Функциональный анализ и его приложения,
1987, т. 21, вып. 2, 16—22

УДК 514 + 515.16

НОВЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЫ ПУАНКАРЕ

В. Л. Гинзбург

В работе доказано, что число замкнутых траекторий поля ядер замкнутой невырожденной и сохраняющей центр тяжести 2-формы на тотальном пространстве ориентируемого расслоения со слоем окружность над ориентируемой компактной двумерной базой не меньше минимального числа критических точек гладкой функции на базе, если поле ядер C^1-близко к вертикальному. С учетом кратности это число не меньше минимального числа критических точек морсовской функции на базе. Мы также оцениваем снизу число замкнутых траекторий в случае многомерной базы. Форма сохраняет центр тяжести, если ее когомологический класс поднят с базы. В качестве приложения мы доказываем, что число замкнутых траекторий частицы на поверхности в сильном и мало меняющемся перпендикулярном поверхности магнитном поле не меньше, чем минимальное число критических точек функции на поверхности.

Автор благодарен В. И. Арнольду за постановку задачи о замкнутых траекториях полей ядер форм, сохраняющих центр тяжести и за помощь в работе.

I. Условие сохранения центра тяжести. Пусть $S^1 \to M \xrightarrow{p} B$ — ориентируемое расслоение над замкнутым (компактным и без края) ориентируемым многообразием B.

Определение 1. Замкнутая 2-форма ω на M сохраняет центр тяжести (СЦТ), если выполнено одно из следующих равносильных условий:

1) для любой замкнутой кривой Γ в B интеграл ω по 2-цепи $p^{-1}(\Gamma)$ равен нулю;

2) существует замкнутая 2-форма ω_0 на B такая, что $[\omega] = p^*[\omega_0]$;

3) $p_![\omega] = 0$, где $p_!$ — прямой образ в когомологиях — трансфер ($p_! = D_B^{-1} p_* D_M$, D: $H^* \to H_*$ — отображение двойственности Пуанкаре).

Равносильность условий 1) — 3) вытекает из точной последовательности Гизина.

Предположим раз и навсегда, что B четномерно. Тогда любая 2-форма на M имеет в каждой точке ненулевое ядро и называется невырожденной, если это ядро одномерно (в каждой точке).

Определение 2 (см. [1]). Симплектический диффеоморфизм φ_1: $B \to B$ называется гомологичным тождественному (ГТ), если его можно соединить с тождественным гладкой кривой φ_t, состоящей из симплектических диффеоморфизмов так, что поле скоростей $\dot{\varphi}_t$ имеет однозначную функцию Гамильтона h_t. Если φ_1 ГТ диффеоморфизм, то φ_t можно выбрать так, что h_t периодична по t с периодом 1.

Исследование неподвижных точек ГТ диффеоморфизмов можно свести к исследованию невырожденных СЦТ форм.

Рассмотрим прямое произведение $M = B \times S^1$, $S^1 = [0, 1]/0 \sim 1$. Пусть ω — такая замкнутая невырожденная 2-форма на M, что поле направлений $\operatorname{Ker} \omega$ трансверсально «горизонтальным» многообразиям $B_t = B \times \{t\}$, $t \in S^1$. Зафиксируем $0 \in S^1$. Поле $\operatorname{Ker} \omega$ определяет симплектическое отображение Пуанкаре $\Phi(\omega)$: $(B_0, \omega_0) \to (B_0, \omega_0)$, $\omega_0 = \omega \mid B_0$. Любой

ГТ диффеоморфизм $(B_0, \omega_0) \to (B_0, \omega_0)$ можно получить как отображение Пуанкаре СЦТ-формы $\omega = p^* \omega_0 - dh \wedge dt$.

Проекция p позволяет отождествить все B_t с B.

Утверждение 1. а) ω *СЦТ* $\Rightarrow \Phi(\omega)$ *ГТ, если либо база B двумерна, либо $\omega_t = \omega \mid B_t$ C^0-близка к ω_0 при всех $t \in S^1$. Более того, существует диффеоморфизм H: $M \to M$ такой, что $H(B_t) = B_t$ при всех $t \in S^1$, $H \mid B_0 = \mathrm{id}$ и $H^* \omega = p^*\omega - dh \wedge dt$, где $h \in C^\infty(M)$.*

б) $\Phi(\omega)$ *ГТ* $\Rightarrow \omega$ *СЦТ, если $\omega - p^*\omega_0$ C^0-мала, и либо класс когомологий $[\omega_0]$ целочисленный, либо $\bigcup [\omega_0]^{n-1}$: $H^1(B; \mathbf{R}) \to H^{2n-1}(B; \mathbf{R})$-изоморфизм* $(2n = \dim B)$.

Замечание. $\Phi(\omega)$ ГТ $\not\Rightarrow \omega$ СЦТ. Пример: B — двумерный тор с координатами p и q, $\omega = dp \wedge dq + dp \wedge dt$.

Доказательство. Ориентируем $[0,1]$ от 0 к 1. Эта ориентация задает ориентацию поля направлений $\operatorname{Ker} \omega$. Ориентированное поле направлений $\operatorname{Ker} \omega$ определяет семейство диффеоморфизмов $B_0 \to B_t$, $t \in [0, 1]$, переводящих $x \in B_0$ в первое пересечение траектории с началом в x с B_t. Отождествив при помощи p B_t, $t \in S^1$, с B, получим диффеоморфизмы $\Phi_t(\omega)$: $B \to B$, $t \in [0,1]$, $\Phi_0 = \mathrm{id}$, $\Phi_1 = \Phi(\omega)$. Отображение $\omega \mapsto \{\Phi_t(\omega)\}$ — взаимно однозначное соответствие между множеством замкнутых невырожденных 2-форм на M, для которых $\operatorname{Ker} \omega$ трансверсально B_t при всех $t \in S^1$, и множеством путей $[0, 1] \to \operatorname{Diff} B$ с тождественным началом и симплектическим концом. Пусть φ_t — такой путь, $\tilde{\varphi}$ — его гомотопический тип (с закрепленными концами), Γ — 1-цикл в B. Следуя А. Баньяге [5; 6], положим $\tilde{S}(\tilde{\varphi})(\Gamma) = \int \omega_0$, где интеграл берется по 2-цепи, «составленной» из 1-циклов $\varphi_t(\Gamma)$. $\tilde{S}(\tilde{\varphi})(\Gamma)$ не зависит от выбора $\{\varphi_t\} \in \tilde{\varphi}$ и равен нулю, если Γ гомологичен нулю, поэтому $\tilde{S}(\tilde{\varphi}) \in H^1(B; \mathbf{R})$. Если ω такова, что $\Phi_t(\omega) = \varphi_t$, то $\tilde{S}(\tilde{\varphi})(\Gamma)$ равен интегралу ω по $p^{-1}(\Gamma)$, т. е. $\tilde{S}(\tilde{\varphi}) = p_![\omega]$.

Докажем а).

Лемма 1. *Существует гомотопный тождественному сохраняющий все B_t диффеоморфизм Ψ: $M \to M$, для которого $\Psi^* \omega \mid B_t = \omega_0$, при всех $t \in S^1$* и $\Psi \mid B_0 = \mathrm{id}$.

Доказательство леммы 1. Так как все стандартные сечения $B \to B_t$ гомотопны, то $[\omega_t] = [\omega_0]$. Если $\dim B = 2$ или ω_t C^0-близка к ω_0, то для каждого $t \in S^1$ найдется такое гладкое по t и $\tau \in [0, 1]$ семейство замкнутых невырожденных 2-форм $\omega_{t,\tau}$ на B_t, соединяющее ω_0 и ω_t, что $[\omega_{t,\tau}] = [\omega_0]$ и $\omega_{0,\tau} = \omega_0$ при всех $\tau \in [0, 1]$. По теореме Мозера [9] существует семейство диффеоморфизмов $\Psi_{t,\tau}$: $(B_t, \omega_0) \to (B_t, \omega_{t,\tau})$, гладко зависящее от t и τ, для которого $\Psi_{t,\tau_0} = \mathrm{id}$, $\Psi_{0,\tau} = \mathrm{id}$ при всех t и τ. Семейство $\{\Psi_{t,1}\}$ задает искомый Ψ. Лемма доказана.

Форма $\omega' = \Psi^*\omega$ сохраняет центр тяжести и $\omega' \mid B_t = \omega_0$, т. е. диффеоморфизмы $\varphi_t = \Phi_t(\omega') = \Psi_{t,1}^{-1} \Phi_t(\omega)$ — симплектические при всех $t \in [0, 1]$ и $\tilde{S}(\tilde{\varphi}) = 0$.

Обозначим связную компоненту единицы в группе симплектических диффеоморфизмов $(B, \omega_0) \to (B, \omega_0)$ через G.

Лемма 2. *Пусть $\{\varphi_t\}$ — путь в G, $\varphi_0 = \mathrm{id}$ и $\tilde{S}(\tilde{\varphi}) = 0$, тогда существует такой гомотопный (с закрепленными концами) ему в G путь g_t, что поле $\dot{g}_t$ гамильтоново при всех $t \in [0, 1]$. Обратно, если $\{\varphi_t\}$ — путь в G и $\dot{\varphi}_t$ — гамильтоново поле при всех $t \in [0, 1]$, то $\tilde{S}(\tilde{\varphi}) = 0$.*

Доказательство леммы дано А. Баньягой [5]. Положим: $F_t = g_t^{-1}\varphi_t$, $\varphi_t = \Phi_t(\omega')$. Петля $\{F_t\}$ гомотопна id и определяет такой диффеоморфизм $F: M \to M$, что $F^*\omega' = p^*\omega_0 - dh \wedge dt$ для некоторой $h \in C^\infty(M)$. Диффеоморфизмы Ψ и F гомотопны id, для завершения доказательства п. а) осталось положить $H = F\Psi$.

Докажем б). Так как $\Phi(\omega)$ — ГТ, существует такое семейство симплектических диффеоморфизмов g_t: $(B, \omega_0) \to (B, \omega_0)$, $t \in [0, 1]$, что $g_0 = \mathrm{id}$,

$g_1 = \Phi(\omega)$ и поле $\dot{g}_t$ гамильтоново при всех t. Разность $\omega_t - \omega_0$ C^0-мала при всех $t \in S^1$. Из леммы 1 вытекает, что найдется $\{\varphi_t\}$ — путь в G, гомотопный (в $\operatorname{Diff} B$) пути $\Phi_t(\omega)$. Тогда $\tilde{S}(\tilde{\varphi}) = \tilde{S}(\tilde{\Phi}) = p_!\,[\omega]$, а по лемме 2 $\tilde{S}(\tilde{g}) = 0$. Пусть ψ_t: $(B, \omega_0) \to (B, \omega_0)$ — петля в G, полученная последовательным прохождением путей g_{2t}, $t \in [0, 1/2]$ и φ_{2-2t}, $t \in [1/2, 1]$, тогда $\tilde{S}(\tilde{\psi}) \in \tilde{S}(\pi_1(G, \mathrm{id}))$. Очевидно, что если $[\omega_0]$ — целочисленный, то последняя группа дискретна в $H^1(B, \mathbf{R})$. Как показал А. Баньяга [5], это также верно, если $\cup\,[\omega_0]^{n-1}$: $H^1(B; \mathbf{R}) \to H^{2n-1}(B; \mathbf{R})$ — изоморфизм ($2n = \dim B$). Выберем 1-циклы $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$, задающие базис в $H_1(B; \mathbf{R})$, тогда все значения $|\tilde{S}(\tilde{\psi})(\Gamma_j)| = |\langle[\omega], p^{-1}(\Gamma_j)\rangle|$ достаточно малы, если разность $p^*\omega_0 - \omega$ достаточно C^0-мала. Следовательно, эти значения равны нулю, так как подгруппа $\tilde{S}(\pi_1(G, \mathrm{id}))$ дискретна. Значит, $p_!\,[\omega] = \tilde{S}(\tilde{\psi}) = 0$ и ω СЦТ. Утверждение доказано.

Замечание. Лемма 1 доказана для $B = T^2$ [7].

Кратностью неподвижной точки отображения φ называется размерность локальной алгебры ростка отображения $\varphi - \mathrm{id}$ в этой точке [3]. Кратностью замкнутой траектории поля направлений называется кратность отображения Пуанкаре этой траектории. Если траектория невырожденна (монодромия не имеет собственных чисел, равных 1), то ее кратность равна 1. Если поле направлений имеет вид $\operatorname{Ker}\omega$ (ω — невырожденная 2-форма), то найдется сколь угодно C^1-близкая к ω невырожденная 2-форма ω' такая, что $\operatorname{Ker}\omega'$ имеет только невырожденные замкнутые траектории, и их число не больше, чем число замкнутых траекторий поля $\operatorname{Ker}\omega$ с учетом кратности. Когда ω замкнута и СЦТ можно выбрать обладающую этими свойствами ω'. Доказательство стандартно.

Следствие 1. *Пусть B — поверхность рода g, а ω — такая замкнутая невырожденная СЦТ2-форма на $B \times S^1$, что $\operatorname{Ker}\omega$ трансверсально многообразиям $B \times \{t\}$ при всех $t \in S^1$, тогда $\operatorname{Ker}\omega$ имеет не менее двух при $g = 0$ и трех при $g \geqslant 1$ геометрически различных замкнутых траекторий, а с учетом кратности — не менее $2g + 2$.*

Доказательство. Следствие вытекает из утверждения 1 а) и результатов Н. А. Никишина [10] при $g = 0$, теоремы Конли и Цендера [7] при $g = 1$, результатов Ж.-К. Сикорова [12] при $g > 1$.

Утверждение 2. *Пусть ω — такая замкнутая 2-форма на $B \times S^1$, $\dim B = 2n$, что $\cup\,[\overline{\omega}]^{n-1}$: $H^1(B; \mathbf{R}) \to H^{2n-1}(B; \mathbf{R})$ — изоморфизм, где $\overline{\omega}$ — среднее значение формы $\omega \mid B \times \{t\}$ по $t \in S^1$. Тогда ω СЦТ, если и только если $[\omega]^n \in \operatorname{ann} p^*H^1(B; \mathbf{R})$, ($p$: $B \times S^1 \to B$ — естественная проекция).*

Доказательство стандартно.

Замечание. В утверждении 2 нельзя отказаться от изоморфности $\cup\,[\overline{\omega}]^{n-1}$. Действительно, если B — многообразие Делиня — Терстона [4] и $\omega = p^*\omega_0 + (p^*d\varphi) \wedge dt$, где ω_0 — симплектическая структура на B, а φ — угловая координата на слое расслоения $B \to T^2$, инвариантная относительно монодромии, то $[\omega]^2 \in \operatorname{ann} p^*H^1(B; \mathbf{R})$, но ω не СЦТ.

Сформулируем теперь определения величин, через которые мы оценим число замкнутых траекторий поля $\operatorname{Ker}\omega$.

II. Число критических многообразий функции на пространстве одномерного расслоения со слоем S^1. Пусть, как и в п. I, $S^1 \to M \xrightarrow{p} B$ — ориентируемое расслоение над ориентируемым замкнутым многообразием. Обозначим $\mathscr{E}_g(p)$ множество таких функций на M, что: 1) их критические многообразия — гладкие кривые; 2) проекции критических многообразий на базу гомологичны нулю. $\mathscr{E}_a(p)$ — подмножество в $\mathscr{E}_g(p)$, состоящее из функций f, критические многообразия которых невырожденны по Ботту, т. е. ограничения d^2f на трансверсали к критическим многообразиям невырожденны.

Определение 3. Геометрической (алгебраической) критичностью $K_g(B)$ ($K_a(B)$) многообразия B называется минимальное число критических точек гладкой (морсовской) функции на B. Геометрической (алгебраической) критичностью $K_g(p)$ ($K_a(p)$) расслоения p называется минимальное число критических многообразий функции из $\mathscr{E}_g(p)$ ($\mathscr{E}_a(p)$).

Имеют место следующие оценки:

$$\begin{array}{ccccc} 2 \leqslant & K_g(p) & \leqslant & K_a(p), & \\ & \rotatebox{90}{$\geqslant$} & & \rotatebox{90}{$\geqslant$} & \\ & K_g(B) & \leqslant & K_a(B), & \end{array} \tag{1}$$

$$K_a(p) \geqslant \Sigma \dim H_k(M; \mathbf{R})/2, \quad 0 \leqslant k \leqslant \dim M. \tag{2}$$

Оценка (1) очевидна, а (2) вытекает из неравенств Морса для функций с невырожденными критическими многообразиями.

Например, если B — ориентируемая поверхность рода g и p не тривиально, то (2) дает

$$K_a(p) \geqslant 2g + 1. \tag{3}$$

Это показывает, что (2) — грубая оценка: при $g = 0$ неравенство (3) хуже, чем (1). Когда $M = B \times S^1 \xrightarrow{p} B$ — тривиальное расслоение,

$$K_a(p) \geqslant \Sigma \dim H_k(B; \mathbf{R}), \quad 0 \leqslant k \leqslant \dim B. \tag{4}$$

Неравенство (4) следует из (2).

Теорема 1. *Пусть B — ориентируемая, связная и компактная поверхность рода g, а p — ориентируемое расслоение над B со слоем S^1; тогда*

1) $K_a(p) = 2g + 2$,

2) $K_g(p) = 3$ *при* $g > 0$,

3) $K_g(p) = 2$ *при* $g = 0$.

Доказательство. Равенство 3) вытекает из (1). Нам надо показать, что число критических многообразий функции из $\mathscr{E}_g(p)$ ($\mathscr{E}_a(p)$) не меньше трех ($2g + 2$) при $g > 0$. Если число критических многообразий бесконечно, то все доказано, значит, мы можем считать, что все критические многообразия изолированы. Далее все (ко)гомологии — с коэффициентами в $\mathbf{R}$.

Докажем 2). Достаточно показать, что если $K_g(p) = 2$, то B диффеоморфно S^2. Пусть $f \in \mathscr{E}_g(p)$, и f имеет ровно два критических многообразия: l_0 и l_1. В этом случае $M \setminus l_0$ стягивается к l_1, а $M \setminus l_1$ — к l_0. Значит, $[l_0]$ и $[l_1]$ порождают $H_1(M)$, и так как $p(l_0)$ и $p(l_1)$ гомологичны нулю, то $p_* H_1(M) = 0$. Но $p_* \mid H_1(M)$ — эпиморфизм (это следует из последовательности Гизина). Следовательно, $H_1(B) = 0$ и B диффеоморфно S^2.

Докажем 1). Если $g = 0$ или p тривиально, то 1) следует из (1) или (4). Пусть p не тривиально и $g > 0$. Согласно (3) достаточно показать, что $K_a(p) \neq 2g + 1$. Пусть $K_a(p) = 2g + 1$, т. е. найдется $f \in \mathscr{E}_a(p)$, имеющая ровно $2g + 1$ критическое многообразие. Тогда f имеет одно критическое многообразие индекса 0 (по Ботту), одно — индекса 2 и $2g - 1$ — индекса 1. Это следует из неравенств Морса для функций с невырожденными критическими многообразиями.

Пусть L — подпространство в $H_1(M)$, порожденное критическим многообразием индекса 0, тогда $\dim H_1(M) \leqslant \dim L + 2g - 1$. Действительно, $\dim H_1(M_{c+\varepsilon}) - \dim H_1(M_{c-\varepsilon}) \leqslant 1$, где $M_a = \{x \in M \mid f(x) \leqslant a\}$, $\varepsilon > 0$ мало, c — критическое значение индекса 1. Если $c = \max f$, то $H_1(M_{c-\varepsilon}) = H_1(M)$. Поскольку $p_*\colon H_1(M) \to H_1(B)$ — эпиморфизм и $p_* \mid L = 0$, $\dim H_1(B) \leqslant \dim p_* H_1(M) \leqslant 2g - 1$. Но $\dim H_1(B) = 2g$ — противоречие. Теорема доказана.

Проблема. Верно ли, что при любых p и B (p ориентируемо, B компактно и ориентируемо) имеют место равенства: $K_a(p) = K_a(B)$, $K_g(p) = K_g(B)$.

III. Основной результат.

Теорема 2. *Пусть $S^1 \to M \xrightarrow{p} B$ — ориентируемое расслоение над замкнутым ориентируемым четномерным многообразием B и ω — замкнутая невырожденная СЦТ 2-форма на M такая, что поле направлений* $\mathrm{Ker}\,\omega$ *C^1-близко к вертикали. Тогда* $\mathrm{Ker}\,\omega$ *имеет не меньше $K_g(p)$ замкнутых траекторий, а с учетом кратности — не менее $K_a(p)$.*

Следствие 2. *В условиях теоремы 2 число замкнутых траекторий поля* $\mathrm{Ker}\,\omega$ *в расслоении над S^2 не меньше двух, в расслоении над поверхностью рода $g > 0$ — не меньше трех, а с учетом кратности — не меньше $2g + 2$.*

Замечания. 1. Следствие 2 доказывает частный случай гипотезы В. И. Арнольда, согласно которой, если ω замкнута, невырожденна и СЦТ, а поле $\mathrm{Ker}\,\omega$ трансверсально некоторой связности на расслоении p, то поле $\mathrm{Ker}\,\omega$ имеет не менее $K_g(B)$ замкнутых траекторий, а учитывая кратности — не менее $K_a(B)$.

2. Если p тривиально, то следствие 2 покрывается следствием 1.

3. В случае $B = S^2$ достаточно C^0-близости поля $\mathrm{Ker}\,\omega$ к вертикали. Это вытекает из результата К. Саймона [13], по которому бездивергентное поле на S^3, C^0-близкое к вертикали, имеет не менее двух замкнутых траекторий, и того, что S^3 послойно накрывает тотальное пространство любого нетривиального S^1-расслоения над S^2.

Доказательство теоремы 2. Зададим на p ориентацию, а на B — метрику. Зафиксируем для каждой точки $b \in B$ окрестность D_b радиуса меньшего, чем радиус инъективности. Пусть также P — какая-нибудь связность на p.

Для каждой точки $x \in M$ найдется единственное сечение $j_x\colon D_{p(x)} \to p^{-1}(D_{p(x)})$, $j_x(p(x)) = x$, P — плоское вдоль каждой геодезической с началом в $p(x)$. Введем на M метрику, в которой связность P ортогональна слоям и $p_* \mid P_x\colon P_x \to T_{p(x)}B$ — изометрия при всех $x \in M$. Пусть z_1 — векторное поле на M, имеющее вертикальную компоненту единичной длины, такое, что $i_{z_1}\omega = 0$, и z — проекция z_1 на P вдоль слоя. Поле $\mathrm{Ker}\,\omega$ C^1-близко к вертикали тогда и только тогда, когда поле z C^1-мало. В этом случае траектория поля $\mathrm{Ker}\,\omega$ с началом в $x \in M$, проходимая в положительном направлении, пересечет вложенный диск $\mathcal{D}_x = j_x(D_{p(x)})$ после одного оборота над слоем $p^{-1}(p(x))$. Обозначим эту точку пересения $\varphi(x)$, а отрезок траектории от x до $\varphi(x)$ — через Γ_x. Соединим $p(x)$ и $p(\varphi(x))$ единственной геодезической, лежащей в $D_{p(x)}$, и обозначим ее подъем в $\mathcal{D}_x$ через Δ_x. Ориентируем Γ_x и Δ_x от x к $\varphi(x)$.

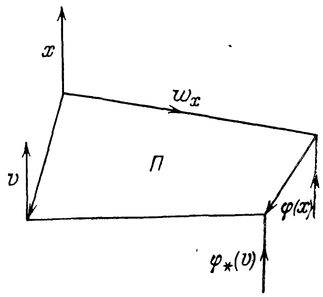
Определим теперь функцию $S \in C^\infty(M)$, критические многообразия которой являются замкнутыми траекториями поля $\mathrm{Ker}\,\omega$. Для этого зафиксируем $x_0 \in M$. Пусть $x \in M$ и $\gamma\colon [0, 1] \to M$ — кривая, соединяющая x_0 с x. Обозначим через $c(\gamma)$ 2-цепь, «составленную» из 1-циклов $\Gamma_{\gamma(t)} - \Delta_{\gamma(t)}$, $t \in [0, 1]$. Положим $S(x) = \int \omega$ по 2-цепи $c(\gamma)$. Если $x = x_0$ (кривая замкнута), то 2-цикл $c(\gamma)$ гомологичен 2-циклу $p^{-1}(p(\gamma))$ и $\int \omega = 0$, так как ω СЦТ. Следовательно, $S(x)$ не зависит от выбора кривой γ, соединяющей x_0 с x. Очевидно, $S \in C^\infty(M)$.

Условимся считать, что геодезическая $p(\Delta_x)$ на B параметризована отрезком $[0, 1]$. Положим: $w_x = \dot{\Delta}_x(0)$.

Лемма 3. *$d_xS = 0 \Leftrightarrow \Gamma_x$ замкнута.*

Доказательство. $\Leftarrow$) Немедленно следует из принципа наименьшего действия. $\Rightarrow$) Пусть $v \in T_xM$, тогда $d_xS(v)$ равно интегралу ω по инфинитезимальному четырехугольнику Π (рисунок). Это вытекает из определения функции S и принципа наименьшего действия. Если z C^1-мало, то φ C^1-близко к id, и Π близок к инфинитезимальному параллелограмму, полученному параллельным переносом v вдоль Δ_x. Интеграл ω по последнему равен $\omega_x(v, w_x) + o(\|w_x\|) O(\|v\|)$. Поэтому $d_x S = i_{w_x}\omega + O(\|z\|_{C^1}) \cdot O(\|w_x\|)$. Значит, если z достаточно C^1-мало, то $w_x \neq 0 \Rightarrow d_x S \neq 0$. Лемма доказана.

Очевидно, что $S \in \mathscr{E}_g(p)$. Таким образом, если z C^1-мало, то число замкнутых траекторий поля $\operatorname{Ker} \omega$ не меньше $K_g(p)$. Осталось показать, что если монодромия поля $\operatorname{Ker}\omega$ вдоль замкнутой траектории Γ_x невырожденна, то квадратичная форма $d_x^2 S \mid P_x$ невырожденна.



Из определения S и принципа наименьшего действия следует, что $d_x^2 S(y, y) = \omega_x(y, Ay)/2$, где $y \in P_x$ и $A\colon P_x \to P_x$ — оператор монодромии. Очевидна

Лемма 4. *Пусть Ω — симплектическая форма на $\mathbf{R}^{2n}$ и $A\colon \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ — невырожденный симплектический линейный оператор. Квадратичная форма $\Omega(y, Ay)$, $y \in \mathbf{R}^{2n}$ невырожденна тогда и только тогда, когда A не имеет собственных чисел ± 1.*

Монодромия не имеет собственных чисел ± 1, так как поле $\operatorname{Ker}\omega$ C^1-близко к вертикали и траектория Γ_x невырожденна. По лемме 5 форма $d_x^2 S \mid P_x$ невырожденна. Теорема доказана.

Замечание. Если p тривиально, то в условиях теоремы 2 поле $\operatorname{Ker}\omega$ имеет не менее $K_g(B)$ замкнутых траекторий, а с учетом кратности — не менее $K_a(B)$. Это легко доказать, если заметить, что угол между критическими многообразиями функции S и слоем и угол между $\operatorname{Ker} dS$ и слоем (в некритических точках) малы.

IV. Обсуждение результатов. Магнитные поля на поверхностях. Рассмотрим роль условия сохранения центра тяжести. Пусть $u \in H^1(B; \mathbf{R})$. Определим константы $K_g(u, p)$ и $K_a(u, p)$ аналогично константам $K_g(p)$ и $K_a(p)$, но с заменой функций на замкнутые формы когомологического класса p^*u. Аналогично теореме 2 доказывается

Теорема 3. *Пусть $S^1 \to M \xrightarrow{p} B$ — ориентируемое расслоение над замкнутым ориентируемым многообразием B и ω — замкнутая невырожденная 2-форма на M такая, что поле $\operatorname{Ker}\omega$ C^1-близко к вертикальному. Тогда поле $\operatorname{Ker}\omega$ имеет не менее $K_g(p_![\omega], p)$ замкнутых траекторий, а с учетом кратности — не менее $K_a(p_![\omega], p)$.*

Применим теперь полученные результаты к исследованию магнитных полей на замкнутых ориентируемых поверхностях.

Пусть B — такая поверхность с метрикой H на T^*B, и $K\colon B \to \mathbf{R}^+$ — положительная гладкая функция. Следуя В. И. Арнольду [2], рассмотрим движение точки с единичной скоростью по B под действием поперечного магнитного поля K, т. е. движение со скоростью 1 по кривым, геодезическая кривизна которых в точке x есть $K(x)$. Это движение задается векторным полем $v = v_m + v_f$ на гиперповерхности $M = \{\xi \in T^*B \mid H(\xi) = 1/2\}$, где v_m — поле геодезического потока на M (т. е. v_m определяет движение свободной частицы на B), а $v_f = K \cdot X$, X — генератор действия $\mathrm{U}(1)$ на M. Пусть $d\lambda$ — ограничение стандартной симплектической структуры (на кокасательном расслоении) на M, а dS — форма объема на B.

Очевидна

Лемма 5. *Движение в магнитном поле K происходит по проекциям траекторий поля направлений $\operatorname{Ker}(p^*K\,dS + d\lambda)$.*

Утверждение 3. *Обозначим род B через g.*

1) *Если $g = 0$ и K^{-1} C^0-мала, то движение имеет не менее двух замкнутых траекторий.*

2) *Если* $g = 1$ *и* K^{-1} *достаточно* C^0*-мала (при фиксированной* H*) или* H *достаточно* C^1*-близка к стандартной (при фиксированном* K*), то движение имеет не менее трех замкнутых траекторий, а с учетом кратности — не менее четырех.*

3) *Если* $g > 1$ *и* K^{-1} C^1*-мала, то движение имеет не менее трех замкнутых траекторий, а с учетом кратности — не менее* $2g + 2$.

Доказательство. Форма $\omega = p^*K\, dS + d\lambda$ замкнута, невырождена и СЦТ. В случае 1) Ker ω C^0-близко к вертикали, в случае 3) — C^1-близко к вертикали, а в случае 2) поле Ker ω трансверсально многообразиям $B \times \{t\}$ в тривиализации $M = B \times S^1$, соответствующей плоской метрике на $B = T^2$. Случай 1) доказывается аналогично результату К. Саймона [13] (см. замечание 3 после теоремы 2; 2) вытекает из следствия 1; 3) — из следствия 2. Доказательство закончено.

Утверждение 3.2) при $g = 0$ и в невырожденном случае при $g \geqslant 1$ покрывается результатами С. П. Новикова и И. А. Тайманова [11; 14]. В случае плоской метрики на T^2 утверждение доказано В. И. Арнольдом и В. В. Козловым [8].

Как сообщил автору В. В. Козлов, утверждение 3.2) можно вывести из результатов работы [8] следующим образом. Введем глобальные изотермические угловые координаты x, y на T^{2n} в которых метрика имеет вид $\lambda\, (dx^2 + dy^2)/2$. Следуя Биркгофу, сделаем замену времени по формуле $dt = \lambda\, d\tau$. Согласно принципу Мопертюи, траектория частицы с энергией h совпадает с траекторией частицы нулевой энергии на плоском торе в том же магнитном поле, но с добавочным потенциалом $-\lambda h$. Используя результат работы [8] о существовании трех (с учетом кратности — четырех) замкнутых тракторий частицы на плоском торе с потенциалом в достаточно сильном магнитном поле, получаем утверждение 3.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1979.
2. *Арнольд В. И.* Несколько замечаний о потоках линейных элементов и реперов // ДАН СССР.— 1961.— Т. 138, № 2.— С. 255—257.
3. *Арнольд В. И.* Особенности дифференцируемых отображений.— Т. 1.— М.: Наука, 1982.
4. *Арнольд В. И., Гивенталь А. Б.* Симплектическая геометрия // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.— Т. 4. Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР.— М.: 1985.— С. 7—139.
5. *Banyaga A.* Sur la structure du groupe des diffeomorphismes qui preservenvt une forme symplectique // Comment. Math. Helv.— 1978.— V. 53, № 2.— P. 174—227.
6. *Banyaga A.* The geometry of the flux homomorphism. Prepublications of the Institut Fourier. Grenoble, 1984.
7. *Conley C. C., Zehnder E.* The Birkhoff — Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnold // Inv. Math.— 1983.— V. 73, № 1.— P. 33—49.
8. *Козлов В. В.* Вариационное исчисление в целом и классическая механика // УМН.— 1985.— Т. 40, № 2.— С. 33—60.
9. *Moser J.* On the volume elements on a manifold // Trans. Amer. Math. Soc.— 1965.— V. 120. № 2.— P. 286—294.
10. *Никишин Н. А.* О неподвижных точках диффеоморфизмов двумерной сферы, сохраняющих ориентированную площадь // Функцион. анализ и его прил. 1974.— Т. 8, № 1.— С. 84—85.
11. *Новиков С. П., Тайманов И. А.* Периодические экстремали многозначных или не всюду положительных функционалов // ДАН СССР. — 1984.— Т. 274, — № 1.— С. 26—28.
12. *Sikorav J.-C.* Points fixes d'un symplectomorphism homologue, à l'identite. Preprint F-91405-ORSAY cedex. Universite de Paris, 1984.
13. *Simon C.* A bound for fixed-point index for an area preserving map with application to mechanics // Inv. Math.— 1974.— V. 26, № 2.— P. 187—200.
14. *Тайманов И. А.* Принцип перекидывания циклов в теории Морса — Новикова // ДАН СССР.— 1983.— Т. 268, № 1.— С. 46—50.

Московский институт
стали и сплавов

Поступило в редакцию
28 апреля 1986 г.