $\mu = \mu(n)$, $\rho = \rho(n)$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$0 < \mu < \lambda < \frac{1}{2}, \quad 0 < \rho < 1, \quad \lambda^2 \leq 2\mu, \quad (2.1)$$

$$L < \log(\sqrt{2} + 1); \quad (2.2)$$

здесь

$$L = L(\lambda, \mu, \rho) = l^{(0)} + l^{(1)} + l^{(2)} + l^{(3)}, \quad (2.3)$$

где

$$l^{(0)} = \lambda \left(\frac{4}{\rho} + \frac{\rho}{\mu} \right) \log \frac{1}{\rho}, \quad l^{(1)} = \lambda \left(\frac{4}{\rho} + \frac{\log 2}{2} \frac{\rho}{\mu} \right),$$

$$l^{(2)} = \sqrt{2} \frac{\lambda^2}{\mu}, \quad l^{(3)} = \rho \log(\sqrt{2} + 1) + \lambda \left(\rho + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\rho^2}{\mu} \right) + \frac{\lambda^2 \rho}{\mu}.$$

Тогда для этого n имеет место неравенство (I.7), где

$$\delta_n = \delta_n(\lambda, \mu, \rho) = \frac{2(n\lambda + 1)}{(1 + \mu)^n} \left\{ 1 - \frac{n^n (1 + \lambda - \frac{1 + \mu}{\sqrt{2}})^n}{n!(n\lambda + 1)} \right\}. \quad (2.4)$$

Доказательство этой теоремы близко рассуждениям статьи [I].

Мы также используем многогранник $\mathcal{C} \int_{\lambda}$.

*) Оценки Бомбиери [II], Грубера [I4], а также оценки [7, 4] трудно сравнивать между собой и с нашими оценками, ибо в этих работах не вычислены n_0 . По-видимому, это n_0 очень велико и существенно больше нашего $n_0 = 700$. Вопросу вычисления n_0 в оценке Бомбиери предполагается посвятить депонент И.В. Ильина.

$$\tilde{I}_\lambda : \begin{cases} |x_i| \leq 1 + \lambda & (i=1, \dots, n), \\ |x_i - x_j| \leq \lambda & (i, j=1, \dots, n), \end{cases}$$

предложенный Б.Ф.Скубенко. Но при этом применяем следующую "теорему переноса" Морделла [20]: пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ - выпуклое, симметричное относительно начала тело объема $V(K)$ и пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ - решетка определителя $d(\Lambda)$; тогда если

$$V(K) \geq 2^{n-1} d(\Lambda),$$

то или K содержит фундаментальную область решетки Λ , или K содержит точку $x \in \Lambda$, $x \neq 0$. Это позволяет улучшить результат статьи [1] "асимптотически при $n \rightarrow \infty$ " вдвое. Главная же цель исследования, основные результаты которого мы приводим в этом параграфе, - оптимальный выбор с помощью ЭВМ параметров λ , μ , ρ для получения возможно более точных оценок вида (1.7).

Полагая

$$\rho = b_0 n^{-1/2}, \quad \lambda = b_1 \frac{\rho}{\log(1/\rho)}, \quad \mu = \frac{1}{b_2} \rho^2, \quad (2.5)$$

мы из теоремы I выводим следующее предложение

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть для некоторых вещественных постоянных $n_0 \geq 2$, $b_0, b_1, b_2 > 0$ выполнены следующие условия

$$\left. \begin{aligned} b_0 < n_0^{1/2}, \quad b_0 \left(\frac{1}{2} \log n_0 - \log b_0 \right) < b_1 b_2 n_0^{1/2}, \\ b_0^2 b_2 \leq \lambda \left(\frac{1}{2} \log n_0 - \log b_0 \right)^2, \quad \lambda b_0 b_1 < n_0^{1/2} \left(\frac{1}{2} \log n_0 - \log b_0 \right), \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

$$b_1(4 + b_2) + l^{(1)} + l^{(2)} + l^{(3)} < \log(\sqrt{2} + 1), \quad (2.7)$$

где

$$l^{(1)} = 2b_1 \left(4 + \frac{\log^2 b_2}{2} b_2 \right) / \log \frac{n_0}{b_0^2},$$

$$l^{(2)} = 4\sqrt{2} b_1^2 b_2 / \log^2(n_0/b_0^2),$$

$$t^{(3)} = b_0 n_0^{-1/2} \left\{ \log(\sqrt{2}+1) + b_1(12+\sqrt{2})b_2 / \log \frac{n_0}{b_0^2} + 4b_1^2 b_2 / \log \frac{n_0}{b_0^2} \right\}.$$

Тогда для любого целого числа $n \geq n_0$ имеет место оценка (1.7) с $\bar{\sigma}_n = \bar{\sigma}_n(b_0, b_1, b_2)$, где

$$\bar{\sigma}_n = \lambda \frac{\frac{2b_0 b_1 n^{1/2}}{\log(n/b_0^2)} + 1}{1 + \left(\frac{b_0^2}{b_2}\right) \left(\frac{1}{n}\right)} \left\{ 1 - \frac{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2b_0 b_1}{n^{1/2} \log(n/b_0^2)} - \frac{b_0^2}{b_2 \sqrt{2} n}\right)^n n^n}{\left\{ \left(\frac{2b_0 b_1 n^{1/2}}{\log(n/b_0^2)} \right) + 1 \right\} n!} \right\}. \quad (2.8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть

$$\tilde{\sigma}_n = \tilde{\sigma}_n(a, a') = a \frac{n^{1/2}}{\log(n/a')}, \quad a = \frac{4b_0 b_1}{e^{b_0^2/b_2}}, \quad a' = b_0^2. \quad (2.9)$$

Тогда при $n \geq 6b_0$, $0 < b_0 \leq 3$, $0 < b_1 < 0.2$

$$\tilde{\sigma}_n < \bar{\sigma}_n,$$

где $\bar{\sigma}_n = \bar{\sigma}_n(b_0, b_1, b_2)$ задано формулой (2.8). Поэтому по следствию I имеет место (1.7) с $\bar{\sigma}_n = \tilde{\sigma}_n$ вида (2.9).

Осуществляя с помощью ЭВМ оптимальный выбор параметров b_0, b_1, b_2 (а с ними a и a') при данном n_0 из следствия I и замечания выводим следующее предложение.

СЛЕДСТВИЕ 2. При n имеет место неравенство (1.7) с $\bar{\sigma}_n = \bar{\sigma}_n(b_0, b_1, b_2)$ вида (2.8) и $\tilde{\sigma}_n = \tilde{\sigma}_n(a, a')$ вида (2.9), где $n_0, b_0, b_1, b_2, a, a', \bar{\sigma}_n$ и $\tilde{\sigma}_n$ приводятся в следующей таблице

n_0	b_0	b_2	b_1	$\bar{\sigma}_n = \bar{\sigma}_n(b_0, b_1, b_2)$	a	a'	$\tilde{\sigma}_n = \tilde{\sigma}_n(a, a')$
				см. (2.8)			см. (2.9)
				$\bar{\sigma}_{n_0}$			$\tilde{\sigma}_{n_0}$
10^3	1.456242	7.338019	0.061369	2.873557	0.267751	2.120641	1.375403
6184	1.709419	6.933936	0.067815	4.436663	0.304236	2.922113	3.124373
10^4	1.744382	6.811837	0.069442	5.107510	0.309973	3.042869	3.827992
14221	1.763816	6.722574	0.070593	5.695771	0.313538	3.111047	4.436661
$5 \cdot 10^4$	1.801252	6.418317	0.074368	8.701215	0.323205	3.244509	7.494794

n_0	b_0	b_2	b_1	δ_{n_0}	a	a'	$\tilde{\delta}_{n_0}$
73520	1.805381	6.331895	0.075417	10.000027	0.325495	3.259401	8.804720
96632	1.806897	6.266441	0.076210	11.187890	0.327141	3.264877	10.000034
10^5	1.806917	6.265721	0.076219	11.203280	0.327160	3.264949	10.015509
157790	1.806805	6.171977	0.077353	13.310139	0.329410	3.264544	12.131657
196593	1.805913	6.128735	0.077876	14.484856	0.330414	3.261322	13.310148
$2 \cdot 10^5$	1.805818	6.125371	0.077917	14.581473	0.330490	3.260979	13.407042
$5 \cdot 10^5$	1.797671	5.959126	0.079939	20.939439	0.334204	3.231621	19.776611
10^6	1.788320	5.846640	0.081321	27.761954	0.336627	3.198088	26.604579
10^7	1.749780	5.543340	0.085147	73.473927	0.343036	3.061730	72.322707
10^8	1.711440	5.321601	0.088083	201.636178	0.347758	2.929027	200.482739

Эти таблицы (извлечение из которых приведено во введении, (I.8)) показывают, что

$$\left. \begin{array}{l} \delta_n > \delta_n^{(B)} \\ \tilde{\delta}_n > \delta_n^{(B)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{, если } n \geq 157790, \\ \text{, если } n \geq 196593, \end{array} \quad (2.10)$$

что лучше оценки Бомбиери [II] (I.7) с

$$\delta_n = \delta_n^{(B)} = (3 + 10^{-4})(2e - 1) = 13.314135...;$$

они показывают, что

$$\left. \begin{array}{l} \delta_n > \delta_n^{(A)} \\ \tilde{\delta}_n > \delta_n^{(A)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{, если } n \geq 6184, \\ \text{, если } n \geq 14.221, \end{array} \quad (2.11)$$

что лучше оценки Дэвенпорта [I2] (I.7) с

$$\tilde{\sigma}_n = \tilde{\sigma}_n^{(A)} < 2e - 1 = 4.436564 \dots$$

Значения n_0 , $n \geq n_0$, в неравенствах (2.10), (2.11) являются наименьшими (что следует из вычислений, не приведенных в таблице).

При $n \rightarrow \infty$ выбор (2.5) параметров ρ , λ , μ - как можно доказать - дает их истинные порядки как функций от n ; при этом оптимальным является следующий выбор коэффициентов b_0, b_1, b_2 :

$$b_0 = \sqrt{2}, \quad b_2 = 4, \quad b_1 = \frac{\log(\sqrt{2}+1) - \tau\sqrt{2}e}{8}, \quad (2.12)$$

где $\tau > 0$, $\tau \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Полагая в следствии I значения (2.12) для b_0, b_1, b_2 , получаем следующее предложение.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть дано вещественное число τ , $0 < \tau < 0.1$, и пусть для некоторого числа $n_0 \geq 9$

$$m^{(1)} + m^{(2)} < \tau, \quad (2.13)$$

где

$$m^{(1)} = \left\{ 0.50901188 + \frac{0.11779118}{\log(n_0/2)} \right\} \frac{1}{\log(n_0/2)},$$

$$m^{(2)} = \left\{ 0.5345801 + \frac{1.1798753}{\log(n_0/2)} + \frac{0.11779118}{\log^2(n_0/2)} \right\} n_0^{1/2}.$$

Тогда для $n \geq n_0$ имеет место (1.7) с $\tilde{\sigma}_n = \tilde{\tilde{\sigma}}_n = \tilde{\tilde{\sigma}}_n(\tau)$, где

$$\tilde{\tilde{\sigma}}_n = \left\{ \frac{\log(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}e} - \tau \right\} \frac{n^{1/2}}{\log(n/2)} = (0.3779736\dots - \tau) \frac{n^{1/2}}{\log(n/2)}. \quad (2.14)$$

Так как $m^{(1)} \rightarrow 0$, $m^{(2)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то из следствия 3 сразу же выводим:

СЛЕДСТВИЕ 4. Для любого вещественного числа $\tau > 0$ найдется такое $n_0 = n_0(\tau)$, что имеет место (1.7) с $\tilde{\sigma}_n = \tilde{\tilde{\sigma}}_n$ вида (2.14).

Наконец, по следствию 3 с помощью ЭВМ легко вычислить таблицу зависимости $n_0 = n_0(\tau)$ от τ :

СЛЕДСТВИЕ 5. Для $n \geq n_0$ имеет место оценка (1.7) с

$$\delta_n = \tilde{\delta}_n = \tilde{\delta}_n(n_0) = \alpha_{n_0} \frac{n^{1/2}}{\lg(n/2)}, \quad (2.15)$$

где n_0 и α приводятся в следующей таблице

n_0	10^3	10^4	16072	10^5	110522	$2 \cdot 10^5$	216126	$5 \cdot 10^5$	10^6	10^7	10^8
α_0	0.27	0.3098	0.3146	0.3279	0.3284	0.3314	0.3317	0.3353	0.3379	0.3443	0.3488
$\tilde{\delta}_{n_0}$	1.37411	3.63818	4.4366	9.5839	10.0000	12.8760	13.3104	19.0810	25.7504	70.588	196.788

Таким образом,

$$\tilde{\delta}_n > \delta_n^{(A)}, \text{ если } n \geq 16072, \quad \tilde{\delta}_n > \delta_n^{(B)}, \text{ если } n \geq 216126,$$

причем, как показывают вычисления, это — наименьшие значения n , для которых выполняются эти неравенства.

Подробное изложение результатов § 2 и их полные доказательства содержатся в статье Андриясян А.К., Ильин И.В., Малышев А.В. К неоднородной гипотезе Минковского. Оценки чеботаревского типа для больших размерностей. — Редкол.журн. "Вестник ЛГУ. сер.матем., мех., астрон." Л., 1986, 45 с., библиогр. 31 назв. депонируемой в ВИНТИ.

§ 3. Оценки для малых и "средних" размерностей

Сформулируем результаты, приводящие (при использовании ЭВМ) к более сильным оценкам для малых и "средних" $n \geq 17$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть задан вещественный параметр α , $0 \leq \alpha < 1$ и пусть заданы вещественное число $\omega > 0$ и целое число $n_0 \geq 2$ с условием

$$\frac{\omega}{n_0} < \frac{(1-\alpha) \lg(\sqrt{n_0}+1)}{2(2-\alpha)\sqrt{2}} = 0.3116126 \dots \frac{1-\alpha}{2-\alpha}. \quad (3.1)$$

Рассмотрим совокупность всех*) пар (r_1, r_2) целых чисел r_1, r_2 с условиями

*) Их конечное число, ибо из (3.2) и (3.3) следует:

$$r_1 - (2-\alpha)r_2 < \frac{4\omega}{\left\{ \lg(\sqrt{n_0}+1) - (2+\sqrt{2}) \frac{\omega}{n_0} \right\}^2}$$

$$v_1 - (2-\alpha)v_2, \quad (3.2)$$

$$0 \leq v_2 < \frac{2\sqrt{\omega(v_1 - (2-\alpha)v_2)} - \left\{ \log(\sqrt{2}+1) - (2+\sqrt{2}) \frac{\omega}{n_0} \right\} (v_1 - (2-\alpha)v_2)}{(1-\alpha) \log(\sqrt{2}+1) - 2\sqrt{2}(2-\alpha) \frac{\omega}{n_0}}. \quad (3.3)$$

Фиксируем пару целых чисел (v_1, v_2) , удовлетворяющую неравенствам (3.2), (3.3) и рассмотрим последовательность вещественных чисел $\tau_k = \tau_k(\omega, n_0) = \tau_k(v_1, v_2; \alpha, \omega, n_0)$ ($k=0, 1, 2, \dots$), задаваемых формулой

$$\tau_k = \frac{e^{\frac{2(v_1 - (2-\alpha)v_2)\omega}{kn_0}}}{\left\{ e^{\frac{4(v_1 - (2-\alpha)v_2)\omega}{kn_0}} - 1 \right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (k=1, 2, \dots)$$

и условием $\tau_0 = 1$, так что

$$\tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots, \quad \tau_k \rightarrow \infty.$$

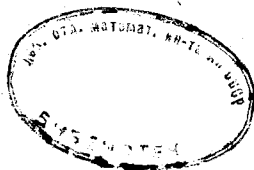
Пусть для каждой пары (v_1, v_2) с условиями (3.2) и (3.3) найдется целое число $N = N(v_1, v_2; \alpha, \omega, n_0) \geq 2$ и индекс $k = k(v_1, v_2; \alpha, \omega, n_0) \geq 0$ с условием

$$\tau_k < N \leq \tau_{k+1}, \quad (3.4)$$

для которых

$$\begin{aligned} & \sum_{t=1}^k \max \left\{ 0, \log\left(\frac{N}{v_t} - 1\right) + N \log\left(1 + \frac{1}{v_t}\right) \right\} + \\ & + v_1 \left\{ \log\left(N\sqrt{2}\left(1 + \frac{\omega}{n_0}\right) + 1\right) + N \log\left(\sqrt{2}\left(1 + \frac{\omega}{n_0}\right) - 1\right) \right\} + \\ & + v_2 \left\{ \log\left(N\sqrt{2}\left(1 - \frac{(2-\alpha)\omega}{n_0}\right) - 1\right) + N \log\left(\sqrt{2}\left(1 - \frac{(2-\alpha)\omega}{n_0}\right) + 1\right) \right\} < 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

(в случае $k=0$ первое слагаемое в левой части неравенства (3.5) отсутствует). Тогда для $n \geq n_0$ имеет место неравенство (1.7), где



$$\delta_n = \frac{\lambda(5-\alpha) - \left\{ 8 \left(1 - \frac{(1-\alpha)\omega}{n} \right)^n + 2\omega(1-\alpha) \left(1 - \frac{(1-\alpha)\omega}{2n} \right)^{n-1} \right\}}{1-\alpha} - \frac{2n^n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n}{n!} \left(1 + \frac{(\lambda + \sqrt{2})\omega}{n} \right)^n \quad (3.6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть

$$\tilde{\delta}_n = \frac{\lambda(5-\alpha) - 8e^{-\frac{(1-\alpha)\omega}{2}}}{1-\alpha} - \frac{\lambda\omega e^{-\frac{(1-\alpha)\omega}{2}}}{1 - \frac{(1-\alpha)\omega}{2n}} - \frac{\lambda e^{(\lambda + \sqrt{2})\omega}}{\sqrt{2\pi n}} \left\{ \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) e \right\}^n \quad (3.7)$$

Тогда $\tilde{\delta}_n$ растет вместе с n и

$$\tilde{\delta}_n < \delta_n, \quad (3.8)$$

где δ_n задано формулой (3.6). Поэтому в условиях теоремы 2 имеет место (2.7) с $\delta_n = \tilde{\delta}_n$ вида (3.7).

Параметры α , ω и k теоремы 2 (и замечания) при данном можно выбрать оптимальным образом, используя ЭВМ. Это приводит к следующим оценкам δ_n .

СЛЕДСТВИЕ. При $n \geq n_0$ имеет место неравенство (1.7) с $\delta_n = \delta_n(\alpha, \omega, n)$ вида (3.6) и $\tilde{\delta}_n = \tilde{\delta}_n(\alpha, \omega, n)$ вида (3.7), где n_0 , α , ω , а также выбранное k и δ_{n_0} , $\tilde{\delta}_{n_0}$ приводятся в следующей таблице

n_0	α	k	ω	δ_{n_0}	$\tilde{\delta}_{n_0}$
17	0,120	3	0,759526	3,376512	3,351198
50	0,050	6	1,909802	5,492556	5,451329
100	0,030	12	3,604880	7,576274	7,534645
200	0,010	19	6,538214	9,262725	9,240779
500	0,320	9	7,644332	11,761180	11,747552
700	0,446	7	8,267710	13,310384	13,298611
1000	0,630	5	8,820434	15,947218	15,936983

10000	0.880	13	41.928696	56.505779	56.501929
50000	0.920	6	69.394120	87.123726	87.122580
10^5	0.950	33	214.493833	159.238001	159.237603
10^6	0.980	26	223.875000	311.637039	311.636812
10^7	0.990	27	478.875000	641.641055	641.641009

К сожалению, из за большого объема вычислений при $n \geq 10^8$ мы не смогли оптимизировать выбор k . Заметим, что \tilde{b}_n , вычисленное при данном n_0 , монотонно возрастает по n . Поэтому оценки (I.9) содержатся в приведенной таблице. К сожалению, величина \tilde{b}_n при данных ω и α оказывается более сложной функцией n . Подсчеты чисел n подряд (для $17 \leq n \leq 100$) показывают, что при соответствующей (при каждом n) оптимизации ω и α величина \tilde{b}_n возрастает с n , так что оценки (I.9) могут быть усилены.

Оценки (I.7) теоремы 2, замечания и следствия I сильнее оценок Морделла [I9] и Дэвенпорта [I2] уже при $n \geq 17$; при $n \geq 100$ они сильнее оценок Бомбиери [II].

Дадим НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА теоремы 2.

I°. Пусть λ, α, μ - вещественные числа с условиями

$$0 \leq \lambda \leq 2, \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad 0 \leq \mu \leq \sqrt{2}(1+\lambda) - 1. \quad (3.9)$$

Мы рассматриваем тела $\tilde{I} = \tilde{I}_{\lambda, \alpha}$ и $\sigma\gamma = \sigma\gamma_{\lambda, \alpha, \mu}$:

$$\tilde{I}: \left\{ \begin{array}{l} |x_i| \leq 1 + \lambda \quad (i=1, \dots, n), \\ |x_i - x_j| \leq 2 \quad (i, j=1, \dots, n), \\ |x_i - x_j + x_k| \leq 3 + \alpha \max\{|x_i| - 1, 0\} \quad (i, j, k=1, \dots, n; i \neq k), \end{array} \right\} \quad (3.10)$$

$$\sigma\gamma: \left\{ \begin{array}{l} \tilde{I} \\ |x_1| + \dots + |x_n| \leq \frac{n}{\sqrt{2}}(1 + \mu). \end{array} \right\} \quad (3.11)$$

Вычисляется:

$$V(\tilde{I}_{\lambda, \alpha}) = 2^n \Delta_{\lambda, \alpha}, \quad (3.12)$$

где

$$\Delta_{\lambda, \alpha} = \frac{5-\alpha}{1-\alpha} - \left(\frac{4}{1-\alpha} + (n-2)\lambda \right) \left(1 - \frac{(1-\alpha)\lambda}{2} \right)^{n-1},$$

и оценивается

$$V(\gamma_{\lambda, \alpha, \mu}) \geq 2^n \Delta'_{\lambda, \alpha, \mu}, \quad \Delta'_{\lambda, \alpha, \mu} = \Delta_{\lambda, \alpha} - \frac{n^\mu}{n!} \left(1 + \lambda - \frac{1+\mu}{\sqrt{2}} \right)^2. \quad (3.12)$$

2°. Для доказательства теоремы 2 достаточно доказать, что в ее условиях для любой решетки $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ определителя

$$d(\Lambda) = \delta_n, \quad (3.13)$$

где δ_n имеет вид (3.6), и для любого вектора $\gamma \in \mathbb{R}^n$ при $n \geq n_0$

$$M_n = \inf_{y \in \Lambda + \gamma} |y_1 \dots y_n| \leq 2^{-\frac{n}{2}}. \quad (3.14)$$

Если $M_n = 0$, то неравенство (3.14) тривиально. Поэтому далее считаем, что $M_n > 0$, $M_n = a^n$, $a = a(\Lambda, \gamma) > 0$. Для простоты считаем, что точная нижняя граница в (3.14) достигается. Тогда не нарушая общности, можно считать, что

$$\alpha = (a, \dots, a) \in \Lambda + \gamma = \Lambda + \alpha,$$

причем неравенство (3.14) равносильно неравенству

$$a \leq 2^{-1/2}. \quad (3.15)$$

Для $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{Z}^n$ обозначим:

$$F(z) = \prod_{i=1}^n |z_i + 1|.$$

Тогда по определению a для любой точки $x \in \Lambda$

$$F\left(\frac{x}{a}\right) \geq 1. \quad (3.16)$$

3°. Рассмотрим тело $\mathcal{O}_\gamma = \mathcal{O}_{\lambda, \alpha, 0}$, определяемое неравенствами (3.11) при $\mu = 0$. Тогда в силу (3.13), (3.6) и (3.12) $V(\mathcal{O}_\gamma) \geq 2^{n-1} d(\Lambda)$.

и по теореме переноса Морделла [20] (она сформулирована в § 2: или \mathcal{U} содержит фундаментальную область решетки Λ ; или найдется точка \tilde{x} с условиями

$$\tilde{x} \in \mathcal{U}, \quad \tilde{x} \in \Lambda, \quad \tilde{x} \neq 0. \quad (3.17)$$

В случае существования в \mathcal{U} фундаментальной области Λ неравенство (3.15), а с ним и теорема 2, просто следует из последнего неравенства (3.11) с $\mu=0$.

4°. Поэтому далее пусть существует точка $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ с условиями (3.17). Из (3.16) выводим:

$$F\left(\frac{\tilde{x}}{a}\right)F\left(\frac{-\tilde{x}}{a}\right) \geq 1, \quad \prod_{i=1}^n \left| \left(\frac{\tilde{x}_i}{a}\right)^2 - 1 \right| \geq 1, \quad \max_i |\tilde{x}_i| > \lambda^{1/2} a. \quad (3.18)$$

Для доказательства (3.15) предположим противное: пусть

$$a > \lambda^{-1/2}. \quad (3.19)$$

Заменяя в случае необходимости \tilde{x} на $-\tilde{x}$ и перенумеровывая координаты \tilde{x} с учетом (3.18) и (3.19), мы можем считать, что

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x}_1 &= \max |\tilde{x}_i|, \quad \tilde{x}_1 = 1 + \theta, \quad 0 < \theta \leq \lambda, \\ \tilde{x}_1 \geq \tilde{x}_2 \geq \dots \geq \tilde{x}_{r_1} > a, \quad \tilde{x}_{r_1+i} < -a \quad (i=1, \dots, r_2), \\ a \geq |\tilde{x}_{r_1+1}| \geq \dots \geq |\tilde{x}_{r_1+s}|, \quad r_1+s=n. \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Обозначаем для $z = (z_1, \dots, z_n)$

$$R_1(z) = \prod_{i=1}^{r_1} |z_i + 1|, \quad R_2(z) = \prod_{i=1}^{r_1+r_2} |z_i + 1|,$$

$$R(z) = R_1(z)R_2(z) = \prod_{i=1}^r |z_i + 1|, \quad S(z) = \prod_{i=r+1}^{r+s} |z_i + 1|,$$

так что

$$F(z) = R(z)S(z). \quad (3.21)$$

Обозначим также

$$X_1 = \sum_{i=1}^{r_1} \tilde{x}_i, \quad X_2 = -\sum_{i=r_1+1}^r \tilde{x}_i, \quad X = X_1 + X_2 = \sum_{i=1}^r |\tilde{x}_i|, \quad Y = \sum_{i=r+1}^n |x_i|.$$

5°. Из (3.17), (3.10) и (3.18) выводится, что

$$r_1 - (2-\alpha)r_2 > 0. \quad (3.22)$$

6°. Пусть $\lambda < (3\sqrt{2}-2)(\delta-2\alpha)$. Из

$$F\left(\frac{-\tilde{x}}{a}\right) \geq 1$$

(см. (3.16)) выводим

$$\log S\left(\frac{\tilde{x}}{a}\right) > (r_1 - r_2) \log(\sqrt{2}+1) - \left\{ (2+\sqrt{2})r_1 - (2-\alpha)(2-\sqrt{2})r_2 \right\} \theta.$$

С другой стороны из (3.18) следует:

$$\frac{Y}{a} \leq 2\sqrt{2}(r_1 - (2-\alpha)r_2)\theta.$$

Так как

$$\log S\left(\frac{-\tilde{x}}{a}\right) \leq \frac{Y}{a},$$

то мы получаем первое основное неравенство

$$2\sqrt{2}\left\{ r_1 - (2-\alpha)r_2 \right\} \lambda' + \lambda \left\{ (2+\sqrt{2})r_1 - (2-\alpha)(2-\sqrt{2})r_2 \right\} - (r_1 - r_2) \log(\sqrt{2}+1) > 0. \quad (3.23)$$

7°. Из (3.16) следует

$$F\left(\frac{N\tilde{x}}{a}\right) \left\{ F\left(\frac{-\tilde{x}}{a}\right) \right\}^N \geq 1, \quad (3.24)$$

где $N \geq 2$ - целое число, удовлетворяющее (3.4). Но

$$F\left(\frac{Nx}{a}\right) \left\{ F\left(\frac{-x}{a}\right) \right\}^N = R\left(\frac{Nx}{a}\right) \left\{ R\left(\frac{-x}{a}\right) \right\}^N S\left(\frac{Nx}{a}\right) \left\{ S\left(\frac{-\tilde{x}}{a}\right) \right\}^N. \quad (3.25)$$

Доказывается, что

$$R\left(\frac{N\tilde{x}}{a}\right) \left\{ R\left(\frac{-\tilde{x}}{a}\right) \right\}^N < \exp\left\{ r_1 \left\{ \log(N\sqrt{2}(1+\theta)+1) + N \log(\sqrt{2}(1+\theta)-1) \right\} + r_2 \left\{ \log(N\sqrt{2}(1-(2-\alpha)\theta)-1) + N \log(\sqrt{2}(1-(2-\alpha)\theta)+1) \right\} \right\}. \quad (3.26)$$

Для оценки $S\left(\frac{N\tilde{x}}{a}\right) \left\{ S\left(\frac{-\tilde{x}}{a}\right) \right\}^N$ разобьем $S(x)$ при данном N на два сомножителя

$$S(z) = S_1(z) S_2(z), \quad (3.27)$$

где

$$S_1(z) = \prod_{i=\nu+1}^{\nu+\delta_1} |z_i + 1|, \quad S_2(z) = \prod_{i=\nu+\delta_1+1}^n |z_i + 1|,$$

причем

$$\left| \frac{N\tilde{x}_i}{a} \right| \geq 1, \quad \text{если } i = \nu_1 + 1, \dots, \nu_1 + \delta_1,$$

$$\left| \frac{N\tilde{x}_i}{a} \right| < 1, \quad \text{если } i = \nu_1 + \delta_1 + 1, \dots, n.$$

Доказывается, что

$$S_1\left(\frac{N\tilde{x}}{a}\right) \left\{ S_1\left(\frac{-\tilde{x}}{a}\right) \right\}^N \leq \prod_{t=1}^K \max \left\{ 1, \left(\frac{N}{\tau_t} - 1\right) \left(1 + \frac{1}{\tau_t}\right)^N \right\}, \quad (3.28)$$

$$S_2\left(\frac{N\tilde{x}}{a}\right) \left\{ S_2\left(\frac{-\tilde{x}}{a}\right) \right\}^N \leq 1. \quad (3.29)$$

Соединяя оценки (3.24), (3.26), (3.28), (3.29) и учитывая (3.25) и (3.27), мы после логарифмирования получаем неравенство

$$\begin{aligned} & \sum_{t=1}^K \log \left(\max \left\{ 1, \left(\frac{N}{\tau_t} - 1\right) \left(1 + \frac{1}{\tau_t}\right)^N \right\} \right) + \\ & + \nu_1 \left\{ \log(N\sqrt{\lambda}(1+\lambda)+1) + N \log(\sqrt{\lambda}(1+\lambda)-1) \right\} + \\ & + \nu_2 \left\{ \log(N\sqrt{\lambda}(1-(\lambda-\alpha)\lambda)-1) + N \log(\sqrt{\lambda}(1-(\lambda-\alpha)\lambda)-1) \right\}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

8°. При $\lambda = \omega/n$, $n \geq n_0$ в условиях теоремы 2 для каждой возможной пары (ν_1, ν_2) неравенство (3.30) противоречит неравенству (3.5). Поэтому предположение (3.19) не верно. Тем самым мы получили оценку (3.15), равносильную теореме 2.

Подробное изложение результатов § 3, в частности, полное доказательство теоремы 2 (без предположения достижимости M_n), см. в работе :

Андрисян А.К., Ильин И.В., Малышев А.В. К неоднородной гипотезе Минковского. Применение ЭВМ к оценкам чеботаревского типа. - Редкол.журн. "Вестник ЛГУ, сер.матем., мех. и астроном". Л., 1986 ,

которая депонируется в ВИНИТИ.

Литература

1. М у х с и н о в Х.Х. Уточнение оценок арифметического минимума произведения неоднородных линейных форм для больших размерностей. - В кн.: Исследования по теории чисел.7. Зап. научн.семина.ЛОМИ, 1981, т.106, с.82-103; исправление см. [3].
2. М у х с и н о в Х.Х. Об оценках в неоднородной гипотезе Минковского для малых размерностей. - В кн.: Исследования по теории чисел.7. Зап.научн.семина.ЛОМИ, 1981, т.106, с.104-133.
3. М у х с и н о в Х.Х. К неоднородной гипотезе Минковского (письмо в редакцию). - В кн.: Исследования по теории чисел.8. Зап.научн.семина.ЛОМИ, 1983, т.121, с.195-196.
4. Н а р з у л л а е в Х.Н., С к у б е н к о Б.Ф. Уточнение оценки арифметического минимума произведения неоднородных линейных форм. - В кн.: Исследования по теории чисел.5. Зап.научн.семина.ЛОМИ, 1979, т.82, с.88-94.
5. С к у б е н к о Б.Ф. Доказательство гипотезы Минковского о произведении линейных неоднородных форм от n переменных для $n \leq 5$. - В кн.: Исследования по теории чисел.2. Зап. научн.семина.ЛОМИ, 1973, т.33, с.6-36.
6. С к у б е н к о Б.Ф. Новый вариант доказательства неоднородной гипотезы Минковского для $n=5$. - Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1976, т.142, с.240-253.
7. С к у б е н к о Б.Ф. К гипотезе Минковского при больших n . - Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1978, т.148, с.218-224.
8. С к у б е н к о Б.Ф. Существуют квадратные вещественные матрицы любого порядка $n \geq 2880$, не являющиеся DOTU -матрицами. - В кн.: Исследования по теории чисел.7. Зап.научн.семина.ЛОМИ, 1981, т.106, с.134-136.
9. Ч е б о т а р е в Н.Г. Заметки по алгебре и теории чисел. - Уч.зап.Казанск.ун-та, 1934, т.94, № 7, с.3-16. Перепеч.:

10. Banbaha R.P., Woods A.C. Minkowski's conjecture for $w=5$: a theorem of Skubenko. - J.Number Theory, 1980, v.12, N 1, p.27-48.
11. Bombieri E. Sul teorema di Tschebotarev. - Acta arithm., 1963, v.8, N 3, p.273-281.
12. Davenport H. On a theorem of Tschebotareff. - J. London Math.Soc., 1946, v.21, N 1, p.28-34. Corr.: ibid., 1949, v.24, p.316.
13. Dyson F.J. On the product of four non-homogeneous linear forms. - Ann.of Math.(2), 1948, v.49, p.82-109.
14. Gruber P. Eine Erweiterung des Blichfeldtschen Satzes mit einer Anwendung auf inhomogene Linearformen. - Monatsh. Math., 1967, Bd.71, N 2, S.143-147.
15. Koksma J.F. Diophantische Approximationen. - Berlin, 1936, viii + 157 S.
16. Lekkerkerker C.G. Geometry of numbers. - Groningen - Amsterdam, 1969, viii + 510 p.
17. Minkowski H. Diophantische Approximationen. - Leipzig, 1907, viii + 235 S.
18. Mordell L.J. Tschebotareff's theorem on the product of non-homogeneous linear forms. - Vierteljahrsschr. Naturforsch. Gesellsch. Zürich, 1940, Bd.85, Beiblatt, p.47-50.
19. Mordell L.J. Tschebotareff's theorem on the product of non-homogeneous linear forms(II). - J.London Math.Soc., 1960, v.35, N 1, p.91-97.
20. Mordell L.J. Note on the product of w inhomogeneous linear forms. - J.Number Theory, 1972, v.4, p.405-407.
21. Remak R. Verallgemeinerung eines Minkowskischen Satzes, I-II. - Math.Z., 1923, Bd.17, S.1-34; 1923, Bd.18, S.173-200.
22. Woods A.C. On a theorem of Tschebotareff. - Duke Math. J., 1958, v.25, N 4, p.631-637.