ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 122, № 2
февраль, 2000

К. Досс-Башле*, Ж. П. Франсуаз*

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ГОЛОМОРФНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Исследованы системы с двумя степенями свободы, интегрируемые в смысле Лиувилля и полученные как вещественная и мнимая части полиномиальных (или целых) комплексных функций двух комплексных переменных. Предложены определения действий таких систем, не относящихся к системам типа Арнольда–Лиувилля. Предложен метод нахождения действий из комплексного уравнения Гамильтона–Якоби, и этот метод применен для рассмотрения нескольких примеров, включая те, которые недавно рассматривались в связи с возмущениями системы Рюджсенаарса–Шнайдера. Поставлена проблема квазиклассического описания соответствующих квантовых систем.

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой статье обсуждаются системы с двумя степенями свободы, интегрируемые в смысле Лиувилля и полученные как вещественная и мнимая части полиномиальных (или целых) комплексных функций двух комплексных переменных z и p. Пусть

$$H\colon (z,p) \mapsto H(z,p)$$

– такая функция. Положим

$$z = x_1 + ix_2, \qquad p = y_1 - iy_2 \tag{1.1}$$

и

$$H(z,p) = H_1(x_1,x_2;y_1,y_2) + iH_2(x_1,x_2;y_1,y_2). \tag{1.2}$$

Тогда функции Гамильтона H_1 и H_2 имеют равную нулю скобку Пуассона, определяемую симплектической формой

$$\omega = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2. \tag{1.3}$$

Положим $M = \mathbb{R}^2$, и пусть $R\colon T^*M \mapsto T^*M$ – отображение слоев, определяемое формулой

$$R\colon (x_1,x_2;y_1,y_2) \mapsto (x_1,x_2;-y_2,y_1). \tag{1.4}$$

*Université de Paris 6, B.P. 172, 75252 Paris, France

Пара (H_1, H_2) составляет бигамильтонову систему в смысле определений работы [1] с довольно простым рекурсивным оператором R, что легко увидеть с помощью условий Коши–Римана (подробнее см., например, в [2] и [3]). Насколько нам известно, проблема построения действий для таких систем еще не исследовалась. Эти системы и их значение для квантовой физики впервые обсуждались Строкки [4]. Мы предлагаем называть эти системы системами Калоджеро–Строкки. Мы вводим определение действия по аналогии с определением Арнольда [5], относящимся к стандартному случаю, когда гладкие поверхности уровня первых интегралов являются двумерными торами. Во втором разделе мы напоминаем стандартную схему определения действий и приводим несколько примеров явных вычислений действий. Эти примеры включают волчок Ковалевской, систему Калоджеро–Мозера во внешнем поле с квадратичным потенциалом и проблему Кеплера. В третьем разделе мы предлагаем определения действий для систем Римана–Лиувилля и излагаем метод нахождения этих действий из комплексного уравнения Гамильтона–Якоби. В четвертом разделе мы применяем этот метод к следующим трем примерам функций Гамильтона.

Первая функция Гамильтона имеет вид

$$H(z,p) = e^{sp} - i\Omega\frac{z}{s}. \tag{1.5}$$

Она появилась в работе [6] в связи с возмущениями системы Руджинарса–Шнайдера [2, 6–9], имеющей орбиты с одним и тем же периодом. Мы ограничимся случаем, когда в (1.5) $s = 1$.

Вторая функция Гамильтона имеет вид

$$H(z,p) = e^{zp} - i\Omega \ln z. \tag{1.6}$$

Она появилась в недавних исследованиях квантовых систем Калоджеро–Строкки [9].

Третья функция Гамильтона имеет ньютонов вид

$$H(z,p) = \frac{1}{2}p^2 - i\Omega e^z. \tag{1.7}$$

В заключительном пятом разделе мы обсуждаем адаптацию правила квантования Бора–Зоммерфельда к системам с двумя степенями свободы (1.5)–(1.7). Заметим, что в вышеупомянутых примерах возможны только орбиты с одним и тем же периодом. Это обстоятельство лишь отмечено здесь, а его исследование запланировано на ближайшее будущее.

2. ДЕЙСТВИЯ И ИХ ВЫЧИСЛЕНИЕ В СТАНДАРТНОМ СЛУЧАЕ СИСТЕМ ТИПА АРНОЛЬДА–ЛИУВИЛЛЯ

Кратко напомним основы построения действий в случае систем типа Арнольда–Лиувилля (подробнее см., например, [10]). Мы ограничимся рассмотрением систем с двумя степенями свободы, чтобы упростить обозначения и сравнение с системами Калоджеро–Строкки, которые тоже имеют две степени свободы.

Определение 2.1. Пусть пространство $\mathbb{R}^4$ с элементами $(x_1, x_2; y_1, y_2)$ наделено симплектической формой (1.3) и соответствующей скобкой Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$. Пара функций $H = (H_1, H_2)$ определяет систему, интегрируемую в смысле систем типа Арнольда–Лиувилля, если:

1) $\{H_1, H_2\} = 0$;

2) отображение $H = (H_1, H_2)\colon \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^2$ является субмерсией и его гладкие слои компактны.

У таких систем связные компоненты гладких слоев являются торами. Предположим для простоты, что гладкие слои связны. Предположим также, что отображение H имеет все необходимые свойства регулярности, например является вещественно-аналитическим. Пусть c_0 – регулярное значение отображения H. Из теоремы Тома о расслоении следует существование семейства аналитических циклов $(\gamma_1(c), \gamma_2(c))$, которые определены в некоторой окрестности c_0 и порождают $H_1(H^{-1}(c), \mathbb{Z})$.

Определение 2.2. Действиями системы H относительно цикла $(\gamma_1(c), \gamma_2(c))$ называются аналитические функции, определенные в окрестности некоторого регулярного значения c_0 равенствами

$$p_1 = \int_{\gamma_1(c)} \eta, \qquad p_2 = \int_{\gamma_2(c)} \eta, \tag{2.1}$$

где $\eta = x_1\, dy_1 + x_2\, dy_2$.

Замечание 2.1. Действия определены только локально в окрестности каждого регулярного значения H. Они, вообще говоря, не существуют глобально и разветвляются в точках, соответствующих критическим значениям. Несколько примеров действий приведены в [10].

Замечание 2.2. В определении действий мы использовали семейство аналитических циклов $(\gamma_1(c), \gamma_2(c))$, которые порождают $H_1(H^{-1}(c), \mathbb{Z})$. Если вместо системы $(\gamma_1(c), \gamma_2(c))$ использовать другую систему циклов $(\gamma_1'(c), \gamma_2'(c))$, также порождающую $H_1(H^{-1}(c), \mathbb{Z})$, то соответствующие действия будут линейными комбинациями действий (2.1) с целыми коэффициентами. Если заменить в (2.1) 1-форму η на какую-нибудь другую 1-форму η' такую, что $d\eta' = d\eta\ (= \omega)$, то соответствующие действия будут отличаться от (2.1) лишь на константы.

Примеры. Рассмотрим рациональную систему Калоджеро–Мозера во внешнем поле с квадратичным потенциалом

$$H = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + g^2(x_1 - x_2)^{-2} + \lambda^2(x_1^2 + x_2^2). \tag{2.2}$$

Все орбиты этой системы имеют один и тот же период не больше $2\pi/\lambda$. В этом случае действия являются алгебраическими функциями, определяемыми как собственные значения матрицы Лакса, элементы которой – рациональные функции координат [11].

Иногда можно найти действия, поскольку в соответствующем уравнении Гамильтона–Якоби переменные разделяются. Наиболее известный пример – система Кеплера. Мозер показал [4], что эта система эквивалентна геодезическому потоку на сфере. Периоды орбит геодезического потока на сфере, в отличие от системы Калоджеро–Мозера,

зависят от энергии. Конкретное вычисление действий для системы Кеплера стандартно (см., например, [10]).

Имеется несколько примеров, в которых вычисление действий возможно, хотя неизвестно, как разделить переменные в соответствующих уравнениях Гамильтона–Якоби. Так, действия можно вычислить, когда система является алгебраически интегрируемой и известен явный вид уравнений для потока первых интегралов в терминах дополнительных переменных w_1 и w_2, прибавляемых к первым интегралам H_1 и H_2. Симплектическая форма выражается через эти переменные и первые интегралы. В [10] доказано, что в данном случае можно найти явный вид матрицы периодов. В некоторых примерах, аналогичных волчку Ковалевской, можно проинтегрировать матрицу периодов и получить действия (см. [10, 12]).

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕЙСТВИЙ ДЛЯ СИСТЕМ КАЛОДЖЕРО–СТРОККИ. КОМПЛЕКСНОЕ УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЕЙСТВИЙ

Поверхности уровня первых интегралов (H_1, H_2) являются аффинными частями римановых поверхностей $H^{-1}(c)$. Мы рассмотрим семейство римановых поверхностей, получающихся компактификацией поверхностей уровня первых интегралов. Пусть $g-$род римановых поверхностей $H^{-1}(c)$, где c изменяется в некоторой окрестности некоторого регулярного значения c_0. Пусть $\big(\gamma_1(c), \gamma_2(c), \dots, \gamma_{2g-1}(c), \gamma_{2g}(c)\big)$ – система генераторов группы гомологий $H_1(H^{-1}(c), \mathbb{Z})$. Действия системы определяются $2g$ интегралами

$$p_1 = \int_{\gamma_1(c)} \eta, \quad p_2 = \int_{\gamma_2(c)} \eta, \quad \dots, \quad p_{2g-1} = \int_{\gamma_{2g-1}(c)} \eta, \quad p_{2g} = \int_{\gamma_{2g}(c)} \eta. \tag{3.1}$$

Таким образом, рассматриваемые системы с двумя степенями свободы имеют сколь угодно много (возможно, бесконечно много) действий, зависящих от рода g. Поэтому, может быть, следует ограничиться лишь действиями, которые соответствуют гомологии аффинных кривых, но на данном этапе нашего анализа мы еще не готовы принять такое решение. По нашему мнению, выбор семейства действий должен быть продиктован квантованием системы (если, конечно, такое квантование возможно).

Если задана голоморфная функция H двух комплексных переменных z и p, то можно исследовать соответствующее ей комплексное уравнение Гамильтона–Якоби

$$H\left(z, \frac{\partial S}{\partial z}\right) = \alpha. \tag{3.2}$$

Теорема 3.1. *Половина действительной части комплексного решения S уравнения (3.2) является решением уравнения Гамильтона–Якоби для $H_1 = \operatorname{Re} H$ и для $H_2 = \operatorname{Im} H$.*

Доказательство. Положим

$$S(z) = S_1(x_1, x_2) + iS_2(x_1, x_2). \tag{3.3}$$

Тогда

$$\frac{\partial S(z)}{\partial z} = \left(\frac{\partial S_1}{\partial x_1} + \frac{\partial S_2}{\partial x_2}\right) + i\left(\frac{\partial S_2}{\partial x_1} - \frac{\partial S_1}{\partial x_2}\right). \tag{3.4}$$

Поскольку

$$H(z,p) = H_1(x_1, x_2; y_1, y_2) + H_2(x_1, x_2; y_1, y_2), \tag{3.5}$$

комплексное уравнение Гамильтона–Якоби имеет вид

$$a + ib = \alpha, \tag{3.6}$$

где

$$a = H_1\left(x_1, x_2; \frac{\partial S_1}{\partial x_1} + \frac{\partial S_2}{\partial x_2}, -\frac{\partial S_2}{\partial x_1} + \frac{\partial S_1}{\partial x_2}\right), \tag{3.7а}$$

$$b = H_2\left(x_1, x_2; \frac{\partial S_1}{\partial x_1} + \frac{\partial S_2}{\partial x_2}, -\frac{\partial S_2}{\partial x_1} + \frac{\partial S_1}{\partial x_2}\right). \tag{3.7б}$$

Пользуясь условиями Коши–Римана для голоморфной функции S

$$\frac{\partial S_1}{\partial x_1} = \frac{\partial S_2}{\partial x_2}, \qquad \frac{\partial S_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial S_1}{\partial x_2}, \tag{3.8}$$

получаем, что уравнения (3.7а) и (3.7б) можно представить в виде

$$H_1\left(x_1, x_2; 2\frac{\partial S_1}{\partial x_1}, 2\frac{\partial S_1}{\partial x_2}\right) = a, \tag{3.9а}$$

$$H_2\left(x_1, x_2; 2\frac{\partial S_1}{\partial x_1}, 2\frac{\partial S_1}{\partial x_2}\right) = b. \tag{3.9б}$$

Теперь очевидно, что $S_1/2$ является точным решением действительных уравнений Гамильтона–Якоби для H_1 и H_2.

Для иллюстрации теоремы 3.1 рассмотрим два класса функций Гамильтона. К первому классу относятся функции Гамильтона, называемые функциями Гамильтона ньютонова типа. Они имеют вид

$$H(z,p) = \frac{p^2}{2} + \Phi(z). \tag{3.10}$$

Соответствующее комплексное уравнение Гамильтона–Якоби

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 + \Phi(z) = \alpha \tag{3.11}$$

имеет голоморфное (в плоскости с разрезами) решение

$$S(z) = S_0 + 2\int [\alpha - \Phi(z)]^{1/2} dz. \tag{3.12}$$

Представив потенциальную часть функции Гамильтона в виде

$$\Phi(z) = \Phi_1(x_1, x_2) + i\Phi_2(x_1, x_2), \tag{3.13}$$

получаем, что

$$H_1(x_1,x_2;y_1,y_2)=\frac{1}{2}(y_1^2-y_2^2)+\Phi_1(x_1,x_2), \tag{3.14а}$$

$$H_2(x_1,x_2;y_1,y_2)=-y_1y_2+\Phi_2(x_1,x_2). \tag{3.14б}$$

Поэтому действительная и мнимая части комплексного уравнения Гамильтона–Якоби имеют вид

$$2\left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial x_1}\right)^2-\left(\frac{\partial S_1}{\partial x_2}\right)^2\right]+\Phi_1(x_1,x_2)=a \tag{3.15а}$$

и

$$-4\frac{\partial S_1}{\partial x_1}\,\frac{\partial S_1}{\partial x_2}=b. \tag{3.15б}$$

Ко второму классу относятся функции Гамильтона

$$H(z,p)=e^p-f(z). \tag{3.16}$$

В этом случае комплексное уравнение Гамильтона–Якоби имеет голоморфное (в плоскости с разрезами) решение

$$S(z)=\int[\ln(\alpha+f(z))]\,dz. \tag{3.17}$$

Итак, мы показали, что уравнение Гамильтона–Якоби системы Калоджеро–Строкки можно решить. Заметим, что, вообще говоря, в этом уравнении переменные не разделяются. Вычисление действий стандартно.

4. ПРИМЕРЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ КОМПЛЕКСНОГО УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ И ВЫЧИСЛЕНИЯ ДЕЙСТВИЙ. СРАВНЕНИЕ С КВАНТОВЫМИ СИСТЕМАМИ

В этом разделе мы рассмотрим системы Калоджеро–Строкки с функциями Гамильтона (1.5), (1.6) и (1.7). В первом случае комплексное уравнение Гамильтона–Якоби имеет решение (см. (3.17))

$$S(z)=S_0+\int[\ln(\alpha+i\Omega z)]\,dz, \tag{4.1}$$

т.е.

$$S(z)=S_0+\left[\frac{\alpha}{i\Omega}+z\right]\ln(\alpha+i\Omega z)-z. \tag{4.2}$$

В случае (1.6) решение имеет вид

$$S(z)=S_0+\int[\ln(\alpha+i\Omega\ln z]\frac{dz}{z}, \tag{4.3}$$

т.е.

$$S(z)=S_0+\frac{1}{i\Omega}\big\{[\alpha+i\Omega\ln z]\ln[\alpha+i\Omega\ln z]-[\alpha+i\Omega\ln z]\big\}. \tag{4.4}$$

В последнем случае (1.7) находим

$$S(z) = \int \left[2\left(\frac{\alpha}{2} + i\Omega e^z \right) \right]^{1/2} dz, \tag{4.5}$$

откуда

$$S(z) = 2u - \alpha^{1/2} \ln \frac{\alpha^{1/2} + u}{\alpha^{1/2} - u}, \tag{4.6}$$

где

$$u = \left[2\left(\frac{\alpha}{2} + i\Omega e^z \right) \right]^{1/2}. \tag{4.7}$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, во всех трех случаях (1.5), (1.6) и (1.7) мы можем решить комплексное уравнение Гамильтона–Якоби и затем, применив теорему 3.1, найти решения действительных уравнений Гамильтона–Якоби для действительной и мнимой частей H. Действия интегрируемых систем определяются периодами многозначной комплексной функции S, суженной на циклы $\gamma_j(\alpha)$. Естественным обобщением квазиклассического приближения было бы приравнивание действий полуцелым кратным постоянной Планка. Затем можно было бы сравнить реальный энергетический спектр с вычисленным (если вычисление возможно). Системы (1.5) и (1.6) имеют то общее свойство, что периоды их орбит одинаковы. Ожидается, что соответствующие квантовые модели имеют эквидистантные энергетические спектры [9], и это следует сравнить с квазиклассическим приближением.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке CNRS в рамках проекта Projet “Géométrie Différentielle, Systèmes Dynamiques et Applications” de l’UMR 7586.

Список литературы

[1] *F. Magri.* A geometrical approach to Nonlinear solvable Equations. In: Lecture Notes in Physics. V. 120. Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems. Proc. of the Meeting Held at the University of Lecce June 20–23, 1979. Eds. M. Boiti, F. Pempinelli, and G. Soliani. Berlin: Springer, 1980. P. 233–263.
[2] *F. Calogero.* J. Math. Phys. 1998. V. 39. P. 5268–5291.
[3] *H. Flaschka.* Phys. Lett. A. 1988. V. 131. P. 505–508.
[4] *F. Strocchi.* Rev. Mod. Phys. 1966. V. 38. № 1. P. 36–43.
[5] *V. I. Arnol’d, A. Avez.* Problèmes ergodiques de la mécanique classique. Paris: Gauthier-Villars, 1967.
[6] *F. Calogero, J.-P. Françoise.* Solution of certain integrable dynamical systems of Ruijsenaars–Schneider type with completely periodic trajectories (в работе).
[7] *F. Calogero.* J. Math. Phys. 1997. V. 38. P. 5711–5719.
[8] *F. Calogero.* Tricks of the trade: relating and deriving solvable and integrable dynamical systems. In: Proceedings of the International Workshop on Calogero–Moser–Sutherland type models, held at the Centre de Recherches Mathématiques de l’Université de Montréal, Canada, in March 1997 (в печати).
[9] *F. Calogero.* Solution of two quantum problems in the plane (в работе).
[10] *J.-P. Françoise.* Séminaire de Maths. Supérieures de Montréal. 1986. V. 102. P. 101–120.
[11] *J.-P. Françoise.* Commun. Math. Phys. 1988. V. 117. P. 37–47.
[12] *Г. Голдстейн.* Классическая механика. М.: Гостехиздат, 1957.